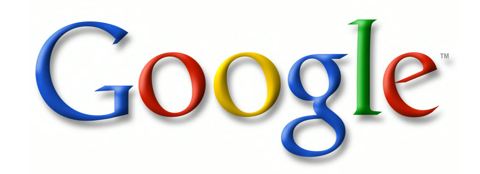


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

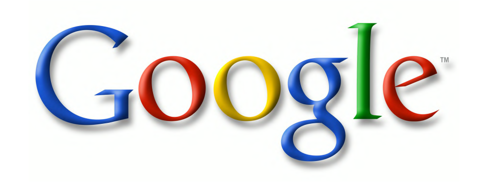
Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`





ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

POUR LES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES.

COMITÉ DE RÉDACTION.

Président....... M. BAILLAUD, Doyen.

Secrétaire...... M. BERSON.

Membres......... MM. LEGOUX,
SABATIER,
DESTREM,
STIELTJES,
FABRE,
COSSERAT,
DUBOIN,
MATHIAS,
PARAF,
BOUASSE.

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE TOULOUSE,

POUR LES

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES,

PUBLIÉES

PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES, DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE DE LA FACULTÉ,

SOUS LES AUSPICES

DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE ET DE LA MUNICIPALITÉ DE TOULOUSE,

AVEC LE CONCOURS

DU CONSEIL GÉNÉRAL DE LA HAUTE-GARONNE.

TOME VII. – ANNÉE 1893.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Grands-Augustins, 55.

—

1893

(Tous droits réservés.)

181057

STANFORD LIBRARY

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE.

FORMES

DES

INTÉGRALES ABÉLIENNES DES DIVERSES ESPÈCES,

PAR M. PAUL APPELL,

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris.

Dans la plupart des Traités, pour arriver à la forme classique des intégrales de première espèce relatives à une courbe algébrique donnée d'ordre m,

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

avec m directions asymptotiques distinctes dont aucune n'est parallèle aux axes, on décompose l'intégrale abélienne la plus générale en un groupe de termes, algébriques et transcendants, parmi lesquels se trouve un terme de la forme

$$\int \frac{Q(x, y)}{f'_y(x, y)} dx, \tag{2}$$

$Q(x, y)$ désignant un polynôme en x et y de degré $m - 3$. On laisse alors de côté tous les autres termes qui, pris isolément, deviennent chacun infini en certains points de la courbe, et l'on cherche à déterminer les coefficients du polynôme Q de façon que l'intégrale (2) soit partout finie. On obtient ainsi des intégrales de première espèce; mais il n'est pas évident qu'on les obtient toutes, car, pour le montrer, il faudrait établir qu'il est impossible

que, en ajoutant à une intégrale de la forme (2), devenant infinie en certains points, d'autres expressions rationnelles ou transcendantes choisies parmi celles qu'on a laissées de côté et devenant infinies aux mêmes points, on obtienne une somme partout finie.

Voici une méthode élémentaire permettant d'arriver directement à cette forme (2) et s'appliquant aussi à l'expression classique des intégrales de deuxième et de troisième espèce.

Intégrales de première espèce. — Soit

$$f(x,y) = a_0 y^m + a_1 y^{m-1} + \ldots + a_m = 0$$

le premier membre de l'équation de la courbe, où a_0 est une constante différente de zéro, a_i un polynôme en x de degré i. Il est évident que si

$$\int \varphi(x,y)\, dx$$

est une intégrale de première espèce, c'est-à-dire partout finie, la fonction rationnelle $\varphi(x,y)$ remplit les conditions suivantes :

1° Pour des valeurs infinies de x, $\varphi(x,y)$ est de l'ordre de $\frac{1}{x^2}$.

2° Si en un point x_0 à distance finie $\varphi(x,y)$ devient infinie, elle le devient d'un ordre *fractionnaire* par rapport à $\frac{1}{x-x_0}$; de sorte que x_0 est un point de ramification. La même propriété a lieu pour le produit $y^k \varphi(x,y)$, k étant un entier positif, car y ne devient pas infini pour des valeurs finies de x.

D'après cela, si l'on appelle $y_1, y_2, \ldots, y_m$ les m déterminations de y correspondant à une valeur de x, la somme

$$P_{k-2} = y_1^k \varphi(x,y_1) + y_2^k \varphi(x,y_2) + \ldots + y_m^k \varphi(x,y_m),$$

qui est une *fonction rationnelle* de x, *reste finie à distance finie*. En effet, chaque terme ne peut devenir infini à distance finie qu'en un point de ramification x_0, et cela d'un ordre fractionnaire : soit, par exemple,

$$\frac{\alpha_1}{(x-x_0)^{\frac{1}{n}}} + \frac{\alpha_2}{(x-x_0)^{\frac{2}{n}}} + \ldots + \frac{\alpha_{n-1}}{(x-x_0)^{\frac{n-1}{n}}}$$

la partie principale de $\varphi(x,y_1)$ au voisinage d'un point critique x_0 autour

duquel se permutent n valeurs de y. Dans la somme P_{k-2}, les termes d'ordre $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$ en $\frac{1}{x-x_0}$ disparaissent, car ils sont multipliés respectivement par les sommes des puissances semblables $1, 2, \ldots, n-1$ d'une racine $n^{\text{ième}}$ primitive de l'unité : cela est d'ailleurs évident, car une fonction rationnelle en x ne peut pas avoir d'infinis d'ordre fractionnaire. La somme P_{k-2}, étant une fonction rationnelle de x finie à distance finie, est un polynôme. Pour avoir le degré de ce polynôme, il suffit de voir de quel ordre est cette fonction par rapport à x quand x est infini : or, $\varphi(x,y)$ étant de l'ordre de $\frac{1}{x^2}$ et y^k de l'ordre de x^k, le polynôme P_{k-2} est de l'ordre de x^{k-2}. Donc, si k est égal à zéro ou à 1, cette somme est *identiquement nulle*, car un polynôme en x ne saurait être d'un ordre négatif pour x très grand. Si $k \geqq 2$, la somme est un polynôme de degré $k-2$. On a ainsi, en faisant $k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$, les relations

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} \varphi(x,y_1) + \varphi(x,y_2) + \ldots + \varphi(x,y_m) = 0, \\ y_1\,\varphi(x,y_1) + y_2\,\varphi(x,y_2) + \ldots + y_m\,\varphi(x,y_m) = 0, \\ y_1^2\,\varphi(x,y_1) + y_2^2\,\varphi(x,y_2) + \ldots + y_m^2\,\varphi(x,y_m) = P_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_1^{m-1}\varphi(x,y_1) + \ldots\ldots\ldots\ldots + y_m^{m-1}\varphi(x,y_m) = P_{m-3}. \end{array}\right.$$

Ces équations linéaires fournissent les m déterminations de $\varphi(x,y)$. Pour les résoudre, formons, par division, le polynôme en y

$$\frac{f(x,y)}{y-y_1} = b_0 y^{m-1} + b_1 y^{m-2} + \ldots + b_{m-1},$$

où $b_0 = a_0$, $b_1 = a_0 y_1 + a_1$, $b_2 = a_0 y_1^2 + a_1 y_1 + a_2$, $\ldots$, b_k étant un polynôme en x et y_1 de degré k. Le polynôme $\frac{f(x,y)}{y-y_1}$ s'annule pour $y = y_2, y_3, \ldots, y_m$; sa valeur, pour $y = y_1$, est $f'_{y_1}(x,y_1)$. Donc, en multipliant la première des équations (3) par b_{m-1}, la deuxième par b_{m-2}, $\ldots$, la dernière par b_0 et ajoutant, on aura l'équation

$$\varphi(x,y_1) f'_{y_1}(x,y_1) = Q(x,y_1),$$

où $Q(x,y_1)$ est un polynôme de degré $m-3$ en x et y_1

$$Q(x,y_1) = P_0 b_{m-3} + P_1 b_{m-2} + \ldots + P_{m-3} b_0.$$

La détermination $\varphi(x, y_2)$ s'obtiendra en remplaçant y_1 par y_2, ...; on a donc enfin, quelle que soit la valeur choisie de y,

$$\varphi(x, y) = \frac{Q(x, y)}{f'_y(x, y)}.$$

Intégrales de troisième espèce. — Soit

$$\int \varpi(x, y)\, dx$$

une intégrale de troisième espèce avec les deux pôles logarithmiques (x', y') et (x'', y''). Soit de plus $\delta(x, y) = ax + by + c = 0$ l'équation de la droite joignant les deux pôles. Considérons la somme

$$R_{k-1} = y_1^k \delta(x, y_1) \varpi(x, y_1) + y_2^k \delta(x, y_2) \varpi(x, y_2) + \ldots;$$

on voit, comme plus haut, que cette somme est un polynôme de degré $k - 1$ en x et est égale à zéro si k est nul. On en conclut

$$\delta(x, y) \varpi(x, y) = \frac{S(x, y)}{f'_y(x, y)},$$

$$\varpi(x, y) = \frac{1}{\delta(x, y)} \frac{S(x, y)}{f'_y(x, y)},$$

S étant un polynôme de degré $m - 2$.

Intégrales de deuxième espèce. — Une méthode toute semblable fournit la forme de l'expression d'une intégrale de deuxième espèce avec un pôle simple x', y',

$$Z = \int \psi(x, y)\, dx.$$

Il suffit pour cela de remplacer, dans le calcul précédent, la sécante $\delta(x, y)$ par la tangente

$$t(x, y) = x f'_{x'} + y f'_{y'} + f'_{z'}$$

au point (x', y') et de considérer les sommes

$$T_{k-1} = y_1^k t(x, y_1) \psi(x, y_1) + \ldots + y_m^k t(x, y_m) \psi(x, y_m)$$

qui sont des polynômes en x de degré $k - 1$, sauf dans le cas $k = 0$ où cette somme est identiquement nulle.

SUR LES LOIS GÉNÉRALES

DE

L'INDUCTION ÉLECTRODYNAMIQUE,

PAR M. P. DUHEM,

Chargé d'un Cours complémentaire de Physique mathématique et de Cristallographie
à la Faculté des Sciences de Lille.

INTRODUCTION.

En 1874, M. H. von Helmholtz [1] a donné des formules qui représentent les lois générales de l'induction électromagnétique entre conducteurs d'étendue finie en tout sens. Ces formules, l'illustre physicien les a posées presque sans aucune démonstration. Nous nous proposons, dans cet écrit, de les déduire d'hypothèses très simples sur les phénomènes d'induction. La méthode que nous suivrons est analogue à celle que nous avons adoptée, au Livre XIII de nos *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, pour étudier l'induction entre courants linéaires.

---

[1] H. Helmholtz, *Ueber die Theorie der Elektrodynamik*. IIIe Abhandlung : *Die elektrodynamischen Kräfte in bewegten Leitern* (*Borchardt's Journal*, t. LXXVIII, p. 309; 1874. *Helmholtz wissenschaftliche Abhandlungen*, t. I, p. 745).

CHAPITRE I.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES.

Soit $d\varpi$ un élément conducteur, que nous supposerons *isotrope*; soit ρ la résistance spécifique de la matière qui forme cet élément; soient u, v, w les composantes, suivant trois axes de coordonnées rectangulaires, du flux électrique en un point de cet élément. Lorsque l'élément en question fait partie d'un système de courants électriques uniformes, immobiles et constants, on a

$$\left\{\begin{aligned} \rho u &= -\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon V - \Theta) - \varphi_x, \\ \rho v &= -\frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon V - \Theta) - \varphi_y, \\ \rho w &= -\frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon V - \Theta) - \varphi_z, \end{aligned}\right.$$

ε étant la constante des lois de Coulomb;

V la fonction potentielle électrostatique;

Θ une quantité qui dépend de la matière qui forme le conducteur dans un très petit rayon autour du point (x, y, z);

φ_x, φ_y, φ_z trois quantités qui dépendent des phénomènes thermo-électriques et hydro-électriques dont l'élément est le siège, quantités que nous supposons déterminées par la théorie des courants thermo-électriques et hydro-électriques.

Lorsque l'élément $d\varpi$ fait partie d'un système de conducteurs mobiles, traversés par des courants variables, ces égalités ne sont plus exactes.

Tout d'abord, l'élément $d\varpi$, faisant maintenant partie d'un système variable, peut être déformable; quelle que soit la déformation infiniment petite que subit l'élément $d\varpi$ pendant le temps dt, on sait que l'on peut toujours trouver trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, invariablement liés à la matière qui forme l'élément $d\varpi$, qui demeurent rectangulaires pendant la déformation. Si, dans l'élément $d\varpi$, on découpe, avant la déformation, un cube dont les arêtes soient parallèles aux axes Ox, Oy,

Oz, il se transforme, par la déformation, en un parallélépipède rectangle dont les arêtes sont parallèles aux nouvelles positions des mêmes axes. La transformation infiniment petite de l'élément $d\varpi$ se compose de *trois translations*, respectivement parallèles aux axes Ox, Oy, Oz; de *trois rotations* autour des mêmes axes; enfin, de *trois dilatations* suivant ces axes.

Les axes en question sont les *axes principaux de dilatation* en un point de l'élément $d\varpi$.

Si l'élément $d\varpi$ ne se déforme pas, on pourra prendre pour axes principaux de dilatation en un point de cet élément trois droites rectangulaires quelconques invariablement liées à la matière qui forme cet élément.

Considérons donc un élément $d\varpi$ qui fasse partie d'un système de conducteurs mobiles, traversés par des courants variables.

Soient Ox, Oy, Oz les axes principaux de dilatation de l'élément $d\varpi$.

Les égalités (1), devenues inexactes, devront être remplacées par les égalités

$$(1\ bis)\qquad \begin{cases} \rho u = -\dfrac{\partial}{\partial x}(\varepsilon V + \Theta) + \varphi_x + \mathcal{E}_x, \\ \rho v = -\dfrac{\partial}{\partial y}(\varepsilon V + \Theta) + \varphi_y + \mathcal{E}_y, \\ \rho w = -\dfrac{\partial}{\partial z}(\varepsilon V + \Theta) + \varphi_z + \mathcal{E}_z, \end{cases}$$

$\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$ étant ce que nous nommerons les *composantes de la force électromotrice d'induction au point (x, y, z), à l'instant t.*

Ce sont ces quantités $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$ que nous allons chercher à déterminer en suivant une série d'hypothèses et de déductions analogues à celles qui nous ont fait connaître les lois de l'induction électrodynamique dans les conducteurs linéaires.

L'hypothèse fondamentale que nous ferons est la suivante :

Supposons que le système conducteur étudié soit formé par les éléments $d\varpi$, $d\varpi_1$, $d\varpi_2$, ...

Nous admettrons que l'on a

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathcal{E}_x\, dt = \delta l_1 + \delta l_2 + \ldots, \\ \mathcal{E}_y\, dt = \delta m_1 + \delta m_2 + \ldots, \\ \mathcal{E}_z\, dt = \delta n_1 + \delta n_2 + \ldots, \end{cases}$$

les quantités δl_k, δm_k, δn_k, dépendant uniquement des valeurs qu'ont, au

temps t, les paramètres qui définissent, au point de vue de l'Électrodynamique, l'état du système des deux éléments $d\varpi$, $d\varpi_1$, et des variations que ces paramètres subissent pendant le temps dt.

Quels sont ces paramètres?

Soient $O_1x'_1$, $O_1y'_1$, $O_1z'_1$ les axes principaux de dilatation de l'élément $d\varpi_1$. Nous dirons que le système formé par les deux éléments $d\varpi$, $d\varpi_1$ est *défini au point de vue de l'Électrodynamique,* lorsqu'on connaîtra :

1° Le volume $d\varpi$;

2° Les paramètres α, β, ... qui déterminent la forme de la surface qui le limite;

3° Les composantes u, v, w, suivant Ox, Oy, Oz, du flux électrique en un point de l'élément $d\varpi$;

4° Le volume $d\varpi_1$;

5° Les paramètres α_1, β_1, ... qui déterminent la forme de la surface qui la limite;

6° Les composantes u'_1, v'_1, w'_1, suivant $O_1x'_1$, $O_1y'_1$, $O_1z'_1$, du flux électrique en un point de l'élément $d\varpi_1$;

7° La distance r d'un point O de l'élément $d\varpi$ à un point O_1 de l'élément $d\varpi_1$;

8° Les angles (r,x), (r,y), (r,z) que la droite OO_1 fait avec les axes Ox, Oy, Oz, angles dont deux seulement sont arbitraires, grâce à la relation

$$\cos^2(r,x)+\cos^2(r,y)+\cos^2(r,z)=1;$$

9° Les neuf cosinus

$$\begin{array}{lll}\cos(x'_1,x), & \cos(x'_1,y), & \cos(x'_1,z),\\ \cos(y'_1,x), & \cos(y'_1,y), & \cos(y'_1,z),\\ \cos(z'_1,x), & \cos(z'_1,y), & \cos(z'_1,z),\end{array}$$

dont trois seulement sont arbitraires, grâce aux relations

$$\begin{gathered}\cos^2(x'_1,x)+\cos^2(x'_1,y)+\cos^2(x'_1,z)=1,\\ \cos^2(y'_1,x)+\cos^2(y'_1,y)+\cos^2(y'_1,z)=1,\\ \cos^2(z'_1,x)+\cos^2(z'_1,y)+\cos^2(z'_1,z)=1,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\cos(y'_1,x)\cos(z'_1,x)+\cos(y'_1,y)\cos(z'_1,y)+\cos(y'_1,z)\cos(z'_1,z)=0,\\ \cos(z'_1,x)\cos(x'_1,x)+\cos(z'_1,y)\cos(x'_1,y)+\cos(z'_1,z)\cos(x'_1,z)=0,\\ \cos(x'_1,x)\cos(y'_1,x)+\cos(x'_1,y)\cos(y'_1,y)+\cos(x'_1,z)\cos(y'_1,z)=0.\end{gathered}$$

Nous admettons donc que δl_1, δm_1, δn_1 dépendent uniquement des paramètres que nous venons d'énumérer et des variations que ces paramètres éprouvent pendant le temps dt.

De plus, il est évident :

1° Que, *si l'élément* $d\varpi_1$ *est invariable de forme,* chacune des quantités δl_1, δm_1, δn_1 doit garder une valeur indépendante de l'orientation initiale des axes O_1x_1', O_1y_1', O_1z_1' au sein de l'élément $d\varpi_1$;

2° Que, *si l'élément* $d\varpi$ *est invariable de forme,* la grandeur géométrique dont δl_1, δm_1, δn_1 sont les composantes est indépendante, en grandeur et direction, de l'orientation initiale des axes Ox, Oy, Oz au sein de l'élément $d\varpi$.

Ces principes vont nous servir à déterminer la forme des quantités δl_1, δm_1, δn_1.

I. La première proposition que nous démontrerons, au sujet de ces quantités, est la suivante :

Les trois quantités δl_1, δm_1, δn_1 *sont des fonctions linéaires et homogènes des variations subies pendant le temps dt par les paramètres indépendants qui définissent le système des deux éléments* $d\varpi$ *et* $d\varpi_1$.

Soient a, b, ..., l ces paramètres indépendants; pour la proposition que nous avons en vue de démontrer, il est inutile de les désigner plus explicitement. Pendant le temps dt, ces paramètres subissent des variations da, db, ..., dl, et l'on a

$$\begin{aligned}
\delta l_1 &= f(a, b, \ldots, l, da, db, \ldots, dl),\\
\delta m_1 &= g(a, b, \ldots, l, da, db, \ldots, dl),\\
\delta n_1 &= h(a, b, \ldots, l, da, db, \ldots, dl).
\end{aligned}$$

Si ρ est la résistance spécifique de l'élément $d\varpi$ et U, V, W les composantes du flux qu'engendrerait, en un point de cet élément, l'induction de l'élément $d\varpi_1$, nous aurons

$$\begin{aligned}
\rho U\, dt &= f(a, b, \ldots, l, da, db, \ldots, dl),\\
\rho V\, dt &= g(a, b, \ldots, l, da, db, \ldots, dl),\\
\rho W\, dt &= h(a, b, \ldots, l, da, db, \ldots, dl).
\end{aligned}$$

Traçons une surface plane AB, d'aire Ω, invariablement liée aux axes Ox, Oy, Oz et partageant en deux l'élément $d\varpi$. Soit N la direction de la nor-

male à la face positive de cette surface. Dans le temps dt, l'induction exercée par l'élément $d\varpi_1$ transporte du côté négatif au côté positif de cette surface une quantité d'électricité

$$dQ = \Omega[\mathrm{U}\cos(\mathrm{N},x) + \mathrm{V}\cos(\mathrm{N},y) + \mathrm{W}\cos(\mathrm{N},z)]\,dt$$

ou bien

$$\begin{aligned} dQ = \frac{\Omega}{\rho}[\; & f(a, b, \ldots, l, da, db, \ldots, dl)\cos(\mathrm{N},x) \\ & + g(a, b, \ldots, l, da, db, \ldots, dl)\cos(\mathrm{N},y) \\ & + h(a, b, \ldots, l, da, db, \ldots, dl)\cos(\mathrm{N},z)]. \end{aligned}$$

A la suite de l'élément de temps dt, prenons un second élément de temps $\mathrm{D}t$, pendant lequel les paramètres a, b, ..., l subissent de nouvelles variations $\mathrm{D}a$, $\mathrm{D}b$, ..., $\mathrm{D}l$. La déformation que l'élément $d\varpi$ a subie pendant le temps dt a fait prendre à sa résistance spécifique une nouvelle valeur $(\rho + d\rho)$ et à la surface AB une nouvelle aire $(\Omega + d\Omega)$.

Nous supposerons que les axes principaux de dilatation pendant le temps dt soient encore axes principaux de dilatation pendant le temps $\mathrm{D}t$. Pendant le temps $\mathrm{D}t$ et par l'effet de l'induction due à l'élément $d\varpi_1$, la surface AB est traversée par une quantité d'électricité

$$\begin{aligned} \mathrm{D}Q = \frac{\Omega + d\Omega}{\rho + d\rho}[\; & f(a + da, b + db, \ldots, l + dl, \mathrm{D}a, \mathrm{D}b, \ldots, \mathrm{D}l)\cos(\mathrm{N},x) \\ & + g(a + da, b + db, \ldots, l + dl, \mathrm{D}a, \mathrm{D}b, \ldots, \mathrm{D}l)\cos(\mathrm{N},y) \\ & + h(a + da, b + db, \ldots, l + dl, \mathrm{D}a, \mathrm{D}b, \ldots, \mathrm{D}l)\cos(\mathrm{N},z)]. \end{aligned}$$

Considérons maintenant l'élément de temps

$$\Delta t = dt + \mathrm{D}t.$$

Pendant ce temps, les paramètres a, b, ..., l subissent des variations $(da + \mathrm{D}a)$, $(db + \mathrm{D}b)$, ..., $(dl + \mathrm{D}l)$. L'induction exercée par l'élément $d\varpi_1$ met en mouvement, au travers de la surface AB, une quantité d'électricité

$$\begin{aligned} \Delta Q = \frac{\Omega}{\rho}[\; & f(a, b, \ldots, l, da + \mathrm{D}a, db + \mathrm{D}b, \ldots, dl + \mathrm{D}l)\cos(\mathrm{N},x) \\ & + g(a, b, \ldots, l, da + \mathrm{D}a, db + \mathrm{D}b, \ldots, dl + \mathrm{D}l)\cos(\mathrm{N},y) \\ & + h(a, b, \ldots, l, da + \mathrm{D}a, db + \mathrm{D}b, \ldots, dl + \mathrm{D}l)\cos(\mathrm{N},z)]. \end{aligned}$$

Or on a évidemment

$$\Delta Q = dQ + \mathrm{D}Q.$$

Si, dans cette égalité, on remplace chacune des trois quantités dQ, DQ, ΔQ par sa valeur et si l'on néglige les infiniment petits d'ordre supérieur, on trouve l'égalité

$$\begin{aligned}
&[\ f(a, b, \ldots, l, \quad da, \quad db, \ldots, \quad dl) \\
&\quad + f(a, b, \ldots, l, \quad \mathrm{D}a, \quad \mathrm{D}b, \ldots, \quad \mathrm{D}l) \\
&\quad - f(a, b, \ldots, l, da + \mathrm{D}a, db + \mathrm{D}b, \ldots, dl + \mathrm{D}l)] \cos(\mathrm{N}, x) \\
&+ [\ g(a, b, \ldots, l, \quad da, \quad db, \ldots, \quad dl) \\
&\quad + g(a, b, \ldots, l, \quad \mathrm{D}a, \quad \mathrm{D}b, \ldots, \quad \mathrm{D}l) \\
&\quad - g(a, b, \ldots, l, da + \mathrm{D}a, db + \mathrm{D}b, \ldots, dl + \mathrm{D}l)] \cos(\mathrm{N}, y) \\
&+ [\ h(a, b, \ldots, l, \quad da, \quad db, \ldots, \quad dl) \\
&\quad + h(a, b, \ldots, l, \quad \mathrm{D}a, \quad \mathrm{D}b, \ldots, \quad \mathrm{D}l) \\
&\quad - h(a, b, \ldots, l, da + \mathrm{D}a, db + \mathrm{D}b, \ldots, dl + \mathrm{D}l)] \cos(\mathrm{N}, z) = 0.
\end{aligned}$$

Cette égalité doit demeurer vraie de quelque manière qu'on oriente la surface plane AB; si nous faisons

$$\cos(\mathrm{N}, x) = 1, \qquad \cos(\mathrm{N}, y) = 0, \qquad \cos(\mathrm{N}, z) = 0,$$

nous aurons la première des égalités

$$\begin{aligned}
&f(a, b, \ldots, l, da, db, \ldots, dl) + f(a, b, \ldots, l, \mathrm{D}a, \mathrm{D}b, \ldots, \mathrm{D}l) \\
&\quad = f(a, b, \ldots, l, da + \mathrm{D}a, db + \mathrm{D}b, \ldots, dl + \mathrm{D}l),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&g(a, b, \ldots, l, da, db, \ldots, dl) + g(a, b, \ldots, l, \mathrm{D}a, \mathrm{D}b, \ldots, \mathrm{D}l) \\
&\quad = g(a, b, \ldots, l, da + \mathrm{D}a, db + \mathrm{D}b, \ldots, dl + \mathrm{D}l),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&h(a, b, \ldots, l, da, db, \ldots, dl) + h(a, b, \ldots, l, \mathrm{D}a, \mathrm{D}b, \ldots, \mathrm{D}l) \\
&\quad = h(a, b, \ldots, l, da + \mathrm{D}a, db + \mathrm{D}b, \ldots, dl + \mathrm{D}l);
\end{aligned}$$

les deux dernières se démontrent d'une manière analogue.

Ces égalités démontrent la proposition que nous avons énoncée.

II. Cette proposition établie, arrivons à celle-ci :

Les trois quantités δl_1, δm_1, δn_1 sont fonctions linéaires et homogènes des quatre quantités $d\varpi_1$, $\delta\lambda_1\, d\varpi_1$, $\delta\mu_1\, d\varpi_1$, $\delta\nu_1\, d\varpi_1$; $\delta\lambda_1$, $\delta\mu_1$, $\delta\nu_1$ étant les trois dilatations principales en un point de l'élément $d\varpi_1$; elles ne dépendent pas des autres paramètres qui fixent la forme de l'élément $d\varpi_1$, non plus que des variations de ces paramètres.

Découpons l'élément $d\varpi_1$ en un nombre illimité n de cubes $d\varpi'_1$,

$d\varpi_1''$, ..., $d\varpi_1^{(n)}$, dont les dimensions soient infiniment petites par rapport à celles de l'élément $d\varpi_1$; qui soient tous égaux entre eux et égaux à un même cube infiniment petit, *choisi une fois pour toutes;* qui aient tous leurs arêtes parallèles aux axes O_1x_1', O_1y_1', O_1z_1'.

Si nous considérons l'un des paramètres qui définissent le système $d\varpi_1^{(i)}d\varpi$ et le paramètre correspondant qui figure dans la définition du système $d\varpi_1^{(j)}d\varpi$, ces deux paramètres ne diffèrent que d'une quantité infiniment petite par rapport à leur propre valeur; dans le temps dt, ces deux paramètres éprouvent des variations qui ne diffèrent que d'une quantité infiniment petite par rapport à leur propre valeur. Si donc l'on désigne par $\delta l_1^{(i)}$, $\delta l_1^{(j)}$ les quantités analogues à δl_1, qui sont relatives à l'induction des éléments $d\varpi_1^{(i)}$, $d\varpi_1^{(j)}$ sur l'élément $d\varpi$, ces quantités auront une différence infiniment petite par rapport à elles-mêmes, en sorte que l'on peut écrire

$$\delta l_1' = \delta l_1'' = \ldots = \delta l_1^{(n)}.$$

Mais, d'autre part, de l'hypothèse marquée par les égalités (2), on déduit aisément que l'on doit avoir

$$\delta l_1 = \delta l_1' + \delta l'' + \ldots + \delta l_1^{(n)}.$$

On a donc

$$\delta l_1 = n\,\delta l_1' = \delta l_1' \frac{d\varpi_1}{d\varpi_1'}. \tag{3}$$

Cherchons maintenant quelle doit être la forme de $\delta l_1'$.

Parmi les paramètres qui définissent le système $d\varpi\, d\varpi_1'$, nous n'avons plus à faire figurer aucune variable propre à représenter la forme ou le volume de l'élément $d\varpi_1'$, puisque nous savons que celui-ci est un petit cube, *choisi une fois pour toutes,* dont les arêtes sont parallèles à O_1x_1', O_1y_1', O_1z_1'.

Le volume et la forme de l'élément $d\varpi_1'$ sont ainsi complètement définis.

Pour achever la définition du système $d\varpi\, d\varpi_1'$, il suffit de se donner, outre les paramètres qui déterminent le volume et la forme de l'élément $d\varpi$, les grandeurs

$$u,\quad v,\quad w,\quad u_1',\quad v_1',\quad w_1',$$
$$r,\quad \cos(r,x),\quad \cos(r,y),\quad \cos(r,z),$$
$$\cos(x_1',x),\quad \ldots,\quad \cos(z_1',z).$$

Ces paramètres, *qui diffèrent infiniment peu de ceux qui servent à définir le système* $d\varpi\, d\varpi_1$, seront, pour plus de brièveté, désignés par $a, b, \ldots, k$.

Pour définir la variation que le système $d\varpi\, d\varpi'_1$ subit pendant le temps dt, il suffit de connaître, d'une part, les variations $\delta a, \delta b, \ldots, \delta k$, et, d'autre part, le changement de forme de l'élément $d\varpi'_1$; or ce dernier changement est entièrement défini par la connaissance des trois dilatations principales $\delta\lambda_1, \delta\mu_1, \delta\nu_1$. Si donc nous appliquons la proposition démontrée au n° I, nous pourrons écrire

$$\delta l'_1 = \mathrm{A}'\,\delta a + \mathrm{B}'\,\delta b + \ldots + \mathrm{K}'\,\delta k + \mathrm{L}'\,\delta\lambda_1 + \mathrm{M}'\,\delta\mu_1 + \mathrm{N}'\,\delta\nu_1,$$

$\mathrm{A}', \mathrm{B}', \ldots, \mathrm{K}', \mathrm{L}', \mathrm{M}', \mathrm{N}'$ devenant, lorsque le cube type est choisi, des fonctions des seules variables $a, b, \ldots, k$. Il en est de même des quantités

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{A}'}{d\varpi'_1}, \qquad \mathrm{B} = \frac{\mathrm{B}'}{d\varpi'_1}, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{K} = \frac{\mathrm{K}'}{d\varpi'_1},$$
$$\mathrm{L} = \frac{\mathrm{L}'}{d\varpi'_1}, \qquad \mathrm{M} = \frac{\mathrm{M}'}{d\varpi'_1}, \qquad \mathrm{N} = \frac{\mathrm{N}'}{d\varpi'_1},$$

moyennant lesquelles l'égalité précédente, jointe à l'égalité (3), donne

$$(4)\quad \delta l_1 = (\mathrm{A}\,\delta a + \mathrm{B}\,\delta b + \ldots + \mathrm{K}\,\delta k)\,d\varpi_1 + \mathrm{L}\,\delta\lambda_1\,d\varpi_1 + \mathrm{M}\,\delta\mu_1\,d\varpi_1 + \mathrm{N}\,\delta\nu_1\,d\varpi_1,$$

ce qui démontre la proposition énoncée, du moins en ce qui concerne la quantité δl_1; une démonstration analogue s'applique aux quantités δm_1, δn_1.

III. Voici une nouvelle proposition, analogue à la précédente :

Les quantités $\delta l_1, \delta m_1, \delta n_1$ *sont des fonctions linéaires des trois dilatations principales* $\delta\lambda, \delta\mu, \delta\nu$ *en un point de l'élément* $d\varpi$; *elles ne dépendent ni du volume* $d\varpi$, *ni de la forme de la surface qui limite cet élément.*

Partageons l'élément $d\varpi$ en un nombre illimité n de cubes $d\varpi', d\varpi'', \ldots, d\varpi^{(n)}$; ayant tous leurs dimensions infiniment petites par rapport à celles de l'élément $d\varpi$; tous égaux entre eux et égaux à un même cube, *choisi une fois pour toutes;* ayant tous leurs arêtes respectivement parallèles aux axes Ox, Oy, Oz.

Les paramètres qui définissent le système $d\varpi_1\, d\varpi^{(i)}$ et ceux qui définissent le système $d\varpi_1\, d\varpi^{(j)}$ ne diffèrent les uns des autres que de quan-

tités infiniment petites par rapport à eux-mêmes; les vari… paramètres sont les mêmes pour les deux systèmes, aux inf… d'ordre supérieur près. Si nous supposons que la résistanc… la même en tout point de l'élément $d\varpi$, nous voyons q… l'élément $d\varpi_1$ engendrera sensiblement le même flux éle… en un point de l'élément $d\varpi^{(i)}$ et en un point de l'éléme… flux électrique que l'induction de l'élément $d\varpi_1$ enger… conque de l'élément $d\varpi$.

La quantité $\rho U\,dt$ aura donc la même valeur… élément induit l'élément $d\varpi$, ou que l'on prenne… $d\varpi''$, …, $d\varpi^{(n)}$, l'élément $d\varpi'$ par exemple.

Or, dans le premier cas, la quantité $\rho U\,dt$ … tité δl_1 dont nous voulons déterminer la fo… représente la quantité $\delta l'_1$ qui est, pour le… quantité δl_1. On a donc

(5) $\delta l_1 = \ldots$

Déterminons la forme de la quantité…

Parmi les paramètres qui défini… plus à faire figurer aucune grand… volume de l'élément $d\varpi'$, puisq… *choisi une fois pour toutes*, do… Le volume et la forme de l'élé…

Pour achever la définition…

1° Les paramètres qui … ment $d\varpi_1$;

2° Les grandeurs …

Pour abréger, no… *les mêmes pour l*… b', …, k'.

Pour définir … temps dt, il s… $\delta k'$, et, d'aut…



dernier changement est complètement défini par la connaissance des trois dilatations principales $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ en un point de l'élément $d\varpi'$ ou de l'élément $d\varpi$. Si donc nous faisons usage de la proposition démontrée au n° I, nous pourrons écrire

$$\delta l'_1 = A'\,\delta a' + B'\,\delta b' + \ldots + K'\,\delta k' + L'\,\delta\lambda + M'\,\delta\mu + N'\,\delta\nu,$$

A′, B′, ..., K′, L′, M′, N′ dépendant uniquement du cube normal $d\varpi'$ et des variables a', b', ..., k'.

L'égalité (5) donne alors

$$(6)\qquad \delta l_1 = A'\,\delta a' + B'\,\delta b' + \ldots + K'\,\delta k' + L'\,\delta\lambda + M'\,\delta\mu + N'\,\delta\nu.$$

Les quantités A′, B′, ..., K′, L′, M′, N′ étant indépendantes du volume et de la forme de l'élément $d\varpi$, l'égalité (6) démontre la proposition énoncée, du moins en ce qui concerne la quantité δl_1; une démonstration analogue s'applique aux quantités δm_1 et δn_1.

Si nous réunissons les résultats exprimés par les égalités (4) et (6), nous voyons que l'on peut écrire

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \delta l_1 = (&\mathcal{A}\,\delta\alpha + \mathcal{B}\,\delta\beta + \ldots + \mathcal{C}\,\delta\gamma \\ &+ \mathcal{L}\,\delta\lambda + \mathcal{M}\,\delta\mu + \mathcal{N}\,\delta\nu + \mathcal{L}_1\,\delta\lambda_1 + \mathcal{M}_1\,\delta\mu_1 + \mathcal{N}_1\,\delta\nu_1)\,d\varpi_1, \end{aligned}\right.$$

les quantités

$$\mathcal{A},\quad \mathcal{B},\quad \ldots,\quad \mathcal{C},$$
$$\mathcal{L},\quad \mathcal{M},\quad \mathcal{N},\quad \mathcal{L}_1,\quad \mathcal{M}_1,\quad \mathcal{N}_1$$

dépendant des seules variables α, β, ..., γ, qui désignent abréviativement les variables

$$u,\quad v,\quad w,\quad u'_1,\quad v'_1,\quad w'_1,$$
$$r,\quad \cos(r, x),\quad \cos(r, y),\quad \cos(r, z),$$
$$\cos(x'_1, x),\quad \ldots,\quad \cos(z'_1, z).$$

Pour δm_1 et δn_1, on peut écrire des égalités analogues à l'égalité (7).

IV. Nous allons maintenant déterminer de quelle manière les quantités δl_1, δm_1, δn_1 dépendent de

$$u'_1,\quad v'_1,\quad w'_1,\quad \delta u'_1,\quad \delta v'_1,\quad \delta w'_1,$$

et, pour y parvenir, nous allons nous appuyer sur une *hypothèse* nouvelle.

Imaginons un conducteur cylindrique, de section extrêmement petite,

traversé par un courant quelconque. Ce conducteur peut n'être pas homogène et la nature de la substance qui le forme peut même varier d'un point à l'autre d'une manière discontinue; par exemple, il peut être formé par une corde dont les torons sont les uns de cuivre, les autres de laiton, les autres de maillechort, etc. De même, les composantes du flux électrique peuvent varier d'une manière continue ou discontinue d'un point à l'autre de la section droite de ce cylindre.

Soient Ω_1 une section droite de ce conducteur, menée par un point P, et $d\Omega_1$ un élément de cette section.

Si l'on considère, dans le conducteur cylindrique dont il s'agit, un segment de hauteur ds compris entre deux sections droites infiniment voisines, on admet que ce segment exercera les mêmes actions qu'un segment de même grandeur, de même forme, dans lequel le flux électrique, uniformément distribué aux divers points de la surface Ω_1, aurait pour composantes, en chaque point de cette surface,

$$\varphi'_1 = \frac{1}{\Omega_1} \mathbf{S} u'_1 \, d\Omega_1, \qquad \psi'_1 = \frac{1}{\Omega_1} \mathbf{S} v'_1 \, d\Omega_1, \qquad \chi'_1 = \frac{1}{\Omega_1} \mathbf{S} w'_1 \, d\Omega_1.$$

Cette hypothèse va nous permettre de démontrer la proposition suivante :

Les quantités δl_1, δm_1, δn_1 sont fonctions linéaires et homogènes des six variables

$$u'_1, \quad v'_1, \quad w'_1, \quad \delta u'_1, \quad \delta v'_1, \quad \delta w'_1.$$

Nous pouvons, sans altérer l'expression de δl_1, supposer que l'élément $d\varpi_1$ a la forme d'un prisme droit à base rectangle et que les arêtes de ce prisme sont en même temps les axes principaux de dilatation $O_1 x'_1$, $O_1 y'_1$, $O_1 z'_1$. Soit α la hauteur de ce prisme, dirigée suivant $O_1 x'_1$. Soient β_1, γ_1 ses arêtes de bases, dirigées respectivement suivant $O_1 y'_1$ et $O_1 z'_1$.

La base de ce prisme sera

$$d\Omega_1 = \beta_1 \gamma_1.$$

Le volume de ce prisme sera

$$d\varpi_1 = \alpha_1 \, d\Omega_1.$$

Les trois dilatations principales seront

$$\delta\lambda_1 = \frac{\delta\alpha_1}{\alpha_1}, \qquad \delta\mu_1 = \frac{\delta\beta_1}{\beta_1}, \qquad \delta\nu_1 = \frac{\delta\gamma_1}{\gamma_1}.$$

Pour le système de cet élément inducteur $d\varpi_1$ et d'un élément induit quelconque $d\varpi$, nous aurons

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \delta l_1 = [\; & A_1(u'_1, v'_1, w'_1)\,\delta a + B_1(u'_1, v'_1, w'_1)\,\delta b + \ldots + K_1(u'_1, v'_1, w'_1)\,\delta k \\ & + L_1(u'_1, v'_1, w'_1)\,\delta\lambda_1 + M_1(u'_1, v'_1, w'_1)\,\delta\mu_1 \quad + N_1(u'_1, v'_1, w'_1)\,\delta\nu_1 \\ & + U_1(u'_1, v'_1, w'_1)\,\delta u'_1 + V_1(u'_1, v'_1, w'_1)\,\delta v'_1 \quad + W_1(u'_1, v'_1, w'_1)\,\delta w'_1]\,\alpha_1\, d\Omega_1. \end{aligned}\right.$$

Les lettres a, b, ..., k désignent les paramètres qui dépendent du seul élément $d\varpi$, et aussi ceux qui fixent la position relative des deux systèmes d'axes Ox, Oy, Oz, $O_1x'_1$, $O_1y'_1$, $O_1z'_1$. Les fonctions où nous n'avons mis en évidence que les seules variables u'_1, v'_1, w'_1 peuvent dépendre aussi des variables a, b, ..., k.

Mettons côte à côte un certain nombre d'éléments analogues à $d\varpi_1$, dans lesquels les dilatations principales aient toutes la même grandeur et la même direction que dans $d\varpi_1$. Leur ensemble constituera un élément cylindrique, de base

$$\Omega_1 = \mathbf{S}\, d\Omega_1,$$

de longueur α_1, pour lequel les quantités

$$a,\quad b,\quad \ldots,\quad k,\quad \delta a,\quad \delta b,\quad \ldots,\quad \delta k,\quad \delta\lambda_1,\quad \delta\mu_1,\quad \delta\nu_1$$

auront exactement ou sensiblement la même valeur que pour chacun des éléments $d\varpi_1$.

D'après l'hypothèse exprimée par la première égalité (2), ce faisceau d'éléments exerce la même action inductrice qu'un élément unique $d\Pi_1$ pour lequel la quantité analogue à δl_1 aurait une valeur

$$(9)\qquad \delta\mathfrak{L}_1 = \sum \delta l_1.$$

D'autre part, d'après l'hypothèse précédente, il est équivalent à un élément unique pour lequel les quantités a, b, ..., k auraient les mêmes valeurs que pour l'un quelconque des éléments $d\varpi_1$, et au sein duquel le flux aurait pour composantes

$$(10)\qquad \varphi'_1 = \frac{1}{\Omega_1}\mathbf{S}\, u'_1\, d\Omega_1, \qquad \psi'_1 = \frac{1}{\Omega_1}\mathbf{S}\, v'_1\, d\Omega_1, \qquad \chi'_1 = \frac{1}{\Omega_1}\mathbf{S}\, w'_1\, d\Omega_1.$$

On doit donc avoir

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \delta\zeta_1 = [\ & A_1(\varphi'_1, \psi'_1, \chi'_1)\,\delta a + B_1(\varphi'_1, \psi'_1, \chi'_1)\,\delta b + \ldots + K_1(\varphi'_1, \psi'_1, \chi'_1)\,\delta k \\ & + L_1(\varphi'_1, \psi'_1, \chi'_1)\,\delta\lambda_1 + M_1(\varphi'_1, \psi'_1, \chi'_1)\,\delta\mu_1 \quad + N_1(\varphi'_1, \psi'_1, \chi'_1)\,\delta\nu_1 \\ & + U_1(\varphi'_1, \psi'_1, \chi'_1)\,\delta\varphi'_1 + V_1(\varphi'_1, \psi'_1, \chi'_1)\,\delta\psi'_1 \quad + W_1(\varphi'_1, \psi'_1, \chi'_1)\,\delta\chi'_1]\,\alpha_1\Omega_1. \end{aligned}\right.$$

Calculons les quantités $\delta\varphi'_1$, $\delta\psi'_1$, $\delta\chi'_1$; nous aurons

$$\delta\varphi'_1 = \frac{1}{\Omega_1}\mathbf{S}(u'_1\,\delta d\Omega_1 + \delta u'_1\,d\Omega_1) - \frac{1}{\Omega_1^2}\mathbf{S}u'_1\,d\Omega_1\,\mathbf{S}\,\delta d\Omega_1.$$

Mais

$$\delta d\Omega_1 = (\delta\mu_1 + \delta\nu_1)\,d\Omega_1$$

et

$$\mathbf{S}\,\delta d\Omega_1 = (\delta\mu_1 + \delta\nu_1)\,\mathbf{S}\,d\Omega_1 ;$$

on a donc

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} & \delta\varphi'_1 = \frac{1}{\Omega_1}\mathbf{S}\,\delta u'_1\,d\Omega_1 \\ & \text{et de même} \\ & \delta\psi'_1 = \frac{1}{\Omega_1}\mathbf{S}\,\delta v'_1\,d\Omega_1, \\ & \delta\chi'_1 = \frac{1}{\Omega_1}\mathbf{S}\,\delta w'_1\,d\Omega_1. \end{aligned}\right.$$

Les égalités (10), (11) et (12) nous donnent l'expression de $\delta\zeta_1$.

L'égalité (8), qui fait connaître δl_1, peut s'écrire

$$\begin{aligned} \delta l_1 = \Bigg[& A_1\left(\frac{u'_1\,d\Omega_1}{d\Omega_1}, \frac{v'_1\,d\Omega_1}{d\Omega_1}, \frac{w'_1\,d\Omega_1}{d\Omega_1}\right)\delta a + \ldots \\ & + W_1\left(\frac{u'_1\,d\Omega_1}{d\Omega_1}, \frac{v'_1\,d\Omega_1}{d\Omega_1}, \frac{w'_1\,d\Omega_1}{d\Omega_1}\right)\delta w'_1\Bigg]\,\alpha_1\,d\Omega_1. \end{aligned}$$

Remplaçons les deux membres de l'égalité (9) par les expressions que nous venons d'obtenir et identifions les termes qui, dans les deux membres, dépendent des mêmes variations; nous obtiendrons deux types d'identités :

1° Les fonctions A_1, B_1, ..., K_1, L_1, M_1, N_1 vérifieront des identités du type suivant

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} & \mathbf{S}A_1\left(\frac{u'_1\,d\Omega_1}{d\Omega_1}, \frac{v'_1\,d\Omega_1}{d\Omega_1}, \frac{w'_1\,d\Omega_1}{d\Omega_1}\right)d\Omega_1 \\ & \quad = A_1\left(\frac{\mathbf{S}u'_1\,d\Omega_1}{\mathbf{S}d\Omega_1}, \frac{\mathbf{S}v'_1\,d\Omega_1}{\mathbf{S}d\Omega_1}, \frac{\mathbf{S}w'_1\,d\Omega_1}{\mathbf{S}d\Omega_1}\right)\mathbf{S}\,d\Omega_1 ; \end{aligned}\right.$$

2° Les fonctions U_1, V_1, W_1 vérifient des identités du type suivant

$$(14)\quad \left\{ \begin{aligned} &\mathbf{S}\, U_1\left(\frac{u'_1\, d\Omega_1}{d\Omega_1}, \frac{v'_1\, d\Omega_1}{d\Omega_1}, \frac{w'_1\, d\Omega_1}{d\Omega_1}\right)\delta u'_1\, d\Omega_1 \\ &\quad = U_1\left(\frac{\mathbf{S}\, u'_1\, d\Omega_1}{\mathbf{S}\, d\Omega_1}, \frac{\mathbf{S}\, v'_1\, d\Omega_1}{\mathbf{S}\, d\Omega_1}, \frac{\mathbf{S}\, w'_1\, d\Omega_1}{\mathbf{S}\, d\Omega_1}\right)\mathbf{S}\, \delta u'_1\, d\Omega_1. \end{aligned}\right.$$

Les égalités du type (13) nous enseignent que les fonctions

$$\begin{gathered} A_1(u'_1, v'_1, w'_1)\, d\Omega_1, \\ B_1(u'_1, v'_1, w'_1)\, d\Omega_1, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ K_1(u'_1, v'_1, w'_1)\, d\Omega_1, \\ L_1(u'_1, v'_1, w'_1)\, d\Omega_1, \\ M_1(u'_1, v'_1, w'_1)\, d\Omega_1, \\ N_1(u'_1, v'_1, w'_1)\, d\Omega_1 \end{gathered}$$

sont des fonctions linéaires et homogènes des quatre quantités

$$u'_1\, d\Omega_1, \quad v'_1\, d\Omega_1, \quad w'_1\, d\Omega_1, \quad d\Omega_1.$$

D'ailleurs δl_1 ne peut contenir aucun terme indépendant de u'_1, v'_1, w'_1, $\delta u'_1$, $\delta v'_1$, $\delta w'_1$, car, si l'élément $d\varpi_1$ ne renferme aucun courant pendant toute la durée du temps dt, il ne pourra donner lieu à aucune induction en l'élément $d\varpi$. Donc les quantités

$$A_1, \quad B_1, \quad \dots, \quad K_1, \quad L_1, \quad M_1, \quad N_1$$

sont des fonctions linéaires et homogènes de u'_1, v'_1, w'_1.

Les égalités du type (14) montrent que les quantités

$$\begin{gathered} U_1\,(u'_1, v'_1, w'_1)\, \delta u'_1\, d\Omega_1, \\ V_1\,(u'_1, v'_1, w'_1)\, \delta v'_1\, d\Omega_1, \\ W_1(u'_1, v'_1, w'_1)\, \delta w'_1\, d\Omega_1 \end{gathered}$$

sont des fonctions linéaires et homogènes des sept quantités

$$\begin{gathered} u'_1\, d\Omega_1, \quad v'_1\, d\Omega_1, \quad w'_1\, d\Omega_1, \\ \delta u'_1\, d\Omega_1, \quad \delta v'_1\, d\Omega_1, \quad \delta w'_1\, d\Omega_1, \\ d\Omega_1. \end{gathered}$$

Il faut et il suffit pour cela que les quantités U_1, V_1, W_1 soient indépendantes de u'_1, v'_1, w'_1.

Nous avons donc, comme nous l'avions annoncé,

$$\delta l_1 = [A_1\,\delta a + B_1\,\delta b + \ldots + K_1\,\delta k + L_1\,\delta\lambda_1 + M_1\,\delta\mu_1 + N_1\,\delta\nu_1 \\ + U_1\,\delta u'_1 + V_1\,\delta v'_1 + W_1\,\delta w'_1]\,d\varpi_1,$$

$A_1, B_1, \ldots, K_1, L_1, M_1, N_1$ étant des fonctions linéaires et homogènes des variables u'_1, v'_1, w'_1 et U_1, V_1, W_1 étant indépendants des mêmes variables.

On démontrerait de même que δm_1, δn_1 présentent une forme analogue.

V. Il s'agit maintenant de savoir comment δl_1 dépend des variables

$$u, \quad v, \quad w, \quad \delta u, \quad \delta v, \quad \delta w.$$

Nous nous appuierons sur une nouvelle *hypothèse*.

Imaginons un élément induit $d\varpi$ ayant la forme d'un prisme droit à base rectangle; α est sa hauteur; β, γ sont les deux dimensions de sa base; l'aire de sa base est $d\Omega = \beta\gamma$; son volume est $d\varpi = \alpha\,d\Omega$.

Les trois dimensions α, β, γ coïncident avec les axes principaux de dilatation, en sorte que l'on a

$$\delta\lambda = \frac{\delta\alpha}{\alpha}, \qquad \delta\mu = \frac{\delta\beta}{\beta}, \qquad \delta\nu = \frac{\delta\gamma}{\gamma}.$$

Soit ρ la résistance spécifique de cet élément. Soient u, v, w les composantes du flux qui le parcourt. L'induction qu'y engendre l'élément $d\varpi_1$ y produirait un flux dont les composantes $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ auraient pour valeur

$$\rho\,\mathfrak{u}\,dt = \delta l_1,$$
$$\rho\,\mathfrak{v}\,dt = \delta m_1,$$
$$\rho\,\mathfrak{w}\,dt = \delta n_1.$$

Accolons côte à côte un certain nombre de semblables éléments $d\varpi'$, $d\varpi''$, ... prismatiques ayant la même longueur α, les mêmes d[...] tions d'axes principaux de la dilatation, les mêmes dilatations princi[...] mais pouvant être formés de substances différentes. Leur ensemble [...] un élément cylindrique complexe, *hétérogène*, $d\Pi$, qui a, en [...] point, pour axes principaux de dilatation les directions Ox, O[...] qui a pour dilatations principales λ, μ, ν; qui a pour hauteur α [...] base $\Omega = \int d\Omega$.

Remplaçons cet élément $d\Pi$ par un autre élément, possédant les diverses propriétés que nous venons d'énumérer, mais ayant une structure homogène. Supposons que la conductibilité spécifique $\frac{1}{R}$ de cet élément soit la moyenne des conductibilités spécifiques $\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho'}, \frac{1}{\rho''}, \ldots$ des éléments $d\varpi$, $d\varpi'$, $d\varpi''$, ...

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\Omega} \mathbf{S} \frac{d\Omega}{\rho}.$$

Imaginons que cet élément soit parcouru par un flux homogène et que les composantes φ, ψ, χ de ce flux soient données par les formules

$$\varphi = \frac{1}{\Omega} \mathbf{S}\, u\, d\Omega, \qquad \psi = \frac{1}{\Omega} \mathbf{S}\, v\, d\Omega, \qquad \chi = \frac{1}{\Omega} \mathbf{S}\, w\, d\Omega.$$

Dans cet élément $d\Pi$, l'induction de l'élément $d\varpi_1$ engendrerait un flux (Φ, Ψ, X); nous *admettrons* que l'on a

$$\Phi = \frac{1}{\Omega} \mathbf{S}\, \mathfrak{u}\, d\Omega, \qquad \Psi = \frac{1}{\Omega} \mathbf{S}\, \mathfrak{v}\, d\Omega, \qquad X = \frac{1}{\Omega} \mathbf{S}\, \mathfrak{w}\, d\Omega.$$

Cette hypothèse va nous servir à démontrer le théorème suivant :

Les quantités δl_1, δm_1, δn_1 sont indépendantes de u, v, w, δu, δv, δw.

Pour le système $d\varpi\, d\varpi_1$, nous avons évidemment

$$\begin{aligned}\delta l_1 = {} & \mathrm{A}(u, v, w)\,\delta a + \mathrm{B}(u, v, w)\,\delta b + \ldots + \mathrm{K}(u, v, w)\,\delta k \\ & + \mathrm{L}(u, v, w)\,\delta\lambda + \mathrm{M}(u, v, w)\,\delta\mu + \mathrm{N}(u, v, w)\,\delta\nu \\ & + \mathrm{U}(u, v, w)\,\delta u + \mathrm{V}(u, v, w)\,\delta v + \mathrm{W}(u, v, w)\,\delta w,\end{aligned}$$

a, b, ..., k désignant ici les paramètres qui dépendent exclusivement de l'élément $d\varpi_1$ et aussi ceux qui fixent la situation relative des deux systèmes d'axes Ox, Oy, Oz, $O_1x'_1$, $O_1y'_1$, $O_1z'_1$. Les fonctions où nous n'avons fait figurer que u, v, w peuvent dépendre aussi de a, b, ..., k.

Pour le groupe $d\Pi\, d\varpi_1$, les quantités a, b, ..., k auront la même valeur que pour le groupe $d\varpi\, d\varpi_1$; soit $\delta\mathfrak{L}_1$ la quantité analogue à δl_1 pour le groupe $d\Pi\, d\varpi_1$. Nous aurons

$$\begin{aligned}\delta\mathfrak{L}_1 = {} & \mathrm{A}(\varphi, \psi, \chi)\,\delta a + \mathrm{B}(\varphi, \psi, \chi)\,\delta b + \ldots + \mathrm{K}(\varphi, \psi, \chi)\,\delta k \\ & + \mathrm{L}(\varphi, \psi, \chi)\,\delta\lambda + \mathrm{M}(\varphi, \psi, \chi)\,\delta\mu + \mathrm{N}(\varphi, \psi, \chi)\,\delta\nu \\ & + \mathrm{U}(\varphi, \psi, \chi)\,\delta\varphi + \mathrm{V}(\varphi, \psi, \chi)\,\delta\psi + \mathrm{W}(\varphi, \psi, \chi)\,\delta\chi.\end{aligned}$$

Mais nous avons

$$\rho \mathfrak{v}\, dt = \delta l_1,$$
$$R\Phi\, dt = \delta \mathfrak{L}_1.$$

L'identité que nous avons admise

$$\Phi = \frac{1}{\Omega} \int \mathfrak{v}\, d\Omega$$

devient donc

$$\frac{\Omega}{R} \delta \mathfrak{L}_1 = \int \frac{\delta l_1}{\rho} d\Omega$$

ou encore, en vertu de l'égalité qui définit R,

$$\delta \mathfrak{L}_1 = \frac{\int \frac{\delta l_1}{\rho} d\Omega}{\int \frac{d\Omega}{\rho}}.$$

Si l'on remplace dans cette identité $\delta \mathfrak{L}_1$ et δl_1 par leurs valeurs, en observant en outre que

$$\delta\varphi = \frac{1}{\Omega} \int \delta u\, d\Omega, \qquad \delta\psi = \frac{1}{\Omega} \int \delta v\, d\Omega, \qquad \delta\chi = \frac{1}{\Omega} \int \delta w\, d\Omega,$$

on trouve une suite d'identités qui appartiennent à deux types différents :

1° Les fonctions A, B, ..., K, L, M, N vérifient des identités du type

$$\text{(15)} \qquad A\left(\frac{\int u\, d\Omega}{\int d\Omega}, \frac{\int v\, d\Omega}{\int d\Omega}, \frac{\int w\, d\Omega}{\int d\Omega}\right) \int \frac{d\Omega}{\rho} = \int A\left(\frac{u\, d\Omega}{d\Omega}, \frac{v\, d\Omega}{d\Omega}, \frac{w\, d\Omega}{d\Omega}\right) \frac{d\Omega}{\rho}.$$

2° Les fonctions U, V, W vérifient des identités du type

$$\text{(16)} \qquad U\left(\frac{\int u\, d\Omega}{\int d\Omega}, \frac{\int v\, d\Omega}{\int d\Omega}, \frac{\int w\, d\Omega}{\int d\Omega}\right) \int \frac{d\Omega}{\rho} \frac{\int \delta u\, d\Omega}{\int d\Omega}$$
$$= \int U\left(\frac{u\, d\Omega}{d\Omega}, \frac{v\, d\Omega}{d\Omega}, \frac{w\, d\Omega}{d\Omega}\right) \frac{d\Omega}{\rho} \frac{\delta u\, d\Omega}{d\Omega}.$$

L'identité (15) nous apprend que l'expression

$$A\left(\frac{u\, d\Omega}{d\Omega}, \frac{v\, d\Omega}{d\Omega}, \frac{w\, d\Omega}{d\Omega}\right) \frac{d\Omega}{\rho}$$

est linéaire et homogène par rapport aux cinq quantités

$$u\,d\Omega,\quad v\,d\Omega,\quad w\,d\Omega,\quad d\Omega,\quad \frac{d\Omega}{\rho}.$$

Il faut et il suffit pour cela que la fonction $A(u, v, w)$ soit indépendante de u, v, w. Une démonstration analogue prouverait que les quantités

$$\begin{array}{lll} B(u, v, w), & \ldots\ldots\ldots, & K(u, v, w), \\ L(u, v, w), & M(u, v, w), & N(u, v, w) \end{array}$$

sont toutes indépendantes de u, v, w.

L'identité (16) nous apprend que l'expression

$$U\left(\frac{u\,d\Omega}{d\Omega}, \frac{v\,d\Omega}{d\Omega}, \frac{w\,d\Omega}{d\Omega}\right)\frac{\partial u\,d\Omega}{d\Omega}\,\frac{d\Omega}{\rho}$$

est linéaire et homogène par rapport aux six quantités

$$u\,d\Omega,\quad v\,d\Omega,\quad w\,d\Omega,\quad d\Omega,\quad \partial u\,d\Omega,\quad \frac{d\Omega}{\rho}.$$

Il faut et il suffit pour cela que la fonction U soit identiquement nulle. Une démonstration analogue prouverait que les fonctions V et W sont identiquement nulles.

On voit donc que l'on a simplement

$$\partial l_1 = A\,\partial a + B\,\partial b + \ldots + K\,\partial k + L\,\partial\lambda + M\,\partial\mu + N\,\partial\nu,$$

les fonctions A, B, ..., K, L, M, N ne dépendant pas des variables u, v, w.

VI. Résumons les résultats obtenus dans ce qui précède.

La quantité δl_1 est de la forme

$$(17)\qquad \begin{aligned} \partial l_1 = [\ & (A_1\,\partial a + B_1\,\partial b + \ldots\ldots + K_1\,\partial k \\ & \qquad + L_1\,\partial\lambda + M_1\,\partial\mu + N_1\,\partial\nu \\ & \qquad + L'_1\,\partial\lambda_1 + M'_1\,\partial\mu_1 + N'_1\,\partial\nu_1)\,u'_1 + \mathfrak{U}\,\partial u'_1 \\ & + (A_2\,\partial a + B_2\,\partial b + \ldots\ldots + K_2\,\partial k \\ & \qquad + L_2\,\partial\lambda + M_2\,\partial\mu + N_2\,\partial\nu \\ & \qquad + L'_2\,\partial\lambda_1 + M'_2\,\partial\mu_1 + N'_2\,\partial\nu_1)\,v'_1 + \mathfrak{V}\,\partial v'_1 \\ & + (A_3\,\partial a + B_3\,\partial b + \ldots\ldots + K_3\,\partial k \\ & \qquad + L_3\,\partial\lambda + M_3\,\partial\mu + N_3\,\partial\nu \\ & \qquad + L'_3\,\partial\lambda_1 + M'_3\,\partial\mu_1 + N'_3\,\partial\nu_1)\,w'_1 + \mathfrak{W}\,\partial w'_1\,]\,d\varpi_1. \end{aligned}$$

Les quantités

$$\mathrm{A}_i,\ \mathrm{B}_i,\ \ldots,\ \mathrm{K}_i,\ \mathrm{L}_i,\ \mathrm{M}_i,\ \mathrm{N}_i,\ \mathrm{L}'_i,\ \mathrm{M}'_i,\ \mathrm{N}'_i,\ \mho,\ \mho,\ \mho$$

sont des fonctions des seules variables

$$a,\ b,\ \ldots,\ k.$$

Par a, b, ..., k, il faut entendre les paramètres suivants

$$(18)\quad \begin{cases} r, \\ \cos(r, x), \quad \cos(r, y), \quad \cos(r, z), \\ \cos(x'_1, x), \quad \cos(x'_1, y), \quad \cos(x'_1, z \ldots \\ \cos(y'_1, x), \quad \cos(y'_1, y), \quad \cos(y'_1 \ldots \\ \cos(z'_1, x), \quad \cos(z'_1, y), \quad \cos(z \ldots \end{cases}$$

... nous

$$\ldots \delta u_1].$$

... $d\varpi_1$ les lois de ... linéaires, nous

$$\ldots r_1, x)\Big]\frac{J_1}{r}\alpha x_1\Big\}.$$

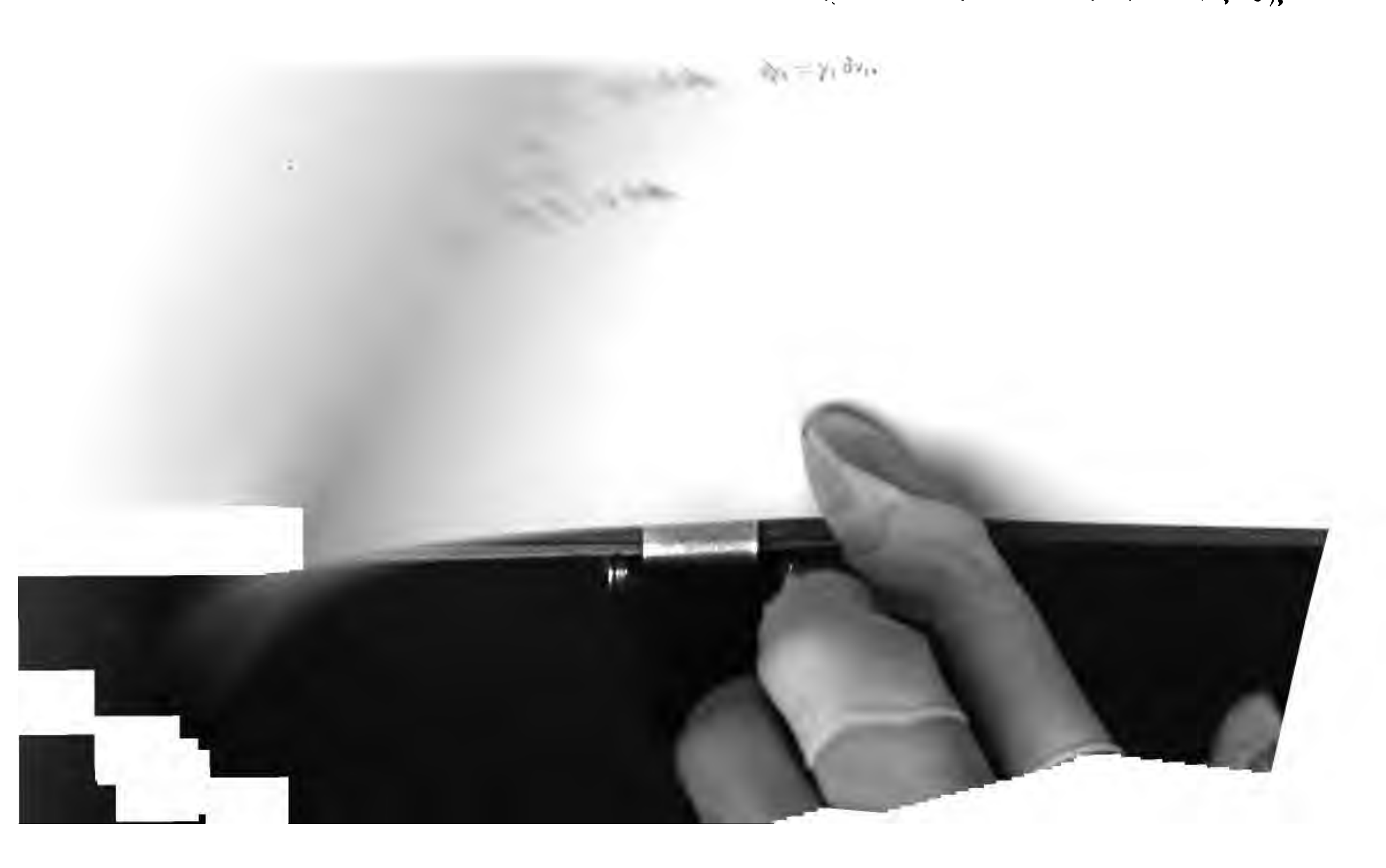
... Helmholtz; cette même ... pour représenter à la ... suivant Ox en un point de ... confusion.

... 1) et (2) de RdQ$_1$. Remar-

$$\ldots \cos(x'_1, y) + \cos(r, z)\ \cos(x'_1, z),$$

$$\ldots \delta\cos(x'_1, y) + \cos(r, z)\,\delta\cos(x'_1, z)$$

$$\ldots \delta\cos(r, y) + \cos(x'_1, z)\,\delta\cos(r, z),$$



CHAPITRE II.

APPLICATION DES LOIS DE L'INDUCTION ENTRE CONDUCTEURS LINÉAIRES.

Il nous faut maintenant déterminer comment les fonctions

$$\mathbf{A}_i, \quad \mathbf{B}_i, \quad \ldots, \quad \mathbf{K}_i, \quad \mathbf{L}_i, \quad \mathbf{M}_i, \quad \mathbf{N}_i, \quad \mathbf{L}'_i, \quad \mathbf{M}'_i, \quad \mathbf{N}'_i, \quad \mathfrak{V}, \quad \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{W}$$

dépendent des variables qui figurent dans le tableau (18) du Chapitre précédent.

Ces fonctions ne dépendent ni de la forme des éléments $d\varpi$, $d\varpi_1$, ni des quantités

$$u, \quad v, \quad w, \quad u'_1, \quad v'_1, \quad w'_1,$$
$$\delta u, \quad \delta v, \quad \delta w, \quad \delta u'_1, \quad \delta v'_1, \quad \delta w'_1;$$

on peut donc, pour déterminer ces fonctions, choisir arbitrairement toutes ces variables.

Nous supposerons que l'élément $d\varpi_1$ ait la forme d'un prisme droit ayant une de ses dimensions α_1 dirigée suivant $O'_1x'_1$, très grande par rapport aux deux autres, β_1 et γ_1, qui sont dirigées suivant $O'_1y'_1$ et $O_1z'_1$.

Nous supposerons en outre que l'on ait

$$v'_1 = 0, \qquad w'_1 = 0, \qquad \delta v'_1 = 0, \qquad \delta w'_1 = 0.$$

Nous admettrons qu'un tel élément inducteur est assimilable à un élément de courant linéaire, dirigé suivant $O'_1x'_1$, ayant pour longueur α_1, et traversé par un courant d'intensité

$$J_1 = u'_1\beta_1\gamma_1.$$

Nous supposerons ensuite que l'élément $d\varpi$ ait la forme d'un prisme droit ayant une de ses dimensions α, dirigée suivant Ox, très grande par rapport aux deux autres, β et γ, qui sont dirigées suivant Oy et Oz. L'induction due à l'élément $d\varpi_1$ y détermine un flux dont la composante, dans la direction Ox, a pour valeur U_1, en sorte que cette induction transporte d'une extrémité à l'autre de cet élément, dans le temps dt, une quantité d'électricité

$$dQ_1 = \beta\gamma U_1\, dt,$$

qui peut encore s'écrire, en vertu de la définition de δl_1,

$$dQ_1 = \frac{\delta l_1}{\rho} \beta\gamma.$$

Nous admettrons que cette quantité d'électricité est aussi celle que l'induction de l'élément $d\varpi_1$ transporterait, dans le temps dt, d'une extrémité à l'autre d'un élément linéaire de longueur α, de résistance $R = \frac{\rho\alpha}{\beta\gamma}$, dirigé suivant Ox.

Ces deux hypothèses vont nous servir à déterminer, dans δl_1, les termes qui dépendent de u'_1 et $\delta u'_1$.

En effet, d'après les résultats obtenus au Chapitre précédent, nou devons avoir

$$(1) \quad \begin{aligned} R\, dQ_1 = \alpha\, \delta l_1 = \alpha\, d\varpi_1 [(A_1\, \delta a + B_1\, \delta b + \ldots\ldots + K_1\, \delta k \\ + L_1\, \delta\lambda + M_1\, \delta\mu + N_1\, \delta\nu \\ + L'_1\, \delta\lambda_1 + M'_1\, \delta\mu_1 + N'_1\, \delta\nu_1) u'_1 + \mho\, \delta u'_1]. \end{aligned}$$

D'autre part, si nous appliquons aux deux éléments $d\varpi$, $d\varpi_1$ les lo l'induction électrodynamique entre éléments de courants linéaires, aurons [Tome III, p. 120, égalité (2)]

$$(2) \quad R\, dQ_1 = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2} \delta \left\{ \left[\frac{1-\lambda}{2} \cos(r, x) \cos(r, x'_1) + \frac{1+\lambda}{2} \cos(x'_1, x) \right] \frac{J_1}{r} \alpha \right.$$

Dans cette formule, λ représente la constante d'Helmholtz; cet lettre λ va figurer dans certaines de nos équations pour représ fois la constante d'Helmholtz et la dilatation suivant Ox en un l'élément $d\varpi$; le lecteur évitera sans peine toute confusion.

Nous allons identifier ces deux expressions (1) et (2) de $R\,dQ$ quons pour cela que nous avons

$$\cos(r, x'_1) = \cos(r, x) \cos(x'_1, x) + \cos(r, y) \cos(x'_1, y) + \cos(r$$

$$\begin{aligned} \delta \cos(r, x'_1) = {} & \cos(r, x)\, \delta \cos(x'_1, x) + \cos(r, y)\, \delta \cos(x'_1, y) + \cos(\\ & + \cos(x'_1, x)\, \delta \cos(r, x) + \cos(x'_1, y)\, \delta \cos(r, y) + \cos \end{aligned}$$

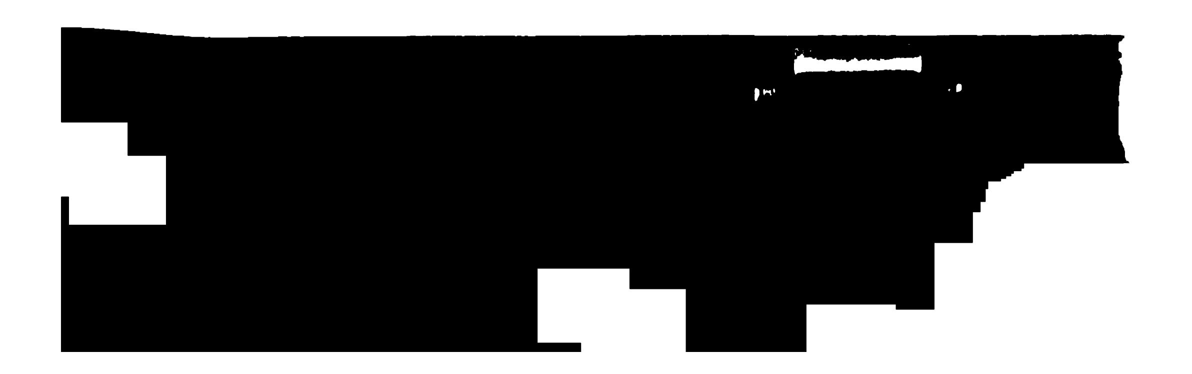
$$\delta\alpha = \alpha\, \delta\lambda,$$

$$\delta\alpha_1 = \alpha_1\, \delta\lambda_1, \qquad \delta\beta_1 = \beta_1\, \delta\mu_1, \qquad \delta\gamma_1 = \gamma_1\, \delta\nu_1,$$

$$\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 = d\varpi_1,$$

$$J_1 = u'_1 \beta_1 \gamma_1,$$

$$\delta(J_1 \alpha_1) = d\varpi_1\, \delta u'_1 + u'_1\, \delta d\varpi_1.$$



ues à δl_1, δm_1, δn_1, qui sont
que l'on doit avoir

., z),

),

Ox, Oy,

égalités (9)

$\xi, z) = \delta(\Phi_1\, d\varpi_1)$,
$(\eta, z) = \delta(\Psi_1\, d\varpi_1)$,
$s(\zeta, z) = \delta(X_1\, d\varpi_1)$.

$z)\,\delta\nu$.

(ζ, x),
$s(\zeta, y)$,
$os(\zeta, z)$,

En prenant l'élément $d\varpi$ non plus parallèle à l'axe Ox, mais parallèle à l'axe Oy ou à l'axe Oz, on déterminerait de même δm_1, δn_1.

Ces quantités δl_1, δm_1, δn_1 peuvent se mettre sous une forme très simple.

Soient u_1, v_1, w_1 les composantes du flux en un point de l'élément $d\varpi_1$ suivant les axes principaux de dilatation Ox, Oy, Oz de l'élément $d\varpi$. Nous aurons

$$\begin{aligned} u_1 &= u'_1 \cos(x'_1, x) + v'_1 \cos(y'_1, x) + w'_1 \cos(z'_1, x), \\ v_1 &= u'_1 \cos(x'_1, y) + v'_1 \cos(y'_1, y) + w'_1 \cos(z'_1, y), \\ w_1 &= u'_1 \cos(x'_1, z) + v'_1 \cos(y'_1, z) + w'_1 \cos(z'_1, z). \end{aligned}$$

Posons

$$(4) \quad \begin{cases} U_1 = \dfrac{1+\lambda}{2} \dfrac{u_1}{r} + \dfrac{1-\lambda}{2} \left(\dfrac{x_1 - x}{r} u_1 + \dfrac{y_1 - y}{r} v_1 + \dfrac{z_1 - z}{r} w_1 \right) \dfrac{x_1 - x}{r^2}, \\ V_1 = \dfrac{1+\lambda}{2} \dfrac{v_1}{r} + \dfrac{1-\lambda}{2} \left(\dfrac{x_1 - x}{r} u_1 + \dfrac{y_1 - y}{r} v_1 + \dfrac{z_1 - z}{r} w_1 \right) \dfrac{y_1 - y}{r^2}, \\ W_1 = \dfrac{1+\lambda}{2} \dfrac{w_1}{r} + \dfrac{1-\lambda}{2} \left(\dfrac{x_1 - x}{r} u_1 + \dfrac{y_1 - y}{r} v_1 + \dfrac{z_1 - z}{r} w_1 \right) \dfrac{z_1 - z}{r^2}, \end{cases}$$

et nous aurons

$$(5) \quad \begin{cases} \delta l_1 = -\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2} [\delta(U_1\, d\varpi_1) + U_1\, d\varpi_1\, \delta\lambda], \\ \delta m_1 = -\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2} [\delta(V_1\, d\varpi_1) + V_1\, d\varpi_1\, \delta\mu], \\ \delta n_1 = -\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2} [\delta(W_1\, d\varpi_1) + W_1\, d\varpi_1\, \delta\nu]. \end{cases}$$

Telle est la forme très simple sous laquelle peuvent être mises les lois de l'induction électrodynamique lorsque l'on prend à chaque instant pour axes de coordonnées les axes principaux de dilatation de l'élément induit.

Ce choix particulier d'axes de coordonnées peut, dans certains cas, être incommode; nous allons donc chercher les formules que l'on doit substituer aux formules (5), lorsque l'on prend pour axes de coordonnées trois axes rectangulaires quelconques $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ assujettis seulement à demeurer, pendant le temps dt, invariablement liés à la matière qui forme l'élément $d\varpi$.

Le flux qui parcourt l'élément $d\varpi_1$ a pour composantes, suivant $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$,

$$(6) \quad \begin{cases} \varphi_1 = u_1 \cos(\xi, x) + v_1 \cos(\xi, y) + w_1 \cos(\xi, z), \\ \psi_1 = u_1 \cos(\eta, x) + v_1 \cos(\eta, y) + w_1 \cos(\eta, z), \\ \chi_1 = u_1 \cos(\zeta, x) + v_1 \cos(\zeta, y) + w_1 \cos(\zeta, z). \end{cases}$$

Soient δL_1, δM_1, δN_1 les quantités, analogues à δl_1, δm_1, δn_1, qui sont relatives aux axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$; on voit sans peine que l'on doit avoir

$$(7)\quad \begin{cases} \delta L_1 = \delta l_1 \cos(\xi, x) + \delta m_1 \cos(\xi, y) + \delta n_1 \cos(\xi, z), \\ \delta M_1 = \delta l_1 \cos(\eta, x) + \delta m_1 \cos(\eta, y) + \delta n_1 \cos(\eta, z), \\ \delta N_1 = \delta l_1 \cos(\zeta, x) + \delta m_1 \cos(\zeta, y) + \delta n_1 \cos(\zeta, z). \end{cases}$$

Posons

$$(8)\quad \begin{cases} \Phi_1 = \dfrac{1+\lambda}{2}\dfrac{\varphi_1}{r} + \dfrac{1-\lambda}{2}\left(\dfrac{\xi_1-\xi}{r}\varphi_1 + \dfrac{\eta_1-\eta}{r}\psi_1 + \dfrac{\zeta_1-\zeta}{r}\chi_1\right)\dfrac{\xi_1-\xi}{r^2}, \\ \Psi_1 = \dfrac{1+\lambda}{2}\dfrac{\psi_1}{r} + \dfrac{1-\lambda}{2}\left(\dfrac{\xi_1-\xi}{r}\varphi_1 + \dfrac{\eta_1-\eta}{r}\psi_1 + \dfrac{\zeta_1-\zeta}{r}\chi_1\right)\dfrac{\eta_1-\eta}{r^2}, \\ X_1 = \dfrac{1+\lambda}{2}\dfrac{\chi_1}{r} + \dfrac{1-\lambda}{2}\left(\dfrac{\xi_1-\xi}{r}\varphi_1 + \dfrac{\eta_1-\eta}{r}\psi_1 + \dfrac{\zeta_1-\zeta}{r}\chi_1\right)\dfrac{\zeta_1-\zeta}{r^2}. \end{cases}$$

Nous verrons sans peine que l'on a, en vertu des égalités (4) et (6),

$$(9)\quad \begin{cases} \Phi_1 = U_1 \cos(\xi, x) + V_1 \cos(\xi, y) + W_1 \cos(\xi, z), \\ \Psi_1 = U_1 \cos(\eta, x) + V_1 \cos(\eta, y) + W_1 \cos(\eta, z), \\ X_1 = U_1 \cos(\zeta, x) + V_1 \cos(\zeta, y) + W_1 \cos(\zeta, z). \end{cases}$$

D'ailleurs, comme les axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ sont, comme les axes Ox, Oy, Oz, invariablement liés à l'élément $d\varpi$, les neuf cosinus

$$\begin{matrix} \cos(\xi, x), & \cos(\xi, y), & \cos(\xi, z), \\ \cos(\eta, x), & \cos(\eta, y), & \cos(\eta, z), \\ \cos(\zeta, x), & \cos(\zeta, y), & \cos(\zeta, z) \end{matrix}$$

demeurent invariables pendant le temps dt, en sorte que les égalités (9) permettent d'écrire

$$(10)\quad \begin{cases} \delta(U_1 d\varpi_1)\cos(\xi, x) + \delta(V_1 d\varpi_1)\cos(\xi, y) + \delta(W_1 d\varpi_1)\cos(\xi, z) = \delta(\Phi_1 d\varpi_1), \\ \delta(U_1 d\varpi_1)\cos(\eta, x) + \delta(V_1 d\varpi_1)\cos(\eta, y) + \delta(W_1 d\varpi_1)\cos(\eta, z) = \delta(\Psi_1 d\varpi_1), \\ \delta(U_1 d\varpi_1)\cos(\zeta, x) + \delta(V_1 d\varpi_1)\cos(\zeta, y) + \delta(W_1 d\varpi_1)\cos(\zeta, z) = \delta(X_1 d\varpi_1). \end{cases}$$

Considérons la quantité

$$U_1 \cos(\xi, x)\,\delta\lambda + V_1 \cos(\xi, y)\,\delta\mu + W_1 \cos(\xi, z)\,\delta\nu.$$

Nous pourrons l'écrire, en vertu des égalités

$$(9\,bis)\quad \begin{cases} U_1 = \Phi_1 \cos(\xi, x) + \Psi_1 \cos(\eta, x) + X_1 \cos(\zeta, x), \\ V_1 = \Phi_1 \cos(\xi, y) + \Psi_1 \cos(\eta, y) + X_1 \cos(\zeta, y), \\ W_1 = \Phi_1 \cos(\xi, z) + \Psi_1 \cos(\eta, z) + X_1 \cos(\zeta, z), \end{cases}$$

qui se déduisent des égalités (9), sous la forme suivante

$$(11)\quad \begin{aligned} &U_1 \cos(\xi, x)\,\delta\lambda + V_1 \cos(\xi, y)\,\delta\mu + W_1 \cos(\xi, z)\,\delta\nu \\ &= \Phi_1 [\cos^2(\xi, x)\,\delta\lambda + \cos^2(\xi, y)\,\delta\mu + \cos^2(\xi, z)\,\delta\nu] \\ &+ \Psi_1 [\cos(\xi, x)\cos(\eta, x)\,\delta\lambda + \cos(\xi, y)\cos(\eta, y)\,\delta\mu + \cos(\xi, z)\cos(\eta, z)\,\delta\nu] \\ &+ X_1 [\cos(\xi, x)\cos(\zeta, x)\,\delta\lambda + \cos(\xi, y)\cos(\zeta, y)\,\delta\mu + \cos(\xi, z)\cos(\zeta, z)\,\delta\nu]. \end{aligned}$$

Soient f, g, h les composantes, par rapport aux axes $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, du déplacement éprouvé, pendant le temps dt, par un point matériel (ξ, η, ζ) appartenant à l'élément $d\varpi$. On sait que l'on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \xi} &= \cos^2(\xi, x)\,\delta\lambda + \cos^2(\xi, y)\,\delta\mu + \cos^2(\xi, z)\,\delta\nu, \\ \frac{\partial g}{\partial \xi} &= \cos(\xi, x)\cos(\eta, x)\,\delta\lambda + \cos(\xi, y)\cos(\eta, y)\,\delta\mu + \cos(\xi, z)\cos(\eta, z)\,\delta\nu, \\ \frac{\partial h}{\partial \xi} &= \cos(\xi, x)\cos(\zeta, x)\,\delta\lambda + \cos(\xi, y)\cos(\zeta, y)\,\delta\mu + \cos(\xi, z)\cos(\zeta, z)\,\delta\nu. \end{aligned}$$

L'égalité (11) devient donc la première des trois égalités

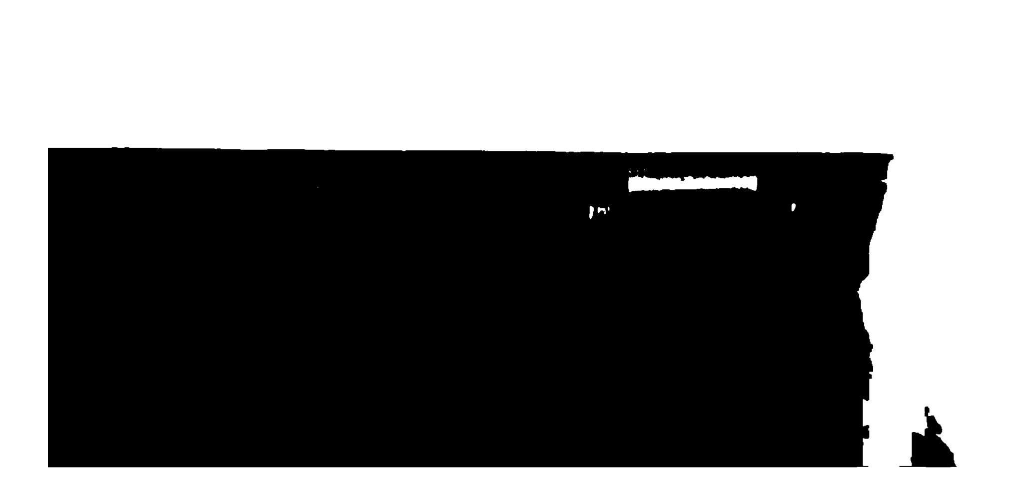
$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} &U_1 \cos(\xi, x)\,\delta\lambda + V_1 \cos(\xi, y)\,\delta\mu + W_1 \cos(\xi, z)\,\delta\nu \\ &\qquad = \Phi_1 \frac{\partial f}{\partial \xi} + \Psi_1 \frac{\partial g}{\partial \xi} + X_1 \frac{\partial h}{\partial \xi}, \\ &U_1 \cos(\eta, x)\,\delta\lambda + V_1 \cos(\eta, y)\,\delta\mu + W_1 \cos(\eta, z)\,\delta\nu \\ &\qquad = \Phi_1 \frac{\partial f}{\partial \eta} + \Psi_1 \frac{\partial g}{\partial \eta} + X_1 \frac{\partial h}{\partial \eta}, \\ &U_1 \cos(\zeta, x)\,\delta\lambda + V_1 \cos(\zeta, y)\,\delta\mu + W_1 \cos(\zeta, z)\,\delta\nu \\ &\qquad = \Phi_1 \frac{\partial f}{\partial \zeta} + \Psi_1 \frac{\partial g}{\partial \zeta} + X_1 \frac{\partial h}{\partial \zeta}; \end{aligned} \right.$$

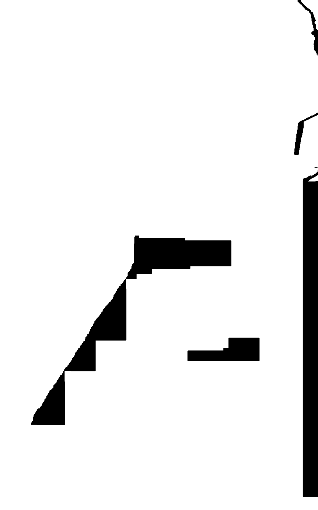
les deux autres se démontrent de même.

Les égalités (5), (7), (10) et (12) donnent

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} \delta L_1 &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[\delta(\Phi_1\, d\varpi_1) + \left(\Phi_1 \frac{\partial f}{\partial \xi} + \Psi_1 \frac{\partial g}{\partial \xi} + X_1 \frac{\partial}{\partial} \right.\right. \\ \delta M_1 &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[\delta(\Psi_1\, d\varpi_1) + \left(\Phi_1 \frac{\partial f}{\partial \eta} + \Psi_1 \frac{\partial g}{\partial \eta} + X_1 \right.\right. \\ \delta N_1 &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[\delta(X_1\, d\varpi_1) + \left(\Phi_1 \frac{\partial f}{\partial \zeta} + \Psi_1 \frac{\partial g}{\partial \zeta} + \right.\right. \end{aligned} \right.$$

Ces formules nous donnent les lois générales de l'i





TS POINTS

ENNES,

en

des
de la
le toute
tchefsky
airer cette

hsiens à coeffi-
eigliederige Pe-

signalerai trois articles
tionem ganze Zahlen
gung 2, 3, 7 *gehörendes*
oretisches Princip in der
ten; 1892), et un travail de
n Coefficienten (*Mathema-*

s que l'on peut déduire du prin-
ur sur le même sujet.

D. 1

$$\frac{\partial h}{\partial \eta} \quad \text{par} \quad \frac{\partial h}{\partial \eta} - \omega,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} \quad \text{par} \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} + \omega'',$$

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta} \quad \text{par} \quad \frac{\partial f}{\partial \zeta} - \omega',$$

$$\frac{\partial g}{\partial \zeta} \quad \text{par} \quad \frac{\partial g}{\partial \zeta} + \omega.$$

On voit alors que, lorsqu'on prend pour axes de coordonnées un trièdre trirectangle fixe dans l'espace, on retrouve les égalités (13) comme expression des lois de l'induction électrodynamique. Ce sont les égalités données par M. H. von Helmholtz.

SUR DIFFÉRENTS POINTS

DE LA

THÉORIE DES FONCTIONS FUCHSIENNES,

PAR M. X. STOUFF,

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier.

Des recherches récentes ont encore augmenté l'intérêt que présente la Théorie des fonctions fuchsiennes ([1]), et surtout des groupes dont les substitutions peuvent être définies arithmétiquement. Le travail suivant contient différents points de vue. La première Partie renferme des compléments relatifs aux propriétés arithmétiques des substitutions, et forme en quelque sorte la suite des Mémoires déjà publiés sur ce sujet.

La seconde Partie est un essai destiné à rendre plus faciles à saisir des propriétés bien connues des fonctions modulaires. Les principes de la Théorie de la transformation y sont exposés en faisant abstraction de toute considération arithmétique ou algébrique; la Géométrie de Lobatchefsky y intervient seule. Elle contribuera peut-être, pour sa part, à éclairer cette Théorie.

I.

Dans un travail antérieur, j'ai considéré des groupes fuchsiens à coefficients complexes, dérivant de périodes à deux termes (zweigliederige Pe-

([1]) Outre les travaux déjà cités dans mes Mémoires antérieurs, je signalerai trois articles de M. Fricke : *Ueber discontinuirliche Gruppen deren Substitutionem ganze Zahlen eines biquadratischen Körpers sind.* — *Ueber die zur Verzweigung 2, 3, 7 gehörendes Function.* — *Ueber ein allgemeines arithmetisch-gruppentheoretisches Princip in der Theorie der automorphen Functionen* (*Göttingen Nachrichten;* 1892), et un travail de M. Bianchi : *Lineare Substitutionen mit ganzen Complexen Coefficienten* (*Mathematische Annalen;* vol. XL).

Les deux premiers Mémoires de M. Fricke, sur les groupes que l'on peut déduire du principe de Poincaré, sont antérieurs aux Mémoires de l'Auteur sur le même sujet.

rioden, d'après la terminologie de Kummer) des racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité, et dans la formation desquelles interviennent certaines substitutions que j'ai désignées par Σ_j. La généralisation aux périodes quelconques est immédiate. Elle présente cependant des circonstances curieuses.

(a). Prenons pour coefficients du groupe les nombres du corps défini par les racines cinquièmes de l'unité, et pour Σ_j la substitution de période 4,

$$\left(z,\ \frac{-z-1}{z+1}\right),$$

j'aurai les relations

$$\begin{aligned}\pm 2a_{j^3} &= -a_j + b_j + c_j - d_j,\\ \pm 2b_{j^3} &= -a_j - b_j + c_j + d_j,\\ \pm 2c_{j^3} &= -a_j + b_j - c_j + d_j,\\ \pm 2d_{j^3} &= -a_j - b_j - c_j - d_j,\end{aligned}$$

et, en posant

$$\begin{aligned}a_j &= \alpha_1 j + \alpha_2 j^2 + \alpha_3 j^3 + \alpha_4 j^4,\\ b_j &= \beta_1 j + \beta_2 j^2 + \beta_3 j^3 + \beta_4 j^4,\\ c_j &= \gamma_1 j + \gamma_2 j^2 + \gamma_3 j^3 + \gamma_4 j^4,\\ d_j &= \delta_1 j + \delta_2 j^2 + \delta_3 j^3 + \delta_4 j^4,\end{aligned}$$

on doit avoir

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 \equiv 0 \bmod 2,$$

$$\begin{array}{lll}\pm 2\alpha_3 = -\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 - \delta_1, & \alpha_4 = \delta_1, & \pm 2\alpha_2 = -\alpha_1 - \beta_1 - \gamma_1 - \delta_1,\\ \pm 2\beta_3 = -\alpha_1 - \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1, & \beta_4 = -\gamma_1, & \pm 2\beta_2 = \alpha_1 - \beta_1 + \gamma_1 - \delta_1,\\ \pm 2\gamma_3 = -\alpha_1 + \beta_1 - \gamma_1 + \delta_1, & \gamma_4 = -\beta_1, & \pm 2\gamma_2 = \alpha_1 + \beta_1 - \gamma_1 - \delta_1,\\ \pm 2\delta_3 = -\alpha_1 - \beta_1 - \gamma_1 - \delta_1, & \delta_4 = \alpha_1, & \pm 2\delta_2 = -\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 - \delta_1.\end{array}$$

Le déterminant d'une substitution paire est

$$\tfrac{5}{2}(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 + \delta_1^2),$$

et celui d'une substitution impaire,

$$\tfrac{3}{2}(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 + \delta_1^2) - 2(\alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1).$$

Il est donc impossible de définir un groupe discontinu en égalant à l'unité la première ou la seconde de ces deux formes quadratiques.

En donnant à α_1, β_1, γ_1, δ_1 toutes les valeurs possibles, on obtient un groupe improprement discontinu, c'est-à-dire ne contenant pas de substitution infinitésimale. Remarquons que multiplier une substitution par une autre revient à composer, d'après une certaine loi, les formes quadra-

tiques qui leur servent de déterminants. Nous possédons donc une composition de la forme $\frac{3}{2}(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 + \delta_1^2)$, somme de quatre carrés positifs isomorphe de la composition de la forme $ad - bc$ avec elle-même. Cette dernière est la somme de deux carrés positifs et de deux carrés négatifs. Cette circonstance paraît digne d'être observée.

(b). Prenons pour coefficients les nombres du corps défini par les racines septièmes de l'unité, et pour Σ_j la substitution de période 6,

$$\left(z,\ \frac{6z+3}{-7z-3}\right),$$

en posant

$$\begin{aligned}
a_j &= \alpha_1 j + \alpha_2 j^2 + \alpha_3 j^3 + \alpha_4 j^4 + \alpha_5 j^5,\\
b_j &= \beta_1 j + \beta_2 j^2 + \beta_3 j^3 + \beta_4 j^4 + \beta_5 j^5,\\
c_j &= \gamma_1 j + \gamma_2 j^2 + \gamma_3 j^3 + \gamma_4 j^4 + \gamma_5 j^5,\\
d_j &= \delta_1 j + \delta_2 j^2 + \delta_3 j^3 + \delta_4 j^4 + \delta_5 j^5,
\end{aligned}$$

on obtient, par le changement de j en j^3,

$$\begin{aligned}
\pm \alpha_5 &= 6\alpha_1 - 7\beta_1 + 6\gamma_1 - 7\delta_1, & \alpha_4 &= -20\alpha_1 + 28\beta_1 - 15\gamma_1 + 21\delta_1,\\
\pm \beta_5 &= 3\alpha_1 - 3\beta_1 + 3\gamma_1 - 3\delta_1, & \beta_4 &= -12\alpha_1 + 16\beta_1 - 9\gamma_1 + 12\delta_1,\\
\pm \gamma_5 &= -14\alpha_1 + \tfrac{49}{3}\beta_1 - 12\gamma_1 + 14\delta_1, & \gamma_4 &= 35\alpha_1 - 49\beta_1 + 25\gamma_1 - 35\delta_1,\\
\pm \delta_5 &= -7\alpha_1 + 7\beta_1 - 6\gamma_1 + 6\delta_1, & \delta_4 &= 21\alpha_1 - 28\beta_1 + 15\gamma_1 - 20\delta_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pm \alpha_6 &= 27\alpha_1 - 42\beta_1 + 18\gamma_1 - 28\delta_1, & \alpha_2 &= -20\alpha_1 + 35\beta_1 - 12\gamma_1 + 21\delta_1,\\
\pm \beta_6 &= 18\alpha_1 - 27\beta_1 + 12\gamma_1 - 18\delta_1, & \beta_2 &= -15\alpha_1 + 25\beta_1 - 9\gamma_1 + 15\delta_1,\\
\pm \gamma_6 &= -42\alpha_1 + \tfrac{196}{3}\beta_1 - 27\gamma_1 + 42\delta_1, & \gamma_2 &= 28\alpha_1 - 49\beta_1 + 16\gamma_1 - 28\delta_1,\\
\pm \delta_6 &= -28\alpha_1 + 42\beta_1 - 18\gamma_1 + 27\delta_1, & \delta_2 &= 21\alpha_1 - 35\beta_1 + 12\gamma_1 - 20\delta_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pm \alpha_3 &= 6\alpha_1 - 14\beta_1 + 3\gamma_1 - 7\delta_1,\\
\pm \beta_3 &= 6\alpha_1 - 12\beta_1 + 3\gamma_1 - 6\delta_1,\\
\pm \gamma_3 &= -7\alpha_1 + \tfrac{49}{3}\beta_1 - 3\gamma_1 + 7\delta_1,\\
\pm \delta_3 &= -7\alpha_1 + 14\beta_1 - 3\gamma_1 + 6\delta_1.
\end{aligned}$$

Le déterminant d'une substitution paire est

$$\begin{aligned}
-98\alpha_1^2 + 294\alpha_1\beta_1 - 28\alpha_1\gamma_1 + 189\alpha_1\delta_1 - \tfrac{686}{3}\beta_1^2 - 105\beta_1\gamma_1&\\
- 294\beta_1\delta_1 - 42\gamma_1^2 + 28\gamma_1\delta_1 - 98\delta_1^2&,
\end{aligned}$$

et celui d'une substitution impaire

$$\begin{aligned}
56\alpha_1^2 - 168\alpha_1\beta_1 - 26\alpha_1\gamma_1 - 111\alpha_1\gamma_1 + \tfrac{392}{3}\beta_1^2 + 189\beta_1\gamma_1&\\
+ 168\beta_1\delta_1 + 24\gamma_1^2 + 26\gamma_1\delta_1 + 56\delta_1^2&,
\end{aligned}$$

Chacune de ces formes quadratiques est une somme de quatre carrés, comme dans le cas précédent; on ne peut donc définir un groupe fuchsien en les égalant à l'unité.

(*c*). Les remarques précédentes nous conduisent naturellement, étant donnée une forme quadratique quaternaire, et une formule de composition de cette forme avec elle-même, correspondant à la multiplication des substitutions linéaires d'un groupe, à discuter le nombre des carrés positifs et négatifs dans lesquels on peut la décomposer ([1]). J'envisage la forme

$$\Phi(x, y, z, u) = A(x^2 + u^2) + A'y^2 + A''z^2 + (By + Cz)(x - u) + Dxu + Eyz,$$

$$\frac{A}{A'} = \frac{A''}{A} = -\frac{C}{B}, \quad A(D + E) = BC,$$

étudiée dans un travail antérieur; l'équation en S correspondante est

$$\begin{vmatrix} 2A - S & B & C & D \\ B & 2A' - S & E & -B \\ C & E & 2A'' - S & -C \\ D & -B & -C & 2A - S \end{vmatrix} = 0.$$

En ajoutant la dernière ligne à la première, on reconnaît que $D + 2A$ est racine : après avoir supprimé cette racine, en ajoutant la dernière colonne à la première multipliée par -1, on obtient l'équation

$$\begin{vmatrix} 2A' - S & E & -B \\ E & 2A'' - S & -C \\ -B & -C & \frac{2A - D - S}{2} \end{vmatrix} = 0,$$

qui n'est autre que l'équation en S d'une quadrique : cette équation ayant toutes ses racines réelles, le théorème de Descartes en fera connaître immédiatement le signe pour une forme donnée.

Les racines des mineurs non principaux du premier ordre égalés à zéro ont respectivement pour valeurs

$$\frac{A''}{A}(2A - E), \quad \frac{A'}{A}(2A - E), \quad -D - 2A,$$

et peuvent servir à séparer facilement les racines.

([1]) Comparer Poincaré, *Fonctions fuchsiennes et l'Arithmétique* (*Journal de Liouville*; 1887).

Mais l'équation présente une particularité importante. Si l'on développe le déterminant de neuf éléments qui précède, le premier terme de l'équation est $-S^3$ et le dernier $(D+2A)(E+2A)^2$. Donc, si $D+2A$ est positif, l'équation en S présente un nombre impair de variations; si $D+2A$ est négatif, elle en présente un nombre pair; comme conclusion la forme Φ est décomposable, soit en une somme de quatre carrés de même signe, soit en deux carrés positifs et deux négatifs. Les formes qui correspondent au dernier cas engendrent, par leur composition avec elles-mêmes, des groupes discontinus. Par exemple, la forme

$$-2x^2+4y^2+z^2-2u^2+(2y+z)(x-u)+5xu-6yz$$

donne lieu à l'équation en S

$$(S-1)(S^3-S^2-120S-100)=0,$$

elle a deux racines positives et deux négatives. La forme est donc décomposable en deux carrés positifs et deux négatifs (¹).

(*d*). Voici un procédé par la recherche des substitutions Σ_j.

Supposons pour fixer les idées que l'on emploie seulement des périodes à deux termes, j étant une racine d'indice p de l'unité. Soit $F_{\omega j}(z)$ une fraction linéaire de la variable z, dont les coefficients contiennent, outre la racine j, une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité ω; prenons, pour éviter toute difficulté, n premier avec p. Soit λ une racine primitive de n; $g_\omega(z)$ une fraction linéaire, telle que la substitution $[z, g_\omega(z)]$, que je désignerai par T_ω, soit de période $\frac{p-1}{2}$; soit S_ω une substitution linéaire, telle que

$$S_\omega S_{\omega^\lambda} S_{\omega^{\lambda^2}} \ldots S_{\omega^{\lambda^{p-1}}} = 1,$$

de plus, on a

$$T_{\omega^\lambda} = S_\omega^{-1} T_\omega S_\omega.$$

T_ω et S_ω contiennent dans leurs coefficients ω, mais ne contiennent pas j. Supposons $F_{\omega j}(z)$ déterminé, de telle sorte que

$$F_{\omega^\lambda j}(z) = S_\omega^{-1} F_{\omega j}(z).$$

L'équation

$$F_{\omega j^\rho}(z') = g_\omega[F_{\omega j}(z)]$$

(¹) Quant aux irrationnelles qu'il faut introduire pour obtenir le groupe fuchsien correspondant, consultez le Mémoire : *Sur la composition des formes quaternaires*, etc. (*Annales de Toulouse*).

définit alors une substitution linéaire (z, z'), qui répond à la définition des substitutions Σ_j. Cette équation se transforme en une équation équivalente quand on change ω en ω^λ : donc la substitution (z, z') ne contient pas ω.

(e). Afin d'élucider la notion des groupes isomorphes avec eux-mêmes, pour la formation desquels je n'ai encore employé que des substitutions transformantes rationnelles, je vais donner un exemple de groupe défini par une substitution irrationnelle. Soit j une racine cinquième de l'unité, posons

$$j + j^4 = \eta_1, \qquad j^2 + j^3 = \eta_2,$$

j'emploie la substitution Σ_j,

$$\Sigma_j = \left(z, \frac{z(2\eta_1 - 1) + \eta_1 - \eta_2}{z(\eta_1 - \eta_2) + 2\eta_2 - 1}\right),$$

dont le déterminant est -6. En imposant à la substitution

$$\left(z, \frac{(\alpha_1\eta_1 + \alpha_2\eta_2)z + \beta_1\eta_1 + \beta_2\eta_2}{(\gamma_1\eta_1 + \gamma_2\eta_2)z + \delta_1\eta_1 + \delta_2\eta_2}\right)$$

la condition connue, on obtient les équations

$$[illegible] = 6\alpha_1 = -4\beta_1 - 4\gamma_1 - \alpha_2 + 11\beta_2 - \gamma_2 + 5\delta_2,$$
$$[illegible] = 6\beta_1 = -4\alpha_1 - 8\beta_1 - 4\delta_1 - 11\alpha_2 - 21\beta_2 + 5\gamma_2 - 11\delta_2,$$
$$[illegible] = 6\gamma_1 = 4\alpha_1 - 8\gamma_1 - 4\delta_1 - \alpha_2 + 5\beta_2 + 3\gamma_2 + \delta_2,$$
$$[illegible] = 6\delta_1 = 4\beta_1 - 4\gamma_1 - 5\alpha_2 - 11\beta_2 + \gamma_2 - \delta_2,$$

qui sont nécessairement compatibles.

Les relations entre les entiers se présentent sous une forme bien plus compliquée que lorsque la substitution transformante est rationnelle; il y a de plus une différence essentielle: le groupe des substitutions S_j est distinct du groupe des substitutions S_{j^2}, et ces groupes ne sont même pas généralement commensurables. Dans le cas d'une substitution transformante rationnelle, au contraire, ces deux groupes sont identiques.

(f). Soit

$$A_0x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3 = 0$$

une équation irréductible du troisième degré à coefficients entiers et, en [illegible] quelconque, x_1, x_2, x_3 ses trois racines. Les nombres du corps qui dérive de x_1, x_2, x_3 sont de la forme

$$m + nx_1 + px_2 + qx_1^2 + rx_2^2 + sx_1^2x_2,$$

m, n, p, q, r, s étant des nombres commensurables. Six nombres commensurables interviennent donc dans leur formation par voie additive. Le groupe de Galois des racines d'une équation du troisième degré est, comme on le sait, isomorphe au groupe d'une double pyramide triangulaire régulière. Le Tableau suivant indique la correspondance des substitutions des deux groupes

$$x_1,\ x_3,\ x_2;\ (z,\ z),\qquad x_2,\ x_3,\ x_1;\ \left(z,\ \frac{1}{-z+1}\right),\qquad x_3,\ x_1,\ x_2;\ \left(z;\ \frac{z-1}{z}\right),$$

$$x_1,\ x_3,\ x_2;\ (z,\ -z+1),\qquad x_3,\ x_2,\ x_1;\ \left(z,\ \frac{1}{z}\right),\qquad x_2,\ x_1,\ x_3;\ \left(z,\ \frac{z}{z-1}\right).$$

Formons une substitution linéaire, dont les coefficients soient les nombres du corps défini plus haut, et telle que chaque permutation des racines équivale à la transformation par la substitution linéaire correspondante du groupe de la double pyramide. Les coefficients contiennent en tout vingt-quatre nombres commensurables. Ces nombres s'expriment d'ailleurs au moyen des coefficients et de leurs conjugués à l'aide d'équations linéaires, dont le déterminant, comme il est facile de le voir, n'est pas nul. Les coefficients et leurs conjugués forment un total de vingt-quatre nombres liés par vingt-quatre équations. Mais quatre de ces équations sont des identités. Elles correspondent à la face de la pyramide triangulaire qui répond à la substitution identique. Ainsi la substitution assujettie à ces conditions contient quatre nombres commensurables arbitraires.

Afin d'éviter des difficultés, ne considérons qu'une équation dans laquelle le coefficient de x^3 est l'unité. Ne prenons comme coefficients que les nombres entiers du corps. Les substitutions obtenues, en égalant à l'unité le déterminant des coefficients, formeront un groupe discontinu.

Le système des modules

$$1,\quad x_1,\quad x_2,\quad x_1^2,\quad x_2^2,\quad x_1^2 x_2$$

présente l'avantage que toute fonction entière, à coefficients entiers, des racines de l'équation du troisième degré se réduit à la forme (1), sans introduction de dénominateurs; mais il se prête mal au calcul algébrique, faute de symétrie. Nous lui substituerons le système de modules suivant :

$$\lambda_{11} = x_1^2 x_2,\qquad \lambda_{21} = x_2^2 x_3,\qquad \lambda_{31} = x_3^2 x_1,$$

$$\lambda_{12} = x_1^2 x_3,\qquad \lambda_{22} = x_2^2 x_1,\qquad \lambda_{32} = x_3^2 x_2,$$

formé de l'ensemble des différentes valeurs que prend une fonction des racines par le groupe de Galois de l'équation proposée. Soit

$$\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right)$$

une substitution du groupe

$$a = \sum_{ij} \alpha_{ij}\lambda_{ij},$$

$$b = \sum_{ij} \beta_{ij}\lambda_{ij},$$

$$c = \sum_{ij} \gamma_{ij}\lambda_{ij}, \qquad (i = 1, 2, 3),$$

$$d = \sum_{ij} \delta_{ij}\lambda_{ij}, \qquad (j = 1, 2),$$

on trouve aisément les formules

$$\alpha_{i+1.j} = \gamma_{ij} + \delta_{ij}, \qquad \beta_{i+1.j} = -\gamma_{ij}, \qquad \gamma_{i+1.j} = -\alpha_{ij} - \beta_{ij} + \gamma_{ij} + \delta_{ij},$$

$$\delta_{i+1\,j} = \alpha_{ij} - \gamma_{ij}, \qquad \pm\alpha_{i.j+1} = \alpha_{ij},$$

$$\pm\beta_{i.j+1} = -\alpha_{ij} - \beta_{ij}, \qquad \pm\gamma_{i.j+1} = -\gamma_{ij}, \qquad \pm\delta_{i.j+1} = \gamma_{ij} + \delta_{ij}.$$

Le calcul du déterminant $ad - bc$ serait assez compliqué sans la remarque suivante.

Une substitution à quatre variables a, b, c, d,

$$\begin{array}{lll} a & in & -amq - bnq + cmp + dnp, \\ b & in & -apq - bq^2 + cp^2 + dpq, \\ c & in & amn + bn^2 - cm^2 - dmn, \\ d & in & anp + bnq - cmp - dmq, \end{array}$$

effectuée simultanément sur les variables a, b, c, d et sur les variables a', b', c', d', ne change pas la forme bilinéaire

$$ad' + da' - bc' - cb';$$

on en conclut que l'on a toujours

$$\alpha_{i+r.j+s}\delta_{i'+r.j'+s} + \alpha_{i'+r.j'+s}\delta_{i+r.i+s} - \beta_{i+r.j+s}\gamma_{i'+r.j'+s} - \beta_{i'+r.j'+s}\gamma_{i+r.j+s}$$
$$= \alpha_{ij}\delta_{i'j'} + \delta_{ij}\alpha_{i'j'} - \beta_{ij}\gamma_{i'j'} - \gamma_{ij}\delta_{i'j'}.$$



Par suite,

$$\begin{aligned} ad - bc = {} & (\alpha_{11}\delta_{11} - \beta_{11}\gamma_{11}) \sum_{ij} \lambda_{ij}^2 + (\alpha_{11}\delta_{21} + \alpha_{21}\delta_{11} - \beta_{11}\gamma_{21} - \beta_{21}\gamma_{11}) \sum_{ij} \lambda_{ij}\lambda_{i+1.j} \\ & + (\alpha_{11}\delta_{12} + \alpha_{12}\delta_{11} - \beta_{11}\gamma_{12} - \gamma_{11}\beta_{12}) \sum_{i} \lambda_{i1}\lambda_{i2} \\ & + (\alpha_{21}\delta_{12} + \alpha_{12}\delta_{21} - \beta_{21}\gamma_{12} - \gamma_{21}\beta_{12}) \sum_{i} \lambda_{i1}\lambda_{i+2.2} \\ & + (\alpha_{11}\delta_{22} + \delta_{11}\alpha_{22} - \beta_{11}\gamma_{22} - \beta_{22}\gamma_{11}) \sum_{i} \lambda_{i1}\lambda_{i+1.2}, \end{aligned}$$

on a, en supposant l'équation du troisième degré mise sous la forme

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

et, d'après les formules,

$$\begin{aligned} & \alpha_{11}\delta_{21} + \alpha_{21}\delta_{11} - \beta_{11}\gamma_{21} - \beta_{21}\gamma_{11} \\ & \quad = \alpha_{11}^2 + \beta_{11}^2 + \gamma_{11}^2 + \delta_{11}^2 + \alpha_{11}\beta_{11} - \alpha_{11}\gamma_{11} - \beta_{11}\gamma_{11} - \beta_{11}\delta_{11} + \gamma_{11}\delta_{11}, \\ & \alpha_{11}\delta_{12} + \alpha_{12}\delta_{11} - \beta_{11}\gamma_{12} - \gamma_{11}\beta_{12} = \pm(2\alpha_{11}\gamma_{11} + 2\alpha_{11}\delta_{11} + 2\beta_{11}\gamma_{11}), \\ & \alpha_{21}\delta_{12} + \alpha_{12}\delta_{21} - \beta_{21}\gamma_{12} - \gamma_{21}\beta_{12} \\ & \quad = \pm(-\beta_{11}^2 + \delta_{11}^2 - 2\alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{11}\gamma_{11} + \alpha_{11}\delta_{11} + \beta_{11}\gamma_{11} + \beta_{11}\delta_{11} + 2\gamma_{11}\delta_{11}), \\ & \alpha_{11}\delta_{22} + \delta_{11}\alpha_{22} - \beta_{11}\gamma_{22} - \gamma_{11}\beta_{22} = \pm(\alpha_{11}^2 - \beta_{11}^2 - \gamma_{11}^2 + \delta_{11}^2 + \alpha_{11}\gamma_{11} - \beta_{11}\delta_{11}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{ij} \lambda_{ij}^2 = -2a^3c + a^2b^2 + 4abc - 2b^3 - 3c^2, \\ & \sum_{ij} \lambda_{ij}\lambda_{i+1.j} = abc - 3c^2, \\ & \sum \lambda_{i1}\lambda_{i2} = a^3c - 3abc + 3c^2, \\ & \sum_{i} \lambda_{i1}\lambda_{i+2.2} = 3c^2, \\ & \sum_{i} \lambda_{i1}\lambda_{i+1.2} = 3c^2 - 3abc + b^3. \end{aligned}$$

D'après ces calculs, on a, entre α_{11}, β_{11}, γ_{11}, δ_{11}, l'une ou l'autre des deux relations

$$\begin{aligned} & -2abc + b^3)\alpha_{11}^2 + (4abc - b^3 - 9c^2)\beta_{11}^2 + (4abc - b^3 - 6c^2)\gamma_{11}^2 \\ & \quad + (-2abc + b^3 + 3c^2)\delta_{11}^2 + (abc - 9c^2)\alpha_{11}\beta_{11} \\ & \quad + (2a^3c - 10abc + b^3 + 15c^2)\alpha_{11}\gamma_{11} + (a^2b^2 - 2abc - 2b^3 + 6c^2)\alpha_{11}\delta_{11} \\ & \quad + (4a^3c - a^2b^2 - 11abc + 2b^3 + 15c^2)\beta_{11}\gamma_{11} \\ & \qquad\qquad + (2abc + 3c^2 - b^3)\beta_{11}\delta_{11} + (abc + 3c^3)\gamma_{11}\delta_{11} = 1, \end{aligned}$$

$$\alpha_{11}^2(\ldots abc - 6c^2 - b^3) + \beta_{11}^2(-2abc + 3c^2 + b^3) + \gamma_{11}^2(-2abc + b^3)$$
$$+ \delta_{11}^2(\ldots abc - 9c^2 - b^3) + \alpha_{11}\beta_{11}(abc + 3c^2) + \alpha_{11}\gamma_{11}(8abc - 2a^2c + b^3 - 9c^2)$$
$$+ \alpha_{11}\delta_{11}(-4a^2c + 10abc + a^2b^2 - 12c^2 - 2b^3)$$
$$+ \beta_{11}\gamma_{11}(\ldots a^2b^2 + abc - 3c^2 + 2b^3) + \beta_{11}\delta_{11}(3c^2 - 4abc + b^3)$$
$$+ \gamma_{11}\delta_{11}(abc - 9c^2) = 1;$$

pour la formation du groupe, on prendra des nombres commensurables $\alpha_{11}, \beta_{11}, \gamma_{11}, \delta_{11}$ satisfaisant à l'une ou à l'autre de ces deux relations, et tels que les nombres a, b, c, d, réduits au système de modules (1), soient des entiers du corps, c'est-à-dire ne contiennent que des nombres entiers comme multiplicateurs des modules. Ces conditions reviennent donc à [illegible] d'un certain système de congruences.

6. M. Fricke a bien voulu m'indiquer une généralisation des résultats contenus dans le paragraphe précédent. On peut obtenir, en partant des racines d'une équation du quatrième degré, toujours par l'application du même principe, des groupes de substitutions linéaires à coefficients complexes qui permettent une division régulière de l'espace en polyèdres. Soit

$$x^4 - ax^3 - bx^2 - cx - d = 0$$

une équation du quatrième degré, x_1, x_2, x_3, x_4 ses quatre racines. Posons

[illegible]

Soit D un nombre qui peut se représenter par la forme $t^2 - 2tu - 2u^2$, ou, ce qui revient au même, qui est une somme de deux carrés. Je considère le corps déterminé par l'irrationnelle $\sqrt{-D}$. Nous prendrons, pour coefficients des substitutions que nous voulons former, des nombres de la forme

$$\sum \ldots \quad = \sum \ldots \quad = \sum \ldots \quad = \sum \ldots$$

Le groupe de Galois de l'équation du quatrième degré est isomorphe à celui d'un polyèdre régulier et la correspondance peut être établie de la manière suivante. [illegible] la substitution linéaire qui correspond à chaque substitution.

$x_1x_2x_3x_4$.	$x_2x_3x_4x_1$.	$x_3x_4x_1x_2$.	$x_4x_1x_2x_3$.
$z,$	$\dfrac{z(t+\sqrt{-\mathrm{D}})+2t+2u}{uz+t-\sqrt{-\mathrm{D}}},$	$\dfrac{z\sqrt{-\mathrm{D}}+2t+2u}{uz-\sqrt{-\mathrm{D}}},$	$\dfrac{z(t-\sqrt{-\mathrm{D}})-2t-2u}{-uz+t+\sqrt{-\mathrm{D}}};$
$x_1x_2x_4x_3$.	$x_2x_4x_3x_1$.	$x_4x_3x_1x_2$.	$x_3x_1x_2x_4$.
$-\dfrac{2}{z},$	$\dfrac{z(2t+2u)-2t-2\sqrt{-\mathrm{D}}}{z(t-\sqrt{-\mathrm{D}})-2u},$	$\dfrac{z(-2t-2u)+2\sqrt{-\mathrm{D}}}{z\sqrt{-\mathrm{D}}+2u},$	$\dfrac{z(-2t-2u)-2t+2\sqrt{-\mathrm{D}}}{z(t+\sqrt{-\mathrm{D}})+2u};$
$x_1x_3x_2x_4$.	$x_3x_2x_4x_1$.	$x_2x_4x_1x_3$.	$x_4x_1x_3x_2$.
$\dfrac{z(-t-2u+\sqrt{-\mathrm{D}})+2t+2u+2\sqrt{-\mathrm{D}}}{z(u+\sqrt{-\mathrm{D}})+t+2u-\sqrt{-\mathrm{D}}},$	$\dfrac{z(-2t-2u+2\sqrt{-\mathrm{D}})+2t+4u+2\sqrt{-\mathrm{D}})}{z(t+2u+\sqrt{-\mathrm{D}})+2u-2\sqrt{-\mathrm{D}}},$	$\dfrac{z(-t+\sqrt{-\mathrm{D}})+2u}{z(t+u)-t-\sqrt{-\mathrm{D}}},$	$\dfrac{2uz-2t-2\sqrt{-\mathrm{D}}}{z(t-\sqrt{-\mathrm{D}})-2t-2u};$
$x_1x_3x_4x_2$.	$x_3x_4x_2x_1$.	$x_4x_2x_1x_3$.	$x_2x_1x_3x_4$.
$\dfrac{z(2u+2\sqrt{-\mathrm{D}})+2t+4u-2\sqrt{-\mathrm{D}}}{z(t+2u-\sqrt{-\mathrm{D}})-2t-2u-2\sqrt{-\mathrm{D}}},$	$\dfrac{-2uz+2\sqrt{-\mathrm{D}}}{z\sqrt{-\mathrm{D}}+2t+2u},$	$\dfrac{z(-2u+2\sqrt{-\mathrm{D}})+2t+4u+2\sqrt{-\mathrm{D}}}{z(t+2u+\sqrt{-\mathrm{D}})+2t+2u-2\sqrt{-\mathrm{D}}},$	$\dfrac{2z\sqrt{-\mathrm{D}}-2t-4u}{z(t+2u)-2\sqrt{-\mathrm{D}}};$
$x_1x_4x_2x_3$.	$x_4x_2x_3x_1$.	$x_2x_3x_1x_4$.	$x_3x_1x_4x_2$.
$\dfrac{z(2t+2u+2\sqrt{-\mathrm{D}})+2t+4u-2\sqrt{-\mathrm{D}}}{z(t+2u-\sqrt{-\mathrm{D}})-2u-2\sqrt{-\mathrm{D}}},$	$\dfrac{z(-t-2u-\sqrt{-\mathrm{D}})-2t-2u+2\sqrt{-\mathrm{D}}}{z(-u+\sqrt{-\mathrm{D}})+t+2u+\sqrt{-\mathrm{D}}},$	$\dfrac{-2uz-2t+2\sqrt{-\mathrm{D}}}{z(t+\sqrt{-\mathrm{D}})+2t+2u},$	$\dfrac{z(t+\sqrt{-\mathrm{D}})+2u}{z(t+u)+(t-\sqrt{-\mathrm{D}})};$
$x_1x_4x_3x_2$.	$x_4x_3x_2x_1$.	$x_3x_2x_1x_4$.	$x_2x_1x_4x_3$.
$\dfrac{z(t+2u-\sqrt{-\mathrm{D}})-2u-2\sqrt{-\mathrm{D}}}{z(-t-u-\sqrt{-\mathrm{D}})-t-2u+\sqrt{-\mathrm{D}}},$	$\dfrac{z\sqrt{-\mathrm{D}}+2u}{z(t+u)-\sqrt{-\mathrm{D}}},$	$\dfrac{z(-t-2u-\sqrt{-\mathrm{D}})-2u+2\sqrt{-\mathrm{D}}}{z(-t-u+\sqrt{-\mathrm{D}})+t+2u+\sqrt{-\mathrm{D}}},$	$\dfrac{z(-t-2u)+2\sqrt{-\mathrm{D}}}{z\sqrt{-\mathrm{D}}+t+2u}.$

La grande complication des calculs ultérieurs m'oblige à remettre à lus tard les résultats généraux relatifs à ces groupes.

Voici des groupes plus simples : partons de l'équation

$$x^4 - n = 0,$$

n étant un entier réel ou complexe de la forme $a + bi$, et déterminons les substitutions de déterminant 1, et dont les coefficients appartiennent au corps engendré par $n^{\frac{1}{4}}$ et i, telles qu'en y remplaçant $n^{\frac{1}{4}}$ par $in^{\frac{1}{4}}$, la substitution éprouve la transformation par la substitution de période $4\left(z, \frac{z+1}{-z+1}\right)$, nous trouverons que ces substitutions sont de la forme

$$z,\quad \frac{z\left(\alpha + i\alpha_1 n^{\frac{1}{4}} - i\alpha_3 n^{\frac{3}{4}}\right) + \beta + \alpha_1 n^{\frac{1}{4}} + \alpha_3 n^{\frac{3}{4}}}{z\left(-\beta + \alpha_1 n^{\frac{1}{4}} + \alpha_3 n^{\frac{3}{4}}\right) + \alpha - i\alpha_1 n^{\frac{1}{4}} + i\alpha_3 n^{\frac{3}{4}}}.$$

α, β, α_1, α_3 sont quatre entiers de la forme $a + bi$, entre lesquels on a la relation

$$\alpha^2 + \beta^2 - 4n\alpha_1\alpha_3 = 1.$$

Soit

$$n = 2,$$

on a les relations suivantes entre les substitutions

$$\left(z, \frac{zi2^{\frac{1}{4}} - 1 + 2^{\frac{1}{4}}}{z\left(1 + 2^{\frac{1}{4}}\right) - i2^{\frac{1}{4}}}\right)\left(z, \frac{-1}{z}\right)\left(z, \frac{-z2^{\frac{1}{4}} + 1 + i2^{\frac{1}{4}}}{z\left(-1 + i2^{\frac{1}{4}}\right) + 2^{\frac{1}{4}}}\right)\left(z, \frac{z(1+i)2^{\frac{1}{4}} - 1 + (1-i)2^{\frac{1}{4}}}{z\left[1 + (1-i)2^{\frac{1}{4}}\right] - (1+i)2^{\frac{1}{4}}}\right) = 1,$$

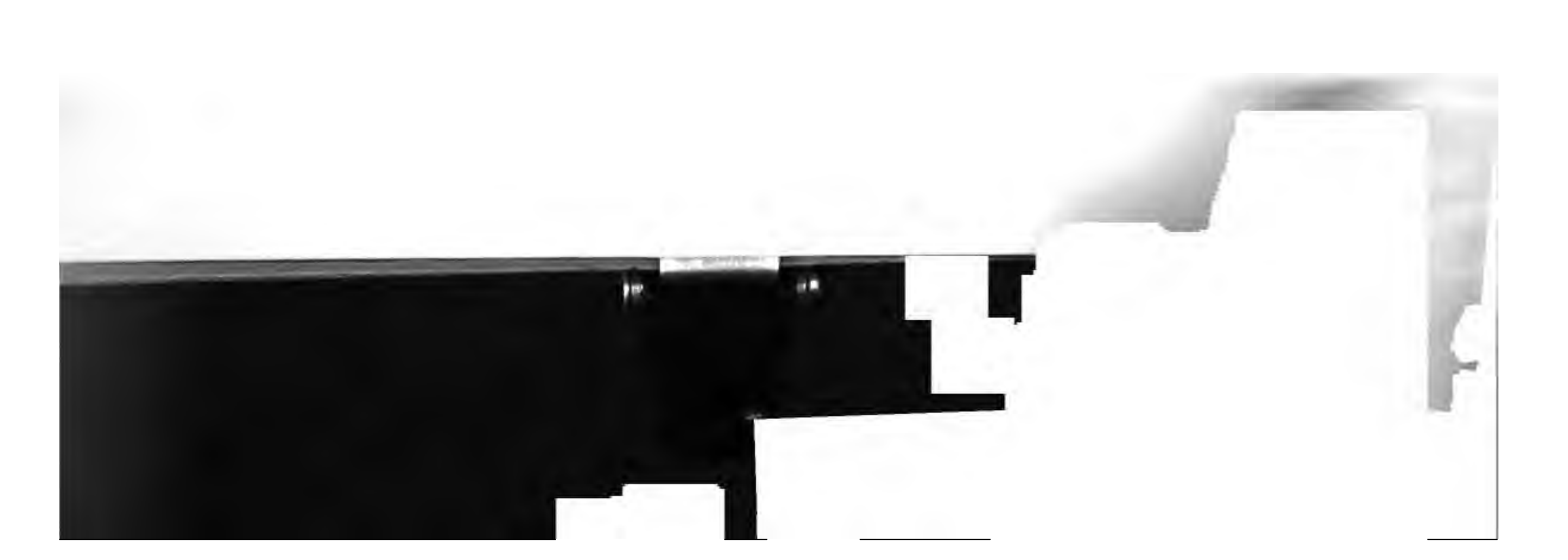
$$\left(z, \frac{-zi2^{\frac{1}{4}} - 1 - 2^{\frac{1}{4}}}{z\left(1 - 2^{\frac{1}{4}}\right) + i2^{\frac{1}{4}}}\right)\left(z, \frac{-1}{z}\right)\left(z, \frac{z2^{\frac{1}{4}} + 1 - i2^{\frac{1}{4}}}{z\left(-1 - i2^{\frac{1}{4}}\right) - 2^{\frac{1}{4}}}\right)\left(\frac{-z(1+i)2^{\frac{1}{4}} - 1 - 2^{\frac{1}{4}} + i2^{\frac{1}{4}}}{\left(1 - 2^{\frac{1}{4}} + i2^{\frac{1}{4}}\right)z + (1+i)2^{\frac{1}{4}}}\right) = 1.$$

II.

Les considérations empruntées à la Géométrie de Lobatchefsky paraissent présenter quelque intérêt pour la théorie des fonctions modulaires (1).

Nous appellerons *droite* un arc de cercle orthogonal au cercle fondamental, distance de deux points, la L de la droite qui joint ces deux points.

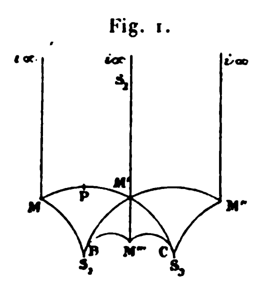
(1) Comparer Poincaré, *Acta mathematica*, t. IV.



Tout cercle qui a des points à l'intérieur du cercle fondamental sera considéré comme un cercle non euclidien. S'il est tout entier intérieur au cercle fondamental, il existera un point fixe dont les distances non euclidiennes à tous les points de ce cercle seront égales entre elles. Dans le cas contraire, on dira que le centre du cercle est imaginaire.

D'après les travaux bien connus de M. Klein, l'invariant absolu J de la forme biquadratique binaire qui sert à définir un système de fonctions elliptiques est une fonction fuchsienne du rapport z des périodes, et son plan se représente conformément sur un triangle mixtiligne $i\infty \mathrm{MPM}' i\infty$ (*fig.* 1),

Fig. 1.



formé par deux parallèles à l'axe imaginaire à la distance $\frac{1}{2}$ et par un arc de cercle qui les coupe sous un angle de 30°. La fonction $\mathrm{J}(z)$ reste invariable par toutes les substitutions du groupe

$$\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right), \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1),$$

et la fonction $\mathrm{J}\left(\frac{z}{2}\right)$ par celles du groupe

$$\left(z, \frac{\alpha z + 2\beta}{\frac{\gamma}{2} z + \delta}\right), \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1);$$

ces deux groupes ont un sous-groupe commun Γ, c'est le sous-groupe du premier défini par les congruences $\beta \equiv \gamma \equiv 0$, mod 2. Γ admet, comme polygone générateur, le polygone $i\infty \mathrm{MBM}''' \mathrm{CM}'' i\infty$ (*fig.* 1), dans lequel $\mathrm{M}'' i\infty$ est transformé en $\mathrm{M} i\infty$ par la substitution S_1, BM en BM''' par une substitution S_2, CM''' en CM'' par S_3. Ces trois substitutions sont paraboliques et leur produit $\mathrm{S}_1 \mathrm{S}_2 \mathrm{S}_3$ est égal à l'unité.

Afin de ne pas faire jouer au point $i\infty$ un rôle spécial, envisageons la représentation sur le cercle fondamental. Soient A, B, C les points doubles des trois substitutions S_1, S_2, S_3. Soit D le transformé de C par S_1; néces-

sairement S_2 transforme de nouveau D en C. Le point essentiel est le suivant : *la droite* CD *est perpendiculaire à* AB. En effet, supposons d'abord que la substitution S_1 transforme un certain point H en G et que S_2 transforme de nouveau G en H; la substitution S_1 équivaut à un mouvement non euclidien pendant lequel le point H décrirait le cercle passant par sa position initiale et tangent au cercle fondamental au point A; la substitution S_2 revient à un mouvement sur un cercle tangent au cercle fondamental au point B. Les points G et H sont donc déterminés par l'intersection de deux cercles non euclidiens, ayant pour centres les deux points à l'infini sur l'arc AB. La droite non euclidienne GH est donc perpendiculaire sur la droite AB.

Dans le sens de la Géométrie ordinaire, les trois axes radicaux du cercle fondamental et des deux cercles AGH, GBH concourent en un même point P, qui est le pôle de AB par rapport au cercle fondamental. Donc, elle transforme en lui-même l'arc normal au cercle fondamental déterminé par les points G et H. Elle ne change pas l'arc AB. Elle n'altère pas les angles. Donc, l'arc GH est perpendiculaire sur l'arc AB.

Supposons que H se rapproche indéfiniment du cercle fondamental en tendant vers un certain point C, le point G tendra vers son transformé D; donc CD est perpendiculaire sur AB.

On voit aisément que la réciproque est vraie. Si l'on trace à l'intérieur du cercle fondamental deux droites rectangulaires qui rencontrent ce cercle aux points A, B, C, D, il existe trois substitutions paraboliques ayant leurs points doubles respectifs en ABC et dont le produit est égal à l'unité.

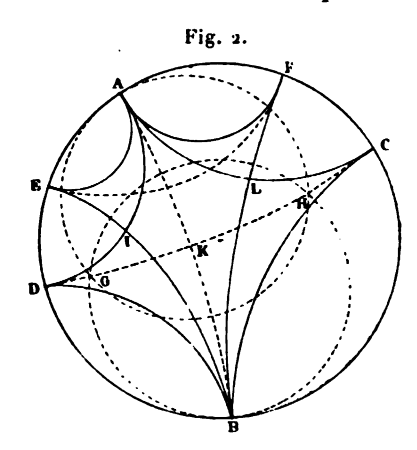
Ceci posé, soient E et F les symétriques du point B par rapport aux arcs AD et AC. Les deux points E et F sont évidemment symétriques l'un de l'autre par rapport à AB. Les deux arcs rectangulaires AB et EF définissent donc, comme nous venons de le voir, un système de trois substitutions paraboliques dont le produit est égal à l'unité, S'_1 ayant son point double en A, S'_2 son point double en B, S'_3 son point double en F. Le groupe engendré par S'_1, S'_2, S'_3 n'est pas le même que le groupe engendré par S_1, S_2, S_3; mais nous pouvons en faire l'usage suivant :

Les substitutions S_1, S_2, S_3 dérivent des substitutions du polygone fondamental de l'invariant J. Le retour du quadrilatère ADBC au polygone fondamental de cet invariant est facile : en effet, le point correspondant au point M' de la *fig.* 1 est le point de concours des hauteurs du triangle ABC

dans la *fig.* 2. Les points correspondants dans la *fig.* 1 aux autres points de la *fig.* 2 se construisent alors aisément.

Le triangle ABF, étant de même nature que le triangle ABC, peut se

Fig. 2.



décomposer comme lui en polygones analogues à $i\infty ABA' i\infty$, qui déterminent le groupe de l'invariant $J\left(\frac{z}{2}\right)$. Nous allons démontrer que les groupes résultant de la décomposition du triangle ABC ou du triangle ABF admettent tous deux comme sous-groupes les groupes Γ et Γ', engendrés par S_1 et S_2 ou par S'_1 et S'_2.

S_1 transforme AC en AD, et peut être regardée comme formée d'une transformation symétrique par rapport à AC, suivie d'une transformation symétrique par rapport à AB. De ces deux transformations la première change AF en AB, la seconde laisse AB invariable. S_1 peut être aussi considérée comme le produit d'une transformation symétrique par rapport à AB, par une transformation symétrique par rapport à AD. Elle transforme donc AB en AE. Donc S_1^2 transforme AF en AE et est égal à S'_1.

De la symétrie des points A, C; A, D par rapport aux arcs BE, BF, résulte, par un raisonnement analogue, que S_2 est le carré de S'_2.

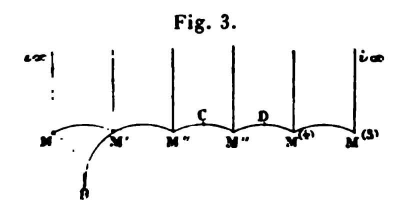
Or S_1, S'_1, S_2, S'_2 sont toutes des puissances entières des substitutions des polygones d'invariant qui ont leur point double soit en A, soit en B, et, par conséquent, les groupes Γ et Γ' sont contenus soit dans le groupe de $J(z)$, soit dans celui de $J\left(\frac{z}{2}\right)$.

Pour l'étude de la transformation du cinquième ordre et des transformations d'ordre supérieur, nous n'emploierons pas la considération du sous-groupe distingué, mod 5, du groupe arithmétique, qui serait trop

compliquée. J'envisage le sous-groupe $\Gamma\left(z, \frac{\alpha z + 5\beta}{\gamma z + \delta}\right)$, $(\alpha\delta - 5\beta\gamma = 1)$; le polygone générateur de ce sous-groupe est

$$i\infty \, \mathrm{MBM'M''CM'''DM^{(4)}M^{(5)}} i\infty \quad (\textit{fig. } 3),$$

Fig. 3.

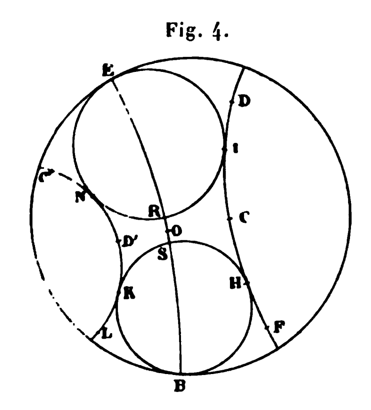


dans lequel $\mathrm{M}^{(5)} i\infty$ est transformé en $\mathrm{M} i\infty$ par la distribution parabolique ; $\mathrm{M}^{(4)}\mathrm{M}^{(5)}$ se transforme en M'M'' par une substitution hyperbolique S_2, C et D sont les points de deux substitutions de période 2; S_3 et S_4, B est le point double d'une substitution parabolique S_5. On a donc les relations

$$S_1 S_5 = S_2, \qquad S_4 S_3 = S_2.$$

Adoptons encore (*fig.* 4) la représentation sur le cercle fondamental:

Fig. 4.



soient B, E, C, D les points doubles respectifs des substitutions S_5 et S_1, S_4 et S_4. La substitution hyperbolique S_2, produit des deux substitutions de période 2, S_1 et S_5, a pour axe la droite CD qui joint leurs points doubles et pour L le double de CD (*fig.* 4). La substitution parabolique S_1, suivie de S_5, doit aussi donner S_2 pour produit, et, par conséquent,

(1) Au sujet de cette simplification, *voir* le Mémoire de Klein : *Ueber die Transformation*, etc. (*Math. Annalen*, vol. XIV); celui de Kiepert : *Ueber die Transformation bei zusammengesetzten Transformationsgrad* (*Id.*, vol. XXXII); *Ueber Gewisse Vereinsachungen*, etc. (*Id.*, vol. XXXVII): celui de Fricke : *Zur Transformations theorie der elliptischen Functionen* (*Id.*, vol. XL, p. 471).

laisser CD invariable. Je mène un cercle tangent à CD et au cercle fondamental en E. Ce cercle correspond, dans la *fig.* 3, à une droite parallèle à l'axe réel et le point I, où il touche CD, est évidemment le milieu non euclidien de cette droite. La substitution S_1 correspond à un mouvement dans lequel CD reste tangent à cet arc et arrive dans une position finale C'D'.

Menons un cercle tangent en B au cercle fondamental et à CD. S_5 déplace C'D' tangentiellement à ce cercle, et, comme elle doit ramener cette droite dans la position primitive de CD, il faut que C'D' soit tangente à ce cercle. En suivant les deux mouvements, on voit que le déplacement résultant du point I le long de l'arc CD est le double de IH, et, comme la L de S_2 est 2CD, CD égale IH. Soient R, S les points où les cercles EI, BH rencontrent BE, O le milieu de RS. Une substitution de période 2, ayant O pour point double, transforme le système des substitutions S_1, S_5, S_3, S_4 en un système formé de S_5, S_1 et de deux substitutions de période 2 ayant pour points doubles D' et L. Ce système de substitutions, étant identique à la situation près au primitif, dérive de la même manière que celui-ci de substitutions fondamentales d'invariant. Ce même système de substitutions engendre d'ailleurs un groupe contenu dans le groupe primitif d'invariant. Car les substitutions de période 2, ayant pour points doubles D' et L, appartiennent évidemment au groupe engendré par S_1, S_3, S_4; et S_5 et S_1 sont des puissances entières des substitutions de polygones ayant leurs points doubles en B et en E. Nous avons ainsi mis en évidence la commensurabilité du groupe arithmétique avec l'un de ses transformés, ce qui est le point essentiel.

Dans la transformation du septième ordre, les choses se passent d'une manière analogue. Les substitutions du polygone fondamental du groupe $\left(z, \frac{\alpha z + 7\beta}{\gamma z + \delta}\right)$, $(\alpha\delta - 7\beta\gamma = 1)$, sont au nombre de cinq, S_1 et S_5 paraboliques, S_2 hyperbolique, S_3 et S_4 de période 3, et on a les relations

$$S_1 S_5 = S_2, \qquad S_4 S_3 = S_2.$$

L'explication est la même que dans le cas du cinquième ordre; les deux substitutions de période 3 jouent le rôle des deux substitutions de période 2 (¹).

(¹) *Voir* le Mémoire déjà cité de Klein (*Math. Annalen*, vol. IV).

Une étude ultérieure des transformations modulaires fait reconnaître que la raison géométrique de ces transformations se trouve dans les théorèmes suivants, qui sont d'ailleurs connus.

I. *Si deux substitutions elliptiques admettent pour résultante une substitution hyperbolique, dont l'axe laisse leurs points doubles d'un même côté, on construira cette substitution en menant la droite* AB *qui joint leurs points doubles* A *et* B, *et en menant par* A *et* B *des droites faisant avec* AB *d'un même côté des angles égaux à la moitié de l'angle des substitutions elliptiques. La perpendiculaire commune à ces droites est l'axe de la substitution hyperbolique, et la* L *de cette substitution hyperbolique est le double de cette perpendiculaire commune.*

II. *Si deux substitutions hyperboliques admettent pour résultante une substitution hyperbolique dont l'axe ne rencontre pas les leurs, on obtient l'axe de cette dernière en menant la perpendiculaire commune à leurs axes, en portant, à partir des pieds de cette perpendiculaire et sur les deux axes respectivement, les* $\frac{1}{2}$ L *des substitutions hyperboliques, et en élevant par les points ainsi obtenus des perpendiculaires aux deux axes. La perpendiculaire commune à ces deux dernières droites est l'axe de la substitution résultante, et la* L *de cette substitution est le double de cette perpendiculaire commune.*

III. *Si deux substitutions paraboliques admettent pour résultante une substitution hyperbolique* S, *la* L *de* S *est le double de l'intervalle compris entre les points de contact avec l'axe de* S *de deux cercles tangents à l'axe de* S, *et au cercle fondamental respectivement aux deux points doubles des deux substitutions paraboliques.*

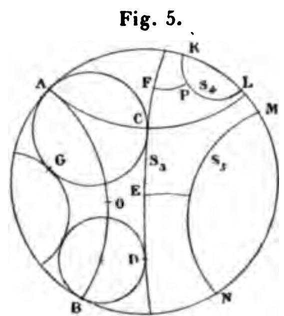
IV. *Dans les trois cas considérés précédemment, l'axe de la substitution résultante et celui de sa transformée par une des substitutions composantes sont symétriques par rapport au centre des deux substitutions composantes, dans le cas où ce centre existe.*

Nous sommes ainsi conduit par induction à admettre que les choses se passent comme il suit, dans une transformation de degré premier p.

Deux des cycles du polygone fondamental sont formés par deux substitutions paraboliques S_1 et S_2 ayant leurs points doubles en A et B (*fig.* 5), et une substitution hyperbolique S_3 ayant pour axe CD et pour L 2CD. Dans le polygone générateur d'un groupe fuchsien chaque substitution intervient précisément dans deux cycles. S_3 intervient donc dans un autre cycle et dans ce cycle seulement : elle est la résultante de deux substitutions

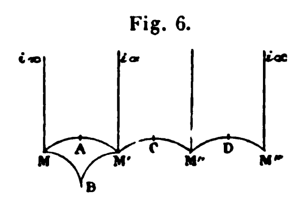
égales S_4 et S_5, qui peuvent être de période 2 ($p=5$), de période 3 ($p=7$), hyperboliques ($p>7$).

Fig. 5.



Pour $p>7$, les axes de S_4 et de S_5 sont disposés symétriquement par rapport à la droite AC, de sorte que, si E et F sont les pieds sur CD des perpendiculaires communes à CD et à ces axes, C est le milieu de EF et CD égale EF. Il résulte de cette disposition de la *fig.* 6 que les symétriques

Fig. 6.



de S_3, S_4, S_5, par rapport au point O centre des deux substitutions paraboliques S_1 et S_2, leur sont congruentes par rapport au groupe du polygone fondamental. Une substitution de période 2, ayant pour point double O, est donc permutable avec le groupe engendré par S_1, S_2, S_3, S_4, S_5.

Si $p>7$, S_4 et S_5 appartiennent à de nouveaux cycles : l'explication précédente est donc insuffisante, et il faut encore montrer comment les symétriques des substitutions de ces cycles, par rapport au point O, leur sont congruentes.

Ici intervient un nouveau fait géométrique, qu'on peut appeler *la distribution symétrique des éléments des substitutions*. Les angles du polygone fondamental autres que ceux qui sont nuls n'étant jamais inférieurs à $\frac{2\pi}{3}$, il n'y a pas de cycles contenant plus de trois substitutions. Supposons que S_4 appartienne à un cycle contenant deux autres substitutions elliptiques. Soit P le pied de la perpendiculaire commune aux axes de S_3 et de S_4.

La distance de P aux pieds des perpendiculaires abaissées des points

doubles des deux substitutions elliptiques sur l'axe de S_4 est un multiple de la $\frac{1}{2}$ L de S_4. Dans les autres cas, on a des théorèmes analogues.

Exemple : $p = 13$ (¹). — Les substitutions génératrices sont

$$S_1 S_2 = S_3, \quad S_5 S_4 = S_3, \quad S_7 S_6 = S_4, \quad S_9 S_8 = S_5,$$
$$S_6^2 = S_7^2 = S_8^2 = S_9^2 = 1.$$

Les axes de S_3 et de S_4 sont respectivement représentés par les équations

$$x^2 + y^2 - 13x + 13 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 8x + 13 = 0;$$

la perpendiculaire commune à ces deux axes est représentée par l'équation

$$x^2 + y^2 = 13,$$

et passe précisément par le point double de S_6, qui a pour affixe $\frac{7 + i\sqrt{3}}{2}$.

Les considérations précédentes peuvent s'étendre à d'autres fonctions.

Les côtés du polygone $i\infty$MAM'$i\infty$ se correspondent deux à deux M$i\infty$ et M'$i\infty$ par une substitution parabolique, MA et M'A par une substitution de période 2 (*fig.* 6).

Le produit des deux substitutions génératrices est une substitution de période 4.

Formons le polygone $i\infty$MBM'CM''DM'''$i\infty$, dans lequel M'''$i\infty$ est changé en M$i\infty$ par une substitution parabolique S_1, BM en BM' par une substitution parabolique S_2, CM' en CM'' par une substitution S_3 de période 2, DM'' en DM''' par une autre substitution de période 2, S_4. Le produit $S_1 S_2$ égale $S_4 S_3$. Comme tout à l'heure pour la transformation du cinquième ordre, envisageons deux cercles non euclidiens tangents à CD en I et H, et ayant leurs centres à l'infini, l'un en B, l'autre en E, point double de S_1. On voit que IH = CD et que le point I est le milieu de CD. Il en résulte qu'une substitution de période 2, ayant pour point double le milieu des deux points où les cercles non euclidiens rencontrent BE, donne un système de substitutions égal au système S_1, S_2, S_3, S_4, dérivant des substitutions primitives et pouvant se déduire de certaines transformées des substitutions primitives.

(¹) Se reporter à la figure qui se trouve dans les *Math. Annalen*, t. XIV, page 137, en supposant les douze triangles de gauche transportés à droite.

SUR QUELQUES

INÉGALITÉS DE LA LONGITUDE DE LA LUNE

(DEUXIÈME MÉMOIRE),

PAR M. H. ANDOYER,

Chargé d'un Cours complémentaire de Mécanique céleste
et Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Paris.

Dans ce Travail, je continue les recherches sur la théorie de la Lune commencées dans un Mémoire précédent (*Faculté de Toulouse*, t. VI). Je calcule avec la même approximation que Delaunay les coefficients des inégalités de la longitude de la Lune, qui ne dépendent que de la première puissance de l'excentricité de l'orbite de la Terre.

Ces coefficients sont en désaccord avec ceux de Delaunay à partir du huitième ordre inclusivement, toujours, et quelquefois même à partir du septième ordre.

Comme précédemment, j'ai employé, pour obtenir des résultats tout à fait certains, deux méthodes absolument distinctes, que je vais exposer brièvement : ce sont les mêmes que celles que l'on trouve dans mon premier Mémoire, mais étendues au cas où l'on suppose que l'orbite du Soleil autour de la Terre est non plus une circonférence décrite d'un mouvement uniforme, mais une courbe plane connue, parcourue suivant une loi déterminée.

Le problème à résoudre s'énonce toujours de la même façon, à cette modification près que je viens de signaler; toutes les autres hypothèses sont conservées. Je conserverai aussi les mêmes notations, observant seulement que le rayon vecteur r' du Soleil sera non plus a', mais $a'(1+\rho')$, et que sa longitude v', comptée dans le plan du mouvement, sera non plus N', mais $N'+\lambda'$; par suite aussi, l'angle H représentera $v-v'$ et non $v-N'$.

La fonction des forces devient, avec les hypothèses faites,

$$M\left[\frac{n^2a^3}{r}+\frac{n'^2}{4}\frac{a'^3}{r'^3}r^2(1+3\cos 2H)\right].$$

$$+ 2n'^4 \frac{a'^6}{r'^6} \cos 4\mathrm{H} \left[-\frac{171}{64} \frac{d^2 v}{dt^2} - \frac{135}{32} \frac{dv}{dt} \frac{\frac{dr'}{dt}}{r'} \right]$$

$$+ 2n'^4 \frac{a'^6}{r'^6} \sin 4\mathrm{H} \left[-\frac{9}{2} \frac{dv^2}{dt^2} + \frac{45}{16} \frac{dv}{dt} \frac{dv'}{dt} \right]$$

$$+ 2n'^2 \frac{a'^3}{r'^3} \cos 2\mathrm{H} \left[-\frac{15}{2} \frac{dv^2}{dt^2} \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{27}{4} \frac{dv}{dt} \frac{d^2 v}{dt^2} \frac{dv'}{dt} - \frac{3}{2} \frac{dv^2}{dt^2} \frac{d^2 v'}{dt^2} \right.$$

$$\left. - \frac{27}{2} \frac{dv^3}{dt^3} \frac{\frac{dr'}{dt}}{r'} + 9 \frac{dv^2}{dt^2} \frac{dv'}{dt} \frac{\frac{dr'}{dt}}{r'} \right]$$

$$- 2n'^2 \frac{a'^3}{r'^3} \sin 2\mathrm{H} \left[-\frac{21}{8} \frac{dv}{dt} \frac{d^3 v}{dt^3} + \frac{111}{16} \left(\frac{d^2 v}{dt^2} \right)^2 - \frac{33}{4} \frac{dv^4}{dt^4} + 9 \frac{dv^3}{dt^3} \frac{dv'}{dt} \right.$$

$$- 3 \frac{dv^2}{dt^2} \frac{dv'^2}{dt^2} - \frac{9}{8} n'^2 \frac{a'^3}{r'^3} \frac{dv^2}{dt^2} + \frac{243}{256} n'^4 \frac{a'^6}{r'^6}$$

$$\left. + \frac{81}{8} \frac{dv}{dt} \frac{d^2 v}{dt^2} \frac{\frac{dr'}{dt}}{r'} + 9 \frac{dv^2}{dt^2} \frac{\left(\frac{dr'}{dt} \right)^2}{r'^2} - \frac{9}{4} \frac{dv^2}{dt^2} \frac{\frac{d^2 r'}{dt^2}}{r'} \right].$$

λ' et ρ' sont des séries trigonométriques procédant la première suivant les sinus, la deuxième suivant les cosinus des sommes des multiples de certains arguments connus, de sorte qu'on peut écrire

$$\lambda' = \Sigma \lambda'_{p'} \sin \mathrm{V}_{p'}, \qquad \rho' = \Sigma \rho'_{p'} \cos \mathrm{V}_{p'},$$

la symétrie des séries trigonométriques étant, je le dis une fois pour toutes, toujours conservée.

Faisant alors $\mathrm{N} = nt + v_0$, $v = \mathrm{N} + \lambda$, $\mathrm{K} = \mathrm{N} - \mathrm{N}'$, et appelant G un argument convenablement déterminé de la forme $gt + \varpi$, λ sera une série trigonométrique, procédant suivant les sinus des sommes des multiples des arguments K, G, $\mathrm{V}_{p'}$; de sorte que je poserai, en désignant d'une façon générale par V_p ces nouveaux arguments,

$$\lambda = \Sigma \lambda_p \sin \mathrm{V}_p.$$

Le coefficient du temps dans V_p ou $\mathrm{V}_{p'}$ sera désigné par nk_p ou $nk_{p'}$, de façon que le rapport $\frac{n'}{n} = m$ figure seul à la place de n et n' dans les équations.

Si, maintenant, l'on développe le second membre de l'équation précédente en série trigonométrique procédant suivant les sinus des arguments

V_p, et que l'on égale à zéro le coefficient de $\sin V_p$ (V_p étant un argument quelconque), on obtient l'équation générale écrite ci-dessous, propre à déterminer par approximations successives chacun des coefficients λ_p,

$$0 = \lambda_p(k_p^4 - k_p^2)$$

$$(V_{p_1} + V_{p_2} + \ldots + V_{p'_1} + \ldots + V_{p'_i} + \ldots = V_p) \quad + \Sigma\{\lambda_{p_1}\lambda_{p_2}(2k_{p_1}k_{p_2}^4 - \tfrac{11}{2}k_{p_1}^2k_{p_2}^3 - 4k_{p_1}k_{p_2}^2)$$
$$+\lambda_{p_1}\lambda_{p_2}\lambda_{p_3}(k_{p_1}k_{p_2}k_{p_3}^4 - \tfrac{11}{2}k_{p_1}k_{p_2}^2k_{p_3}^3$$
$$+\tfrac{21}{4}k_{p_1}^2k_{p_2}^2k_{p_3}^2 - 6k_{p_1}k_{p_2}k_{p_3}^2)$$
$$+\lambda_{p_1}\lambda_{p_2}\lambda_{p_3}\lambda_{p_4}(-4k_{p_1}k_{p_2}k_{p_3}k_{p_4}^2)$$
$$+\lambda_{p_1}\lambda_{p_2}\lambda_{p_3}\lambda_{p_4}\lambda_{p_5}(-k_{p_1}k_{p_2}k_{p_3}k_{p_4}k_{p_5}^2)$$
$$+m^2[1 - 3\rho'_{p'_i} + 6\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j} - 10\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j}\rho'_{p'_h} + \ldots]$$
$$\times[\lambda_{p_1}(\tfrac{3}{2}k_{p_1}^2) + \lambda_{p_1}\lambda_{p_2}(3k_{p_1}k_{p_2}^2)$$
$$+\lambda_{p_1}\lambda_{p_2}\lambda_{p_3}(\tfrac{3}{2}k_{p_1}k_{p_2}k_{p_3}^2)]$$
$$+m^4[1 - 6\rho'_{p'_i} + 21\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j} - 56\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j}\rho'_{p'_h} + \ldots]$$
$$\times[\lambda_{p_1}(-\tfrac{171}{32}k_{p_1}^2)]$$
$$+m^2[1 - 4\rho'_{p'_i} + 10\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j} - 20\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j}\rho'_{p'_h} + \ldots]$$
$$\times[\rho'_{p'_1}(3k_{p'_1}) + \rho'_{p'_1}\lambda_{p_1}(9k_{p'_1}k_{p_1})$$
$$+\rho'_{p'_1}\lambda_{p_1}\lambda_{p_2}(9k_{p'_1}k_{p_1}k_{p_2})$$
$$+\rho'_{p'_1}\lambda_{p_1}\lambda_{p_2}\lambda_{p_3}(3k_{p'_1}k_{p_1}k_{p_2}k_{p_3})]$$
$$+m^4[1 - 7\rho'_{p'_i} + 28\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j} - 84\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j}\rho'_{p'_h} + \ldots]$$
$$\times[\rho'_{p'_1}(-\tfrac{135}{16}k_{p'_1}) + \rho'_{p'_1}\lambda_{p_1}(-\tfrac{135}{16}k_{p'_1}k_{p_1})]\}$$

$$(V_{p_1} + \ldots + V_{p'_1} + \ldots + V_p = 6K) \quad + m^6\Sigma[1 \pm 6\lambda_{p_i} + 18\lambda_{p_i}\lambda_{p_j} \pm 36\lambda_{p_i}\lambda_{p_j}\lambda_{p_h} + \ldots]$$
$$\times[1 \mp 6\lambda'_{p'_i} + 18\lambda'_{p'_i}\lambda'_{p'_j} \mp 36\lambda'_{p'_i}\lambda'_{p'_j}\lambda'_{p'_h} + \ldots]$$
$$\times[1 - 9\rho'_{p'_{i'}} + 45\rho'_{p'_{i'}}\rho'_{p'_{j'}} - 165\rho'_{p'_{i'}}\rho'_{p'_{j'}}\rho'_{p'_{h'}} + \ldots][\mp\tfrac{81}{256}]$$

$$(V_{p_1} + \ldots + V_{p'_1} + \ldots + V_p = 4K) \quad + m^4\Sigma[1 \pm 4\lambda_{p_i} + 8\lambda_{p_i}\lambda_{p_j} \pm \tfrac{32}{3}\lambda_{p_i}\lambda_{p_j}\lambda_{p_h} + \ldots]$$
$$\times[1 \mp 4\lambda'_{p'_i} + 8\lambda'_{p'_i}\lambda'_{p'_j} \mp \tfrac{32}{3}\lambda'_{p'_i}\lambda'_{p'_j}\lambda'_{p'_h} + \ldots]$$
$$\times\{[1 - 6\rho'_{p'_{i'}} + 21\rho'_{p'_{i'}}\rho'_{p'_{j'}} - 56\rho'_{p'_{i'}}\rho'_{p'_{j'}}\rho'_{p'_{h'}} + \ldots]$$
$$\times[\pm(-\tfrac{9}{2} + \tfrac{45}{16}m) + \lambda_{p_1}[\tfrac{171}{64}k_{p_1}^2 \pm k_{p_1}(-9 + \tfrac{45}{16}m)]$$
$$+\lambda_{p_1}\lambda_{p_2}(\mp\tfrac{9}{2}k_{p_1}k_{p_2})$$
$$+\lambda'_{p'_1}(\pm\tfrac{45}{16}k_{p'_1}) + \lambda'_{p'_1}\lambda_{p_1}(\pm\tfrac{45}{16}k_{p'_1}k_{p_1})]$$
$$+[1 - 7\rho'_{p'_{i'}} + 28\rho'_{p'_{i'}}\rho'_{p'_{j'}} - 84\rho'_{p'_{i'}}\rho'_{p'_{j'}}\rho'_{p'_{h'}} + \ldots]$$
$$\times[\rho'_{p'_1}(\tfrac{135}{32}k_{p'_1}) + \rho'_{p'_1}\lambda_{p_1}(\tfrac{135}{32}k_{p'_1}k_{p_1})]\}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{V}_{p_1}+\ldots+\mathbf{V}_{p'_1}+\ldots=\mathbf{V}_p+2\mathbf{K}) \quad & +m^2\,\Sigma\,[1\pm 2\lambda_{p_i}+2\lambda_{p_i}\lambda_{p_j}\pm\tfrac{4}{3}\lambda_{p_i}\lambda_{p_j}\lambda_{p_h}+\ldots]\\
& \times\ [1\mp 2\lambda'_{p'_i}+2\lambda'_{p'_i}\lambda'_{p'_j}\mp\tfrac{4}{3}\lambda'_{p'_i}\lambda'_{p'_j}\lambda'_{p'_h}+\ldots]\\
& \times\Big\{[1-3\rho'_{p'_{i'}}+6\rho'_{p'_{i'}}\rho'_{p'_{j'}}-10\rho'_{p'_{i'}}\rho'_{p'_{j'}}\rho'_{p'_{h'}}+\ldots]\\
& \qquad\times\big(\pm(-\tfrac{33}{4}+9m-3m^2)\\
& \qquad\quad+\lambda_{p_1}[\pm\tfrac{21}{8}k^3_{p_1}+k^2_{p_1}(\tfrac{15}{2}-\tfrac{27}{4}m)\\
& \qquad\qquad\qquad\pm k_{p_1}(-33+27m-6m^2)]\\
& \qquad\quad+\lambda_{p_1}\lambda_{p_2}[\pm\tfrac{21}{8}k_{p_1}k^3_{p_2}\mp\tfrac{111}{16}k^2_{p_1}k^2_{p_2}+k_{p_1}k^2_{p_2}(15-\tfrac{27}{4}m)\\
& \qquad\qquad\qquad\pm k_{p_1}k_{p_2}(-\tfrac{99}{2}+27m-3m^2)]\\
& \qquad\quad+\lambda_{p_1}\lambda_{p_2}\lambda_{p_3}[\tfrac{15}{2}k_{p_1}k_{p_2}k^2_{p_3}\pm k_{p_1}k_{p_2}k_{p_3}(-33+9m)]\\
& \qquad\quad+\lambda_{p_1}\lambda_{p_2}\lambda_{p_3}\lambda_{p_4}(\mp\tfrac{33}{4}k_{p_1}k_{p_2}k_{p_3}k_{p_4})\\
& \qquad\quad+\lambda'_{p'_1}[\tfrac{3}{2}k^2_{p'_1}+k_{p'_1}(9-6m)]\\
& \qquad\quad+\lambda'_{p'_1}\lambda_{p_1}[3k^2_{p'_1}k_{p_1}-\tfrac{27}{4}k_{p'_1}k^2_{p_1}\pm k_{p'_1}k_{p_1}(27-12m)]\\
& \qquad\quad+\lambda'_{p'_1}\lambda_{p_1}\lambda_{p_2}[\tfrac{3}{2}k^2_{p'_1}k_{p_1}k_{p_2}-\tfrac{27}{4}k_{p'_1}k_{p_1}k^2_{p_2}\\
& \qquad\qquad\qquad\pm k_{p'_1}k_{p_1}k_{p_2}(27-6m)]\\
& \qquad\quad+\lambda'_{p'_1}\lambda_{p_1}\lambda_{p_2}\lambda_{p_3}(\pm 9k_{p'_1}k_{p_1}k_{p_2}k_{p_3})\\
& \qquad\quad+\lambda'_{p'_1}\lambda'_{p'_2}(\mp 3k_{p'_1}k_{p'_2})\\
& \qquad\quad+\lambda'_{p'_1}\lambda'_{p'_2}\lambda_{p_1}(\mp 6k_{p'_1}k_{p'_2}k_{p_1})\\
& \qquad\quad+\lambda'_{p'_1}\lambda'_{p'_2}\lambda_{p_1}\lambda_{p_2}(\mp 3k_{p'_1}k_{p'_2}k_{p_1}k_{p_2})\big)\\
& \quad+[1-4\rho'_{p'_{i'}}+10\rho'_{p'_{i'}}\rho'_{p'_{j'}}-20\rho'_{p'_{i'}}\rho'_{p'_{j'}}\rho'_{p'_{h'}}+\ldots]\\
& \quad\times\big(\rho'_{p'_1}[\pm\tfrac{9}{4}k^2_{p'_1}+k_{p'_1}(\tfrac{27}{2}-9m)]\\
& \qquad\quad+\rho'_{p'_1}\lambda_{p_1}[\pm\tfrac{9}{2}k^2_{p'_1}k_{p_1}\mp\tfrac{81}{8}k_{p'_1}k^2_{p_1}\\
& \qquad\qquad\qquad+k_{p'_1}k_{p_1}(\tfrac{81}{2}-18m)]\\
& \qquad\quad+\rho'_{p'_1}\lambda_{p_1}\lambda_{p_2}[\pm\tfrac{9}{4}k^2_{p'_1}k_{p_1}k_{p_2}\\
& \qquad\qquad\qquad\mp\tfrac{81}{8}k_{p'_1}k_{p_1}k^2_{p_2}+k_{p'_1}k_{p_1}k_{p_2}(\tfrac{81}{2}-9m)]\\
& \qquad\quad+\rho'_{p'_1}\lambda_{p_1}\lambda_{p_2}\lambda_{p_3}(\tfrac{27}{2}k_{p'_1}k_{p_1}k_{p_2}k_{p_3})\\
& \qquad\quad+\rho'_{p'_1}\lambda'_{p'_2}(-9k_{p'_1}k_{p'_2})\\
& \qquad\quad+\rho'_{p'_1}\lambda'_{p'_2}\lambda_{p_1}(-18k_{p'_1}k_{p'_2}k_{p_1})\\
& \qquad\quad+\rho'_{p'_1}\lambda'_{p'_2}\lambda_{p_1}\lambda_{p_2}(-9k_{p'_1}k_{p'_2}k_{p_1}k_{p_2})\big)\\
& \quad+[1-5\rho'_{p'_{i'}}+15\rho'_{p'_{i'}}\rho'_{p'_{j'}}-35\rho'_{p'_{i'}}\rho'_{p'_{j'}}\rho'_{p'_{h'}}+\ldots]\\
& \quad\times[\rho'_{p'_1}\rho'_{p'_2}(\mp 9k_{p'_1}k_{p'_2})+\rho'_{p'_1}\rho'_{p'_2}\lambda_{p_1}(\mp 18k_{p'_1}k_{p'_2}k_{p_1})\\
& \qquad\quad+\rho'_{p'_1}\rho'_{p'_2}\lambda_{p_1}\lambda_{p_2}(\mp 9k_{p'_1}k_{p'_2}k_{p_1}k_{p_2})]\\
& \quad-m^2[1-6\rho'_{p'_{i'}}+21\rho'_{p'_{i'}}\rho'_{p'_{j'}}-56\rho'_{p'_{i'}}\rho'_{p'_{j'}}\rho'_{p'_{h'}}+\ldots]\\
& \qquad\times[\pm(-\tfrac{9}{8})+\lambda_{p_1}(\mp\tfrac{9}{4}k_{p_1})+\lambda_{p_1}\lambda_{p_2}(\mp\tfrac{9}{8}k_{p_1}k_{p_2})]\\
& \quad+m^4[1-9\rho'_{p'_{i'}}+45\rho'_{p'_{i'}}\rho'_{p'_{j'}}-165\rho'_{p'_{i'}}\rho'_{p'_{j'}}\rho'_{p'_{h'}}+\ldots]\\
& \qquad\times[\pm\tfrac{243}{256}]\Big\}.
\end{aligned}
$$



[illegible] si l'on se reporte aux explications don- [illegible] les sommations indiquées devront être [illegible] des différentes permutations pos- [illegible] qui vérifient les conditions [illegible] toutefois que je n'ai pas développé [illegible] comprennent un nombre infini de termes; [illegible] on a de cette façon l'avantage de mettre [illegible] de ces facteurs qui proviennent, comme on [illegible] de certaines puissances négatives [illegible] des sinus et cosinus de certains multiples [illegible]

[illegible] se reporte aux résultats obtenus dans mon Mémoire : [illegible] *de la Mécanique céleste* (*Faculté de Tou-* [illegible] on voit d'abord, en adoptant les notations qui y sont em- [illegible] en se souvenant des hypothèses faites, que l'on doit faire [illegible] $a = a_3$, $\lambda' = \lambda_3$, $\rho' = \rho_3$; et, comme on suppose l'orbite du [illegible] autour de la Terre située tout entière dans le plan des xy, on lais- [illegible] de côté dans λ' et ρ' tous les termes qui dépendent des constantes η_i correspondant aux inclinaisons. Si l'on convient, en outre, de ne gar- der dans λ' et ρ' que les parties d'ordre zéro par rapport aux masses des huit systèmes planétaires, on voit que ces quantités pourront s'écrire sous la forme

$$\lambda' = \Sigma\lambda'_{p_1^{(1)}, p_2^{(2)}, \ldots} \sin[p^{(1)}(\mathrm{N}_3 - \mathrm{G}_1) + p^{(2)}(\mathrm{N}_3 - \mathrm{G}_2) + \ldots],$$

$$\rho' = \Sigma\rho'_{p_1^{(1)}, p_2^{(2)}, \ldots} \cos[p^{(1)}(\mathrm{N}_3 - \mathrm{G}_1) + p^{(2)}(\mathrm{N}_3 - \mathrm{G}_2) + \ldots],$$

les G_i étant les arguments définis dans le Mémoire cité, de la forme $g_i t + \varpi_i$, et les coefficients $\lambda'_{p_1^{(1)}, p_2^{(2)}, \ldots}$, $\rho'_{p_1^{(1)}, p_2^{(2)}, \ldots}$ étant les coefficients cor- respondants de λ_3 et ρ_3 réduits à leurs parties d'ordre zéro par rapport aux masses et indépendantes des η_i. Quant aux quantités g_i, elles sont du premier ordre par rapport aux masses, et on les négligera par suite (quand elles figurent en dehors des arguments) devant les quantités d'ordre zéro par rapport à ces masses; dans le cas où l'on devra les conserver, on les réduira à leurs parties du premier ordre et indépendantes des η_i, que j'appellerai ng'_i.

Désignant toujours par ε_1, ε_2, ... les constantes correspondant aux



excentricités, on aura d'ailleurs

$$\lambda'_{p_1^{(1)}, p_2^{(2)}, \ldots} = \varepsilon_1^{|p^{(1)}|} \varepsilon_2^{|p^{(2)}|} \ldots \Sigma \varepsilon_1^{q^{(1)}} \varepsilon_2^{q^{(2)}} \ldots \lambda'^{(q_1^{(1)}, q_2^{(2)}, \ldots)}_{p_1^{(1)}, p_2^{(2)}, \ldots},$$

$$\rho'_{p_1^{(1)}, p_2^{(2)}, \ldots} = \varepsilon_1^{|p^{(1)}|} \varepsilon_2^{|p^{(2)}|} \ldots \Sigma \varepsilon_1^{q^{(1)}} \varepsilon_2^{q^{(2)}} \ldots \rho'^{(q_1^{(1)}, q_2^{(2)}, \ldots)}_{p_1^{(1)}, q_2^{(2)}, \ldots},$$

$$g'_i = \Sigma \varepsilon_1^{q^{(1)}} \varepsilon_2^{q^{(2)}} \ldots g_i'^{(q_1^{(1)}, q^{(2)}, \ldots)},$$

$q^{(1)}$, $q^{(2)}$, ... étant des entiers pairs positifs ou nuls.

Les nouveaux coefficients ne dépendent plus que des seules masses des systèmes planétaires, et sont d'ordre zéro par rapport à ces masses, qui, dans la plupart des cas, par suite, n'y figureront pas.

On voit encore que, sans craindre aucune ambiguïté, on pourra se dispenser d'écrire les indices nuls parmi ceux qui affectent les divers coefficients que je viens de définir, en convenant toutefois de remplacer par zéro un ensemble d'indices correspondants tous nuls. C'est ainsi que, si j'appelle ε_i le coefficient de $\sin(N_3 - G_i)$ dans λ_3 (1), je pourrai écrire $\lambda'_{1_i} = \varepsilon_i$, et, par suite, $\lambda'^{(0)}_{1_i} = 1$; on en déduit facilement $\rho'^{(0)}_{1_i} = -\frac{1}{2}$.

Par suite des simplifications introduites, dont il serait facile ultérieurement de s'affranchir, mais qui correspondent aux conditions dans lesquelles on a l'habitude de traiter le mouvement de la Lune, on aura, pour λ, la forme suivante :

$$\lambda = \Sigma \lambda_{h, p, p_1^{(1)}, p_2^{(2)}, \ldots} \sin[hK + pG + p^{(1)}(N_3 - G_1) + p^{(2)}(N_3 - G_2) + \ldots];$$

et, en outre, on pourra écrire

$$\lambda_{h, p, p_1^{(1)}, p_2^{(2)}, \ldots} = \varepsilon^{|p|} \varepsilon^{|p^{(1)}|} \varepsilon^{|p^{(2)}|} \ldots \Sigma \varepsilon^q \varepsilon_1^{q^{(1)}} \varepsilon_2^{q^{(2)}} \ldots \lambda^{(q, q_1^{(1)}, q_2^{(2)}, \ldots)}_{h, p, p_1^{(1)}, p_2^{(2)}, \ldots},$$

de même

$$g = n \Sigma \varepsilon^q \varepsilon_1^{q^{(1)}} \varepsilon_2^{q^{(2)}} \ldots g_{q, q_1^{(1)}, q_2^{(2)}, \ldots},$$

q, $q^{(1)}$, $q^{(2)}$, ... étant des entiers pairs positifs ou nuls, et les nouveaux coefficients ne dépendant plus que de m et des coefficients $\lambda'^{(q_1^{(1)}, \ldots)}_{p_1^{(1)}, \ldots}$, $\rho'^{(q_1^{(1)}, \ldots)}_{p_1^{(1)}, \ldots}$, $g_i'^{(q_1^{(1)}, \ldots)}$ définis en dernier lieu. On pourra d'ailleurs partout se dispenser d'écrire les indices $p^{(i)}$ ou $q^{(i)}$ qui seraient nuls; mais on conservera tou-

(1) Dans le Mémoire cité, ε_i désigne le coefficient de $\cos(N_3 - G_i)$ dans ρ_3; la convention faite ici rapproche les notations de celles qu'on a l'habitude d'employer.

jours les indices h, p, q même nuls. C'est ainsi que l'on a $\lambda_{0,1} = \varepsilon$, et, par suite, $\lambda^{(0)}_{0,1} = 1$.

Dans le présent travail, je calcule les parties des coefficients λ_p qui sont du premier degré par rapport aux quantités ε_i, c'est-à-dire les coefficients $\lambda^{(0)}_{h,0,\pm 1}$: l'approximation que je me propose d'obtenir étant celle de Delaunay, il suffira de faire $h = 0, 2, 4, 6$. On voit que dans le calcul on pourra négliger g_i partout, et que les coefficients cherchés sont indépendants de l'indice i et ne renferment que m et non les masses des systèmes planétaires, puisque $\lambda^{(0)}_{1,i} = 1$ et $g^{(0)}_{1,i} = -\frac{1}{2}$.

Ces coefficients seront, par suite, développés en séries ordonnées suivant les puissances de m; l'ordre de $\lambda^{(0)}_{h,0,\pm 1}$ par rapport à m sera manifestement h, sauf dans le cas de $h = 0$, où cet ordre sera un.

Les formules du premier Mémoire, qui donnent g_0 et $\lambda^{(0)}_{h,\pm 1}$ pour les mêmes valeurs de h, vont s'appliquer au présent calcul avec les modifications suivantes : g_0 sera remplacé par m, $\lambda^{(0)}_{h,\pm 1}$ par $\lambda^{(0)}_{h,0,\pm 1}$, et partout où il n'y aura pas de facteur de la forme $\lambda^{(0)}_{h,\pm 1}$, on mettra le facteur $\lambda^{(0)}_{0,0,\pm 1}$ (précédemment, en effet, l'unité remplaçait $\lambda^{(0)}_{0,1}$); on pourra supprimer les termes assez nombreux d'un ordre supérieur à celui qu'on doit obtenir et qui sera indiqué plus bas; enfin les seconds membres de chaque formule devront être complétés par de nouveaux termes que seuls je vais écrire en même temps que les premiers termes. Toutes les explications données précédemment s'appliquent d'ailleurs sans modification aux formules actuelles que voici :

$\lambda^{(0)}_{0,0,1}$, jusqu'au neuvième ordre :

(1) $\lambda^{(0)}_{0,0,1}[m^2 - m^2 - 1 - \frac{1}{2}m^2 - \frac{171}{32}m^4]$

$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\frac{3}{2}m^3 + \frac{135}{32}m^5 - (\lambda^{(0)}_{2,0})^2[-36m^3\mu^2] - (\lambda^{(0)}_{4,0})^2[-144m^3\mu^2] - \lambda^{(0)}_{2,0}\lambda^{(0)}_{4,0}[-144m^3\mu^2]$$

$$+ m^4\lambda^{(0)}_{4,0}[342\mu^2 - \mu(288 - 90m) - 144 - 90m - \tfrac{135}{4}m\mu - \tfrac{135}{4}m]$$

$$+ m^4(\lambda^{(0)}_{2,0})^2[-198\mu^2 - \mu(-576 - 180m) - 288 - 180m - \tfrac{135}{4}m\mu - \tfrac{135}{4}m]$$

$$+ m^2\lambda^{(0)}_{2,0}[-84\mu^3 - \mu^2(120 - 108m) - \mu(264 - 216m - 66m^2) - 66 - 72m - 33m^2$$
$$+ \tfrac{225}{32}m^4 - \tfrac{81}{2}m\mu^2 - m\mu(-81 - 36m) - m(27 - 18m) - 12m^2\mu - 6m^2]$$

$$+ m^2\lambda^{(0)}_{2,0}\lambda^{(0)}_{4,0}[-5232\mu^4 - \mu^3(-216 - 432m) - \mu^2(4368 - 2808m + 264m^2)$$
$$- \mu(528 - 432m - 132m^2) - 132 - 144m - 66m^2 - \tfrac{225}{16}m^4$$
$$- 162m\mu^3 - m\mu^2(-1053 - 144m) - m\mu(-162 - 72m)$$
$$+ m(54 - 36m) - 48m^2\mu^2 + 24m^2\mu - 12m^2]$$

$$+ m^2(\lambda_{2,0}^{(0)})^3[3480\mu^4 + \mu^3(4296 - 1296m) + \mu^2(-2304 + 1512m - 132m^2)$$
$$+ \mu(-528 + 432m - 132m^2) + 132 - 144m + 66m^2 - \tfrac{243}{16}m^4$$
$$- 486m\mu^3 + m\mu^2(567 - 72m) + m\mu(162 - 72m) + m(-54 + 36m)$$
$$- 24m^2\mu^2 - 24m^2\mu + 12m^2]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$\lambda_{2,0,1_i}^{(0)}$ jusqu'au neuvième ordre :

$$0 = \lambda_{2,0,1_i}^{(0)}[(2\mu + m)^4 + (2\mu + m)^2(-1 + \tfrac{3}{2}m^2 - \tfrac{171}{32}m^4)]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \lambda_{2,0}^{(0)}[\mu^2(9m^2 - \tfrac{513}{8}m^4) + \mu(-9m^3 + \tfrac{135}{16}m^5)]$$
$$+ \lambda_{2,0}^{(0)}\lambda_{4,0}^{(0)}[72\mu^3m^2 - 72\mu^2m^3] + (\lambda_{2,0}^{(0)})^3[36\mu^4m^2 - 36\mu^3m^3]$$
$$+ m^4\lambda_{2,0}^{(0)}[\tfrac{171}{16}\mu^2 + \mu(18 - \tfrac{45}{8}m) - 18 + \tfrac{45}{4}m + \tfrac{45}{32}m\mu - \tfrac{45}{16}m]$$
$$+ m^2[\tfrac{33}{8} - \tfrac{9}{4}m - \tfrac{3}{4}m^2 + \tfrac{12215}{512}m^4]$$
$$+ m^2\lambda_{4,0}^{(0)}[-588\mu^3 + \mu^2(420 - 378m) + \mu(462 - 378m + 129m^2) - \tfrac{231}{4} + 63m$$
$$- \tfrac{129}{4}m^2 + \tfrac{31159}{256}m^4 - 189m\mu^2 + m\mu(-189 + 84m)$$
$$+ m(\tfrac{63}{2} - 21m) + 21m^2\mu - \tfrac{21}{4}m^2]$$
$$+ m^2(\lambda_{2,0}^{(0)})^2[\tfrac{177}{2}\mu^4 + \mu^3(567 - 189m) + \mu^2(741 - 351m + \tfrac{135}{2}m^2)$$
$$+ \mu(-462 + 378m - 129m^2) + \tfrac{165}{4} - 45m + \tfrac{123}{4}m^2 - \tfrac{5589}{256}m^4$$
$$- \tfrac{189}{2}m\mu^3 + m\mu^2(-\tfrac{27}{2} + 30m) + m\mu(189 - 84m)$$
$$+ m(-\tfrac{81}{2} + 27m) + \tfrac{27}{2}m^2\mu^2 - 21m^2\mu + \tfrac{15}{4}m^2]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$\lambda_{2,0,-1_i}^{(0)}$ jusqu'au neuvième ordre :

$$0 = \lambda_{2,0,-1_i}^{(0)}[(2\mu - m)^4 + (2\mu - m)^2(-1 + \tfrac{3}{2}m^2 - \tfrac{171}{32}m^4)]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \lambda_{2,0}^{(0)}[\mu^2(9m^2 - \tfrac{513}{8}m^4) + \mu(9m^3 - \tfrac{135}{16}m^5)]$$
$$+ \lambda_{2,0}^{(0)}\lambda_{4,0}^{(0)}[72\mu^3m^2 + 72\mu^2m^3] + (\lambda_{2,0}^{(0)})^3[36\mu^4m^2 + 36\mu^3m^3]$$
$$+ m^4\lambda_{2,0}^{(0)}[-\tfrac{1197}{16}\mu^2 + \mu(-126 + \tfrac{315}{8}m) + 126 - \tfrac{315}{4}m + \tfrac{315}{32}m\mu - \tfrac{315}{16}m]$$
$$+ m^2[-\tfrac{231}{8} + \tfrac{189}{4}m - \tfrac{117}{4}m^2 + \tfrac{3159}{512}m^4].$$
$$+ m^2\lambda_{4,0}^{(0)}[84\mu^3 + \mu^2(-60 + 54m) + \mu(-66 + 54m - 3m^2) + \tfrac{33}{4} - 9m + \tfrac{3}{4}m^2$$
$$+ \tfrac{1215}{256}m^4 - 27m\mu^2 + m\mu(-27 + 12m) + m(\tfrac{9}{2} - 3m) - 3m^2\mu + \tfrac{3}{4}m^2]$$
$$+ m^2(\lambda_{2,0}^{(0)})^2[\tfrac{2073}{2}\mu^4 + \mu^3(-81 + 27m) + \mu^2(-1875 + 1161m - \tfrac{261}{2}m^2)$$
$$+ \mu(66 - 54m + 3m^2) + \tfrac{499}{4} - 117m + \tfrac{255}{4}m^2 - \tfrac{7533}{256}m^4$$
$$- \tfrac{27}{2}m\mu^3 + m\mu^2(\tfrac{1107}{2} - 78m) + m\mu(27 - 12m) + m(-\tfrac{135}{2} + 45m$$
$$- \tfrac{45}{2}m^2\mu^2 + 3m^2\mu + \tfrac{39}{4}m^2]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$\lambda^{(0)}_{4,0,1,}$ jusqu'au septième ordre :

$$\begin{aligned}
o = \; & \lambda^{(0)}_{4,0,1,}[(4\mu+m)^4+(4\mu+m)^2(-1+\tfrac{3}{2}m^2-\tfrac{171}{32}m^4)] \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \lambda^{(0)}_{4,0}[\mu^2(36m^2-\tfrac{513}{2}m^4)+\mu(-18m^3+\tfrac{135}{8}m^5)] \\
& + (\lambda^{(0)}_{2,0})^2[36\mu^3m^2-18\mu^2m^3] \\
& + m^4[\tfrac{9}{4}-\tfrac{135}{64}m] \\
& + m^2\lambda^{(0)}_{2,0}[-\tfrac{21}{2}\mu^3+\mu^2(-15+\tfrac{27}{2}m)+\mu(33-27m+\tfrac{3}{2}m^2)+\tfrac{33}{4}-9m+\tfrac{3}{4}m^2 \\
& \qquad + \tfrac{1215}{256}m^4-\tfrac{27}{4}m\mu^2+m\mu(\tfrac{27}{2}-6m)+m(\tfrac{9}{2}-3m)+\tfrac{3}{2}m^2\mu+\tfrac{3}{4}m^2] \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$\lambda^{(0)}_{4,0,-1,}$ jusqu'au septième ordre :

$$\begin{aligned}
o = \; & \lambda^{(0)}_{4,0,-1,}[(4\mu-m)^4+(4\mu-m)^2(-1+\tfrac{3}{2}m^2-\tfrac{171}{32}m^4)] \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \lambda^{(0)}_{4,0}[\mu^2(36m^2-\tfrac{513}{2}m^4)+\mu(18m^3-\tfrac{135}{8}m^5)] \\
& + (\lambda^{(0)}_{2,0})^2[36\mu^3m^2+18\mu^2m^3] \\
& + m^4[-\tfrac{63}{2}+\tfrac{1575}{64}m] \\
& + m^2\lambda^{(0)}_{2,0}[\tfrac{147}{2}\mu^3+\mu^2(105-\tfrac{189}{2}m)+\mu(-231+189m-\tfrac{129}{2}m^2)-\tfrac{231}{4}+63m \\
& \qquad -\tfrac{129}{4}m^2+\tfrac{3159}{256}m^4-\tfrac{189}{4}m\mu^2+m\mu(\tfrac{189}{2}-42m)+m(\tfrac{63}{2}-21m) \\
& \qquad -\tfrac{21}{2}m^2\mu-\tfrac{21}{4}m^2] \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Il serait facile d'écrire les formules qui permettent de calculer $\lambda^{(0)}_{6,0,\pm 1,}$ jusqu'au neuvième ordre; c'est en effet le résultat de la première approximation. Comme je ne ferai pas usage de ces formules, j'écris seulement les termes complémentaires nécessaires pour obtenir le sixième ordre.

$\lambda^{(0)}_{6,0,1,}$ jusqu'au sixième ordre :

$$\begin{aligned}
o = \; & \lambda^{(0)}_{6,0,1,}[(6\mu+m)^4+(6\mu+m)^2(-1+\tfrac{3}{2}m^2-\tfrac{171}{32}m^4)] \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + m^6[\tfrac{243}{512}] \\
& + m^4\lambda^{(0)}_{2,0}[-\tfrac{171}{16}\mu^2+18\mu+18+\ldots] \\
& + m^2\lambda^{(0)}_{4,0}[-84\mu^3-60\mu^2+66\mu+\tfrac{33}{4}+\ldots] \\
& + m^2(\lambda^{(0)}_{2,0})^2[\tfrac{69}{2}\mu^4-81\mu^3+69\mu^2+66\mu+\tfrac{33}{4}+\ldots] \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$\lambda^{(0)}_{6,0,-1_i}$ jusqu'au sixième ordre :

$$\begin{aligned}
0 = \;& \lambda^{(0)}_{6,0,-1_i}\left[(6\mu - m)^4 + (6\mu - m)^2\left(-1 + \tfrac{3}{2}m^2 - \tfrac{171}{32}m^4\right)\right] \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ m^6\left[-\tfrac{1701}{512}\right] \\
&+ m^4\lambda^{(0)}_{2,0}\left[\tfrac{1197}{16}\mu^2 - 126\mu - 126 + \ldots\right] \\
&+ m^2\lambda^{(0)}_{4,0}\left[588\mu^3 + 420\mu^2 - 462\mu - \tfrac{231}{4} + \ldots\right] \\
&+ m^2(\lambda^{(0)}_{2,0})^2\left[-\tfrac{483}{2}\mu^4 + 567\mu^3 - 483\mu^2 - 462\mu - \tfrac{231}{4} + \ldots\right] \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

On trouvera plus loin les valeurs des inconnues, qui sont identiques avec celles fournies par la seconde méthode que j'ai employée et que je vais exposer maintenant.

Cette méthode est une extension immédiate de celle que j'ai exposée d'après M. Hill dans mon premier Mémoire.

Je prends les équations du mouvement sous la forme

$$\frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{dt^2} - \frac{f(M+M_0)}{r} - 2\int(dR) - r\frac{\partial R}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{dv^2}{dt^2} - \frac{1}{r}\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{f(M+M_0)}{r^3} + \frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial r} = 0,$$

où

$$R = \frac{n'^2}{4}\frac{a'^3}{r'^3}r^2(1 + 3\cos 2H) \quad \text{et} \quad (dR) = \frac{\partial R}{\partial r}dr + \frac{\partial R}{\partial v}dv.$$

Éliminant f entre ces deux équations, j'obtiens la suivante :

$$2r\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{dr^2}{dt^2} - r^2\frac{dv^2}{dt^2} - 2\int(dR) - 2r\frac{\partial R}{\partial r} = 0,$$

à laquelle je joins

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{dv}{dt}\right) - \frac{\partial R}{\partial v} = 0.$$

Remplaçant R par sa valeur, ces équations s'écrivent

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{dv}{dt}\right) + \frac{3}{2}n'^2\frac{a'^3}{r'^3}r^2\sin 2H = 0,$$

$$2r\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{dr^2}{dt^2} - r^2\frac{dv^2}{dt^2} - n'^2\frac{a'^3}{r'^3}r^2(1 + 3\cos 2H)$$
$$- \frac{n'^2}{2}\int\left\{d\left[r^2\frac{a'^3}{r'^3}(1 + 3\cos 2H)\right]\right\} = 0.$$

Si alors on fait

$$r\cos\lambda = x = \alpha(1 + \Sigma x_p \cos V_p),$$
$$r\sin\lambda = y = \alpha\Sigma y_p \sin V_p,$$

les V_p étant les mêmes arguments que précédemment et α une constante à déterminer, ces équations deviennent d'abord

$$\frac{d}{dt}\left[n(x^2+y^2) + x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right] + 3n'^2\frac{a'^3}{r'^3}xy\cos 2(\mathrm{K}-\lambda') + \frac{3}{2}n'^2\frac{a'^3}{r'^3}(x^2-y^2)\sin 2(\mathrm{K}-\lambda') = 0,$$

$$\begin{aligned}
&2\left(x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2}\right) + \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} - 2n\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) - n^2(x^2+y^2)\\
&\quad - n'^2\left\{\frac{a'^3}{r'^3}(x^2+y^2) + \frac{1}{2}\int\left(d\left[\frac{a'^3}{r'^3}(x^2+y^2)\right]\right)\right\}\\
&\quad - 3n'^2\left\{\frac{a'^3}{r'^3}(x^2-y^2)\cos 2(\mathrm{K}-\lambda') + \frac{1}{2}\int\left(d\left[\frac{a'^3}{r'^3}(x^2-y^2)\cos 2(k-\lambda')\right]\right)\right\}\\
&\quad + 6n'^2\left\{\frac{a'^3}{r'^3}\,xy\,\sin 2(\mathrm{K}-\lambda') + \frac{1}{2}\int\left(d\left[\frac{a'^3}{r'^3}\,xy\,\sin 2(k-\lambda')\right]\right)\right\} = 0.
\end{aligned}$$

Puis, développant les premiers membres en séries trigonométriques, et égalant à zéro le coefficient de $\sin V_p$ dans la première équation et celui de $\cos V_p$ dans la seconde, V_p étant un argument quelconque (0 exclu), on obtient les deux équations fondamentales suivantes, que l'on comprendra comme celle qui donne λ_p :

$$V_{p_1} + V_{p_2} = V_p) \qquad \Sigma[k_p(k_{p_1} - k_{p_2})x_{p_1}y_{p_2} + k_p(y_{p_1}y_{p_2} - x_{p_1}x_{p_2})]$$

$$\begin{aligned}
V_{p_1} + V_{p_2} + V_{p'_i} + \ldots = V_p \mp 2\mathrm{K}) \qquad &\pm\tfrac{3}{2}m^2\Sigma(1 - 3\rho'_{p'_i} + 6\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j} - 10\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j}\rho'_{p'_h} + \ldots)\\
&\times(1 \mp 2\lambda'_{p'_{i'}} + 2\lambda'_{p'_{i'}}\lambda'_{p'_{j'}} \mp \tfrac{4}{3}\lambda'_{p'_{i'}}\lambda'_{p'_{j'}}\lambda'_{p'_{h'}} + \ldots)\\
&\times(\tfrac{1}{2}y_{p_1}y_{p_2} + \tfrac{1}{2}x_{p_1}x_{p_2} \pm x_{p_1}y_{p_2}) = 0.
\end{aligned}$$

$$V_{p_1} + V_{p_2} = V_p) \qquad \Sigma[(k_{p_1}k_{p_2} - k_p^2 - 1)(y_{p_1}y_{p_2} - x_{p_1}x_{p_2}) - 2(k_{p_1} - k_{p_2})x_{p_1}y_{p_2}]$$

$$\begin{aligned}
V_{p_1} + V_{p_2} + V_{p'_i} + \ldots = V_p) \qquad &-\frac{m^2}{2k_p}\Sigma(3k_p - k_{p'_i} - k_{p'_j} - \ldots)\\
&\times(1 - 3\rho'_{p'_i} + 6\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j} - 10\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j}\rho'_{p'_h} + \ldots)\\
&\times(y_{p_1}y_{p_2} - x_{p_1}x_{p_2})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{V}_{p_1}+\mathrm{V}_{p_2}+\mathrm{V}_{p'_i}+\ldots=\mathrm{V}_p\mp 2\mathrm{K}) \quad +\frac{3m^2}{2k_p}\Sigma(3k_p\pm 2m-k_{p'_i}-k_{p'_j}-\ldots)\\
&\qquad\times(1-3\rho'_{p'_i}+6\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j}-10\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j}\rho'_{p'_h}+\ldots)\\
&\qquad\times(1\mp 2\lambda'_{p'_{i'}}+2\lambda'_{p'_{i'}}\lambda'_{p'_{j'}}\mp\tfrac{4}{3}\lambda'_{p'_{i'}}\lambda'_{p'_{j'}}\lambda'_{p'_{h'}}+\ldots)\\
&\qquad\times(\tfrac{1}{2}y_{p_1}y_{p_2}+\tfrac{1}{2}x_{p_1}x_{p_2}\pm x_{p_1}y_{p_2})=0.
\end{aligned}
$$

On remarquera que, pour obtenir ces deux équations fondamentales, l'artifice employé dans le premier Mémoire a été inutile : il a suffi d'appliquer la définition de $\int(d\mathrm{R})$.

Ces équations peuvent être transformées et utilisées de bien des façons. Dans la première ligne de chacune d'elles, je mets en évidence les termes qui proviennent de la combinaison $\left.\begin{matrix}\mathrm{V}_{p_1}\\ \mathrm{V}_{p_2}\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}0\\ \mathrm{V}_p\end{matrix}\right.$, et je résous par rapport à y_p et x_p mis ainsi en évidence; j'obtiens

$$
(k_p^4-k_p^2)y_p=\left\{
\begin{aligned}
&\left.\begin{matrix}\mathrm{V}_{p_1}+\mathrm{V}_{p_2}=\mathrm{V}_p\\ \mathrm{V}_{p_1},\mathrm{V}_{p_2}\neq 0\end{matrix}\right) && 2k_p\Sigma\tfrac{1}{2}k_{p_1}k_{p_2}(y_{p_1}y_{p_2}-x_{p_1}x_{p_2})\\
& && +k_p(k_p^2-1)\Sigma(k_{p_1}-k_{p_2})x_{p_1}y_{p_2}\\
&\mathrm{V}_{p_1}+\mathrm{V}_{p_2}+\mathrm{V}_{p'_i}+\ldots=\mathrm{V}_p) && -m^2\Sigma(3k_p-k_{p'_i}-k_{p'_j}-\ldots)\\
& && \quad\times(1-3\rho'_{p'_i}+6\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j}-10\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j}\rho'_{p'_h}+\ldots)\\
& && \quad\times\tfrac{1}{2}(y_{p_1}y_{p_2}-x_{p_1}x_{p_2})\\
&\mathrm{V}_{p_1}+\mathrm{V}_{p_2}+\mathrm{V}_{p'_i}+\ldots=\mathrm{V}_p\mp 2\mathrm{K}) && +m^2\Sigma[\tfrac{9}{2}k_p-\tfrac{3}{2}(k_{p'_i}+k_{p'_j}+\ldots)\pm\tfrac{3}{2}(k_p^2+1+2m)]\\
& && \quad\times(1-3\rho'_{p'_i}+6\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j}-10\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j}\rho'_{p'_h}+\ldots)\\
& && \quad\times(1\mp 2\lambda'_{p'_{i'}}+2\lambda'_{p'_{i'}}\lambda'_{p'_{j'}}\mp\tfrac{4}{3}\lambda'_{p'_{i'}}\lambda'_{p'_{j'}}\lambda'_{p'_{h'}}+\ldots)\\
& && \quad\times(\tfrac{1}{2}y_{p_1}y_{p_2}+\tfrac{1}{2}x_{p_1}x_{p_2}\pm x_{p_1}y_{p_2}).
\end{aligned}\right.
$$

$$
x_p=\left\{
\begin{aligned}
& &&\left.\begin{matrix}\mathrm{V}_{p_1}+\mathrm{V}_{p_2}=\mathrm{V}_p\\ \mathrm{V}_{p_1},\mathrm{V}_{p_2}\neq 0\end{matrix}\right) && \Sigma\tfrac{1}{2}(y_{p_1}y_{p_2}-x_{p_1}x_{p_2})\\
&+\frac{1}{k_p(1-k_p^2)}\times\Bigg\{ &&\mathrm{V}_{p_1}+\mathrm{V}_{p_2}=\mathrm{V}_p) && k_p\Sigma\tfrac{1}{2}k_{p_1}k_{p_2}(y_{p_1}y_{p_2}-x_{p_1}x_{p_2})\\
& &&\mathrm{V}_{p_1}+\mathrm{V}_{p_2}+\mathrm{V}_{p'_i}+\ldots=\mathrm{V}_p) && -\frac{m^2}{2}\Sigma(3k_p-k_{p'_i}-k_{p'_j}-\ldots)\\
& && && \quad\times(1-3\rho'_{p'_i}+6\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j}-10\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j}\rho'_{p'_h}+\ldots)\\
& && && \quad\times\tfrac{1}{2}(y_{p_1}y_{p_2}-x_{p_1}x_{p_2})\\
& &&\mathrm{V}_{p_1}+\mathrm{V}_{p_2}+\mathrm{V}_{p'_i}+\ldots=\mathrm{V}_p\mp 2\mathrm{K}) && +m^2\Sigma[\tfrac{9}{4}k_p-\tfrac{3}{4}(k_{p'_i}+k_{p'_j}+\ldots)\pm\tfrac{3}{2}(1+m)]\\
& && && \quad\times(1-3\rho'_{p'_i}+6\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j}-10\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j}\rho'_{p'_h}+\ldots)\\
& && && \quad\times(1\mp 2\lambda'_{p'_{i'}}+2\lambda'_{p'_{i'}}\lambda'_{p'_{j'}}\mp\tfrac{4}{3}\lambda'_{p'_{i'}}\lambda'_{p'_{j'}}\lambda'_{p'_{h'}}+\ldots)\\
& && && \quad\times(\tfrac{1}{2}y_{p_1}y_{p_2}+\tfrac{1}{2}x_{p_1}x_{p_2}\pm x_{p_1}y_{p_2})\Big\}.
\end{aligned}\right.
$$

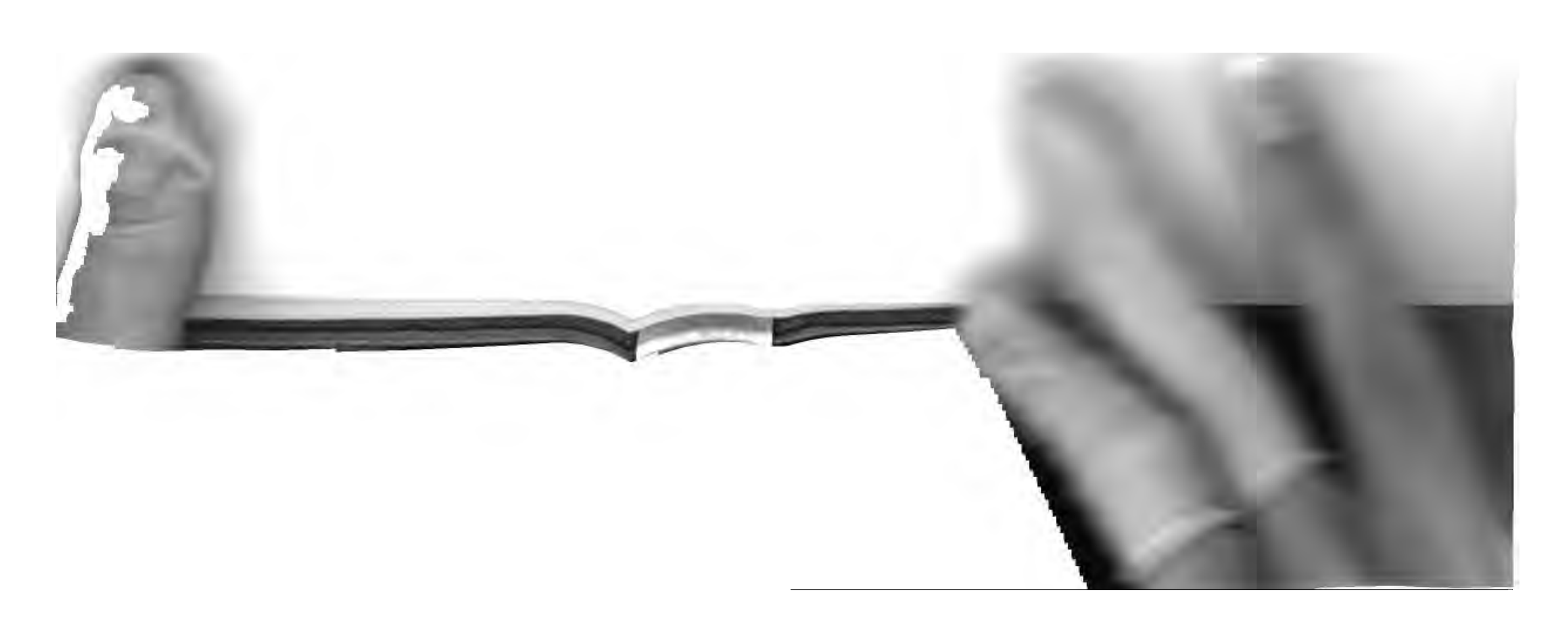
Mais on peut encore employer les formules suivantes, qui se rapprochent davantage de celles qu'on trouve dans le premier Mémoire et qu'on obtient d'une façon tout à fait semblable,

$$k_p^2(k_p^2 - 1 + \tfrac{3}{2}m^2)y_p = \left\{\begin{array}{ll}
\left.\begin{array}{l} \mathbf{V}_{p_1}+\mathbf{V}_{p_2}=\mathbf{V}_p \\ \mathbf{V}_{p_1}, \mathbf{V}_{p_2} \neq 0 \end{array}\right) & 2k_p \Sigma \tfrac{1}{2} k_{p_1} k_{p_2}(y_{p_1}y_{p_2} - x_{p_1}x_{p_2}) \\
& \quad + k_p(k_p^2 - 1 + \tfrac{3}{2}m^2)\Sigma(k_{p_1} - k_{p_2})x_{p_1}y_{p_2} \\
\mathbf{V}_{p_1}+\mathbf{V}_{p_2}+\mathbf{V}_{p'_i}+\ldots=\mathbf{V}_p) & + m^2\Sigma(3k_p - k_{p'_i} - k_{p'_j} - \ldots) \\
& \quad \times(3\rho'_{p'_i} - 6\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j} + 10\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j}\rho'_{p'_h} - \ldots) \\
& \quad \times \tfrac{1}{2}(y_{p_1}y_{p_2} - x_{p_1}x_{p_2}) \\
\mathbf{V}_{p_1}+\mathbf{V}_{p_2}+\mathbf{V}_{p'_i}+\ldots=\mathbf{V}_p \mp 2\mathbf{K}) & + m^2\Sigma[\tfrac{9}{2}k_p - \tfrac{3}{2}(k_{p'_i} + k_{p'_j} + \ldots) \\
& \qquad \pm \tfrac{3}{2}(k_p^2 + 1 + 2m + \tfrac{3}{2}m^2)] \\
& \quad \times(1 - 3\rho'_{p'_i} + 6\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j} - 10\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j}\rho'_{p'_h} + \ldots) \\
& \quad \times(1 \mp 2\lambda'_{p'_{i'}} + 2\lambda'_{p'_{i'}}\lambda'_{p'_{j'}} \mp \tfrac{4}{3}\lambda'_{p'_{i'}}\lambda'_{p'_{j'}}\lambda'_{p'_{h'}} + \ldots) \\
& \quad \times(\tfrac{1}{2}y_{p_1}y_{p_2} + \tfrac{1}{2}x_{p_1}x_{p_2} \pm x_{p_1}y_{p_2}).
\end{array}\right.$$

$$x_p = -\frac{k_p}{2}y_p + \left\{\begin{array}{ll}
\left.\begin{array}{l} \mathbf{V}_{p_1}+\mathbf{V}_{p_2}=\mathbf{V}_p \\ \mathbf{V}_{p_1}, \mathbf{V}_{p_2} \neq 0 \end{array}\right) & \tfrac{1}{2}\Sigma(k_{p_1} - k_{p_2})x_{p_1}y_{p_2} + \Sigma\tfrac{1}{2}(y_{p_1}y_{p_2} - x_{p_1}x_{p_2}) \\
\mathbf{V}_{p_1}+\mathbf{V}_{p_2}+\mathbf{V}_{p'_i}+\ldots=\mathbf{V}_p \mp 2\mathbf{K}) & \pm \dfrac{3}{4}\dfrac{m^2}{k_p}\Sigma(1 - 3\rho'_{p'_i} + 6\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j} - 10\rho'_{p'_i}\rho'_{p'_j}\rho'_{p'_h} + \ldots) \\
& \quad \times(1 \mp 2\lambda'_{p'_{i'}} + 2\lambda'_{p'_{i'}}\lambda'_{p'_{j'}} \mp \tfrac{4}{3}\lambda'_{p'_{i'}}\lambda'_{p'_{j'}}\lambda'_{p'_{h'}} + \ldots) \\
& \quad \times(\tfrac{1}{2}y_{p_1}y_{p_2} + \tfrac{1}{2}x_{p_1}x_{p_2} \pm x_{p_1}y_{p_2}).
\end{array}\right.$$

Enfin λ_p sera calculé par une formule donnée dans le premier Mémoire. La forme des coefficients x_p et y_p, et de la quantité g, sera tout à fait pareille à celle donnée pour les λ_p et g précédemment : la constante η ne fera que remplacer la constante ε. Il me paraît donc inutile de récrire ces formes, et je vais donner tout de suite les formules qui permettent le calcul des coefficients que j'ai en vue, c'est-à-dire $x_{h,0,\pm 1_i}^{(0)}$, $y_{h,0,\pm 1_i}^{(0)}$, pour $h = 0, 2, 4, 6$. Les formules du premier Mémoire s'appliqueront encore avec les modifications suivantes : g_0 sera remplacé par m, $x_{h,\pm 1}^{(0)}$, $y_{h,\pm 1}^{(0)}$ par $x_{h,0,\pm 1_i}^{(0)}$, $y_{h,0,\pm 1_i}^{(0)}$, et, partout où il n'y aura pas de facteur de la forme $x_{h,\pm 1}^{(0)}$ ou $y_{h,\pm 1}^{(0)}$, on mettra le facteur $y_{0,0,1_i}^{(0)}$ (précédemment, en effet, l'unité remplaçait $y_{0,1}^{(0)}$); on pourra supprimer les termes d'un ordre supérieur à celui qu'on doit obtenir et qui sera indiqué plus bas; enfin, les seconds membres de chaque formule devront être complétés par de nouveaux termes que seuls je vais écrire en même temps que les premiers membres.

On obtient ainsi :



$y^{(0)}_{0,0,1_i}$ jusqu'au neuvième ordre :

$$
\begin{aligned}
m^2\left(m^2 - 1 + \tfrac{3}{2} m^2\right) y^{(0)}_{0,0,1_i} = \ldots \\
&+ 3m^3\left[\tfrac{1}{2} + (y^{(0)}_{2,0})^2 + (x^{(0)}_{2,0})^2 + (y^{(0)}_{4,0})^2 + (x^{(0)}_{4,0})^2\right] \\
&- \tfrac{1}{2} m^2\left(\tfrac{3}{2} + 6m + \tfrac{15}{4} m^2\right)\left[x^{(0)}_{2,0} - y^{(0)}_{2,0}\right. \\
&\qquad\qquad \left. - y^{(0)}_{2,0} y^{(0)}_{4,0} + x^{(0)}_{2,0} x^{(0)}_{4,0} - x^{(0)}_{2,0} y^{(0)}_{4,0} + x^{(0)}_{4,0} y^{(0)}_{2,0}\right] \\
&+ \tfrac{7}{2} m^2\left(-\tfrac{3}{2} - \tfrac{15}{4} m^2\right)\left[x^{(0)}_{2,0} - y^{(0)}_{2,0}\right. \\
&\qquad\qquad \left. - y^{(0)}_{2,0} y^{(0)}_{4,0} + x^{(0)}_{2,0} x^{(0)}_{4,0} - x^{(0)}_{2,0} y^{(0)}_{4,0} + x^{(0)}_{4,0} y^{(0)}_{2,0}\right] \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$x^{(0)}_{0,0,1_i}$ jusqu'au sixième ordre (on écrirait immédiatement la formule qui permet d'aller jusqu'au dixième ordre) :

$$
x^{(0)}_{0,0,1_i} = \ldots - 3m\left[x^{(0)}_{2,0} - y^{(0)}_{2,0}\right] + \ldots .
$$

$y^{(0)}_{2,0,\pm 1_i}$, $x^{(0)}_{2,0,\pm 1_i}$ jusqu'au neuvième ordre :

$$
\begin{aligned}
(2\mu + m)^2\left[(2\mu + m)^2 - 1 + \tfrac{3}{2} m^2\right] y^{(0)}_{2,0,1_i} = \ldots \\
&+ 3m^2(3 - 2m)\left[x^{(0)}_{2,0} + y^{(0)}_{2,0} y^{(0)}_{4,0} + x^{(0)}_{2,0} x^{(0)}_{4,0}\right] \\
&- \tfrac{1}{2} m^2\left(\tfrac{33}{2} - 9m + \tfrac{15}{4} m^2\right)\left[\tfrac{1}{2} - (y^{(0)}_{2,0})^2 + (x^{(0)}_{2,0})^2\right] \\
&+ \tfrac{7}{2} m^2\left(\tfrac{3}{2} - 3m - \tfrac{15}{4} m^2\right)\left[\tfrac{1}{2}(y^{(0)}_{2,0})^2 + \tfrac{1}{2}(x^{(0)}_{2,0})^2 - x^{(0)}_{2,0} y^{(0)}_{2,0} + x^{(0)}_{4,0} - y^{(0)}_{4,0}\right] \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x^{(0)}_{2,0,1_i} = \ldots &- \frac{3}{8}\,\frac{m^2}{2 - m}\left[\tfrac{1}{2} - (y^{(0)}_{2,0})^2 + (x^{(0)}_{2,0})^2\right] \\
&- \frac{21}{8}\,\frac{m^2}{2 - m}\left[\tfrac{1}{2}(y^{(0)}_{2,0})^2 + \tfrac{1}{2}(x^{(0)}_{2,0})^2 - x^{(0)}_{2,0} y^{(0)}_{2,0} + x^{(0)}_{4,0} - y^{(0)}_{4,0}\right] \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2\mu - m)^2\left[(2\mu - m)^2 - 1 + \tfrac{3}{2} m^2\right] y^{(0)}_{2,0,-1_i} = \ldots \\
&+ 3m^2(3 - 4m)\left[x^{(0)}_{2,0} + y^{(0)}_{2,0} y^{(0)}_{4,0} + x^{(0)}_{2,0} x^{(0)}_{4,0}\right] \\
&+ \tfrac{7}{2} m^2\left(\tfrac{33}{2} - 27m + \tfrac{63}{4} m^2\right)\left[\tfrac{1}{2} - (y^{(0)}_{2,0})^2 + (x^{(0)}_{2,0})^2\right] \\
&- \tfrac{1}{2} m^2\left(\tfrac{3}{2} + 3m - \tfrac{63}{4} m^2\right)\left[\tfrac{1}{2}(y^{(0)}_{2,0})^2 + \tfrac{1}{2}(x^{(0)}_{2,0})^2 - x^{(0)}_{2,0} y^{(0)}_{2,0} + x^{(0)}_{4,0} - y^{(0)}_{4,0}\right] \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x^{(0)}_{2,0,-1_i} = \ldots &+ \frac{21}{8}\,\frac{m^2}{2 - 3m}\left[\tfrac{1}{2} - (y^{(0)}_{2,0})^2 + (x^{(0)}_{2,0})^2\right] \\
&+ \frac{3}{8}\,\frac{m^2}{2 - 3m}\left[\tfrac{1}{2}(y^{(0)}_{2,0})^2 + \tfrac{1}{2}(x^{(0)}_{2,0})^2 - x^{(0)}_{2,0} y^{(0)}_{2,0} + x^{(0)}_{4,0} - y^{(0)}_{4,0}\right] \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$y'^{(0)}_{4.0.\pm1_1}$, $x'^{(0)}_{4.0.\pm1_1}$ jusqu'au septième ordre :

$$(4\mu - m)^2[(4\mu - m)^2 - 1 - \tfrac{3}{2}m^2]\,y'^{(0)}_{4.0.1_1} = \ldots$$
$$-3m^2(6 - 5m)[-\tfrac{1}{2}(y'^{(0)}_{2.0})^2 - \tfrac{1}{2}(x'^{(0)}_{2.0})^2 - x'^{(0)}_{4.0}]$$
$$-\tfrac{1}{2}m^2(\tfrac{45}{2} - 48m - \tfrac{13}{2}m^2)[x'^{(0)}_{2.0} - y'^{(0)}_{2.0}]$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x'^{(0)}_{4.0.1_1} = \ldots - \frac{3}{8}\,\frac{m^2}{4 - 3m}[x'^{(0)}_{2.0} + y'^{(0)}_{2.0}] - \ldots$$

$$(4\mu - m)^2[(4\mu - m)^2 - 1 - \tfrac{3}{2}m^2]\,y'^{(0)}_{4.0.-1_1} = \ldots$$
$$-3m^2(6 - 7m)[-\tfrac{1}{2}(y'^{(0)}_{2.0})^2 - \tfrac{1}{2}(x'^{(0)}_{2.0})^2 - x'^{(0)}_{4.0}]$$
$$-\tfrac{7}{2}m^2(\tfrac{87}{2} - 78m - \tfrac{159}{4}m^2)[x'^{(0)}_{2.0} - y'^{(0)}_{2.0}]$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x'^{(0)}_{4.0.-1_1} = \ldots - \frac{21}{8}\,\frac{m^2}{4 - 5m}[x'^{(0)}_{2.0} - y'^{(0)}_{2.0}] - \ldots$$

$y'^{(0)}_{6.0.\pm1_1}$, $x'^{(0)}_{6.0.\pm1_1}$ jusqu'au sixième ordre (la première approximation permettrait d'aller jusqu'au neuvième ordre) :

$$(6\mu + m)^2[(6\mu + m)^2 - 1 + \tfrac{3}{2}m^2]\,y'^{(0)}_{6.0.1_1} = \ldots$$
$$-\tfrac{1}{2}m^2(\tfrac{165}{2} + \ldots)[x'^{(0)}_{4.0} + y'^{(0)}_{4.0} + \tfrac{1}{2}(y'^{(0)}_{2.0})^2 + \tfrac{1}{2}(x'^{(0)}_{2.0})^2 + x'^{(0)}_{2.0}y'^{(0)}_{2.0}]$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x'^{(0)}_{6.0.1_1} = \ldots - \frac{3}{8}\,\frac{m^2}{6 - 5m}[x'^{(0)}_{4.0} + y'^{(0)}_{4.0} + \tfrac{1}{2}(y'^{(0)}_{2.0})^2 + \tfrac{1}{2}(x'^{(0)}_{2.0})^2 + x'^{(0)}_{2.0}y'^{(0)}_{2.0}] - \ldots$$

$$(6\mu - m)^2[(6\mu - m)^2 - 1 + \tfrac{3}{2}m^2]\,y'^{(0)}_{6.0.-1_1} = \ldots$$
$$+\tfrac{7}{2}m^2(\tfrac{165}{2} + \ldots)[x'^{(0)}_{4.0} + y'^{(0)}_{4.0} + \tfrac{1}{2}(y'^{(0)}_{2.0})^2 + \tfrac{1}{2}(x'^{(0)}_{2.0})^2 + x'^{(0)}_{2.0}y'^{(0)}_{2.0}]$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x'^{(0)}_{6.0.-1_1} = \ldots + \frac{21}{8}\,\frac{m^2}{6 - 7m}[x'^{(0)}_{4.0} + y'^{(0)}_{4.0} + \tfrac{1}{2}(y'^{(0)}_{2.0})^2 + \tfrac{1}{2}(x'^{(0)}_{2.0})^2 + x'^{(0)}_{2.0}y'^{(0)}_{2.0}] + \ldots$$

Enfin, pour calculer $\lambda^{(0)}_{h.0.\pm1_1}$ (h étant positif, nul ou négatif), on aura la formule suivante :

$$\lambda^{(0)}_{h.0.\pm1_1} = A_0\,y'^{(0)}_{h.0.\pm1_1} + A_{-2}\,y'^{(0)}_{h-2.0.\pm1_1} + A_{+2}\,y'^{(0)}_{h+2.0.\pm1_1} + A_{-4}\,y'^{(0)}_{h-4.0.\pm1_1} + A_{+4}\,y'^{(0)}_{h+4.0.\pm1_1}$$
$$+ B_{-2}\,x'^{(0)}_{h-2.0.\pm1_1} + B_{+2}\,x'^{(0)}_{h+2.0.\pm1_1} + B_{-4}\,x'^{(0)}_{h-4.0.\pm1_1} + B_{+4}\,x'^{(0)}_{h+4.0.\pm1_1}$$
$$+ A_{-6}\,y'^{(0)}_{h-6.0.\pm1_1} + A_{+6}\,y'^{(0)}_{h+6.0.\pm1_1} + \ldots$$
$$+ B_{-6}\,x'^{(0)}_{h-6.0.\pm1_1} + B_{+6}\,x'^{(0)}_{h+6.0.\pm1_1} + \ldots$$

où l'on a d'abord

$$A_{+i} = A_{-i} \quad \text{et} \quad B_{+i} = -B_{-i},$$

puis

$$\begin{aligned}
A_0 &= 1 - 2(y_{2,0}^{(0)})^2 + 2(x_{2,0}^{(0)})^2 - 2(y_{4,0}^{(0)})^2 + 2(x_{4,0}^{(0)})^2 - 6x_{4,0}^{(0)}(y_{2,0}^{(0)})^2 + 12y_{4,0}^{(0)}x_{2,0}^{(0)}y_{2,0}^{(0)} \\
&\qquad - 6x_{4,0}^{(0)}(x_{2,0}^{(0)})^2 + 6(y_{2,0}^{(0)})^4 - 12(x_{2,0}^{(0)})^2(y_{2,0}^{(0)})^2 + 6(x_{2,0}^{(0)})^4 + \ldots; \\
A_{-2} &= -x_{2,0}^{(0)} - 2y_{2,0}^{(0)}y_{4,0}^{(0)} + 2x_{2,0}^{(0)}x_{4,0}^{(0)} + 3x_{2,0}^{(0)}(y_{2,0}^{(0)})^2 - 3(x_{2,0}^{(0)})^3 + \ldots, \\
B_{-2} &= -y_{2,0}^{(0)} + 2x_{2,0}^{(0)}y_{4,0}^{(0)} - 2x_{4,0}^{(0)}y_{2,0}^{(0)} + 3(y_{2,0}^{(0)})^3 - 3y_{2,0}^{(0)}(x_{2,0}^{(0)})^2 + \ldots; \\
A_{-4} &= -x_{4,0}^{(0)} + (y_{2,0}^{(0)})^2 + (x_{2,0}^{(0)})^2 + \ldots, \\
B_{-4} &= -y_{4,0}^{(0)} + 2x_{2,0}^{(0)}y_{2,0}^{(0)} + \ldots; \\
A_{-6} &= -x_{6,0}^{(0)} + 2y_{2,0}^{(0)}y_{4,0}^{(0)} + 2x_{2,0}^{(0)}x_{4,0}^{(0)} - 3x_{2,0}^{(0)}(y_{2,0}^{(0)})^2 - (x_{2,0}^{(0)})^3 + \ldots, \\
B_{-6} &= -y_{6,0}^{(0)} + 2x_{2,0}^{(0)}x_{4,0}^{(0)} + 2x_{4,0}^{(0)}y_{2,0}^{(0)} - (y_{2,0}^{(0)})^3 - 3y_{2,0}^{(0)}(x_{2,0}^{(0)})^2 + \ldots;
\end{aligned}$$

. . . .

Les calculs effectués par l'une ou l'autre des deux méthodes, et conduits de façon à obtenir la même approximation que Delaunay, fournissent les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
y_{0,0,1_i}^{(0)} &= -\frac{3}{2}m + \frac{735}{2^5}m^3 + \frac{1\,261}{2^3}m^4 + \frac{285\,715}{2^7.3}m^5 \\
&\qquad + \frac{3\,260\,473}{2^7.3^2}m^6 + \frac{966\,281\,531}{2^{12}.3^3}m^7 + \frac{12\,863\,159\,737}{2^{13}.3^4}m^8 + \ldots,
\end{aligned}$$

$$x_{0,0,1_i}^{(0)} = \frac{3}{2^2}m^2 - \frac{3\,603}{2^8}m^4 - \frac{4\,697}{2^4.3}m^5 - \frac{1\,435\,123}{2^{10}.3}m^6 + \ldots,$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{0,0,1_i}^{(0)} &= -\frac{3}{2}m + \frac{735}{2^5}m^3 + \frac{1\,261}{2^3}m^4 + \frac{142\,817}{2^6.3}m^5 \\
&\qquad + \frac{3\,257\,665}{2^7.3^2}m^6 + \frac{964\,471\,235^*}{2^{12}.3^3}m^7 + \frac{12\,808\,433\,977^*}{2^{13}.3^4}m^8 + \ldots;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{2,0,1_i}^{(0)} &= -\frac{11}{2^6}m^2 - \frac{185}{2^5.3}m^3 - \frac{4\,007}{2^7.3^2}m^4 + \frac{94\,451}{2^8.3^3}m^5 \\
&\qquad + \frac{211\,903\,565}{2^{14}.3^4}m^6 + \frac{9\,139\,608\,107}{2^{13}.3^5.5}m^7 + \frac{2\,403\,267\,820\,153}{2^{15}.3^6.5^2}m^8 + \ldots,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{2,0,1_i}^{(0)} &= \frac{1}{2^2}m^2 + \frac{83}{2^5.3}m^3 - \frac{25}{2^5.3^2}m^4 - \frac{136\,993}{2^9.3^3}m^5 \\
&\qquad - \frac{57\,005\,111}{2^{14}.3^4}m^6 - \frac{80\,372\,867}{2^{12}.3^5}m^7 + \frac{101\,365\,818\,913}{2^{17}.3^6.5}m^8 + \ldots,
\end{aligned}$$

$$\lambda^{(0)}_{2,0,1_1} = -\frac{11}{2^5}m^2 - \frac{257}{2^5.3}m^3 - \frac{7\,337}{2^7.3^2}m^4 - \frac{124\,223}{2^8.3^3}m^5$$

$$-\frac{178\,759\,285}{2^{13}.3^4}m^6 + \frac{1\,683\,933\,119^*}{2^{13}.3^5.5}m^7 + \frac{944\,126\,580\,688\,7^*}{2^{16}.3^6.5^2}m^8 - \ldots;$$

$$y^{(0)}_{2,0,-1_1} = \frac{77}{2^5}m^2 + \frac{455}{2^5}m^3 + \frac{7\,313}{2^7}m^4 + \frac{133\,525}{2^8.3}m^5$$

$$-\frac{50\,672\,333}{2^{14}.3^2}m^6 - \frac{207\,473\,021}{2^{13}.3^3.5}m^7 - \frac{416\,799\,738\,203}{2^{15}.3^4.5^2}m^8 + \ldots,$$

$$x^{(0)}_{2,0,-1_1} = -\frac{7}{2^2}m^2 - \frac{281}{2^5}m^3 - \frac{1\,013}{2^5}m^4 - \frac{141\,959}{2^9.3}m^5$$

$$-\frac{29\,251\,415}{2^{14}.3^2}m^6 - \frac{2\,655\,349}{2^{10}.3^3}m^7 + \frac{21\,652\,916\,813}{2^{17}.3^4}m^8 + \ldots,$$

$$\lambda^{(0)}_{2,0,-1_1} = \frac{77}{2^5}m^2 + \frac{479}{2^5}m^3 + \frac{7\,551}{2^7}m^4 + \frac{127\,385}{2^8.3}m^5$$

$$+\frac{17\,924\,309}{2^{13}.3^2}m^6 - \frac{872\,999\,227^*}{2^{13}.3^3.5}m^7 - \frac{1\,194\,216\,784\,217^*}{2^{16}.3^4.5^2}m^8 + \ldots;$$

$$y^{(0)}_{4,0,1_1} = -\frac{25}{2^9}m^4 - \frac{3\,359}{2^{10}.5}m^5 - \frac{6\,772\,849}{2^{13}.3^2.5^2}m^6 + \ldots,$$

$$x^{(0)}_{4,0,1_1} = -\frac{25}{2^9}m^4 - \frac{3\,497}{2^{10}.5}m^5 - \frac{924\,059}{2^{10}.3^2.5^2}m^6 + \ldots,$$

$$\lambda^{(0)}_{4,0,1_1} = -\frac{201}{2^9}m^4 - \frac{5\,611}{2^8.5}m^5 - \frac{12\,697\,903}{2^{13}.3.5^2}m^6 + \ldots;$$

$$y^{(0)}_{4,0,-1_1} = \frac{175}{2^9}m^4 + \frac{11\,513}{2^{10}.3}m^5 + \frac{2\,855\,609}{2^{13}.3.5}m^6 + \ldots$$

$$x^{(0)}_{4,0,-1_1} = \frac{175}{2^9}m^4 + \frac{12\,479}{2^{10}.3}m^5 + \frac{136\,489}{2^{10}.5}m^6 + \ldots,$$

$$\lambda^{(0)}_{4,0,-1_1} = \frac{1\,407}{2^9}m^4 + \frac{19\,981}{2^8.3}m^5 + \frac{52\,839\,679^*}{2^{13}.3^2.5}m^6 + \ldots;$$

$$y^{(0)}_{6,0,1_1} = -\frac{769}{2^{14}}m^6 + \ldots,$$

$$x^{(0)}_{6,0,1_1} = -\frac{897}{2^{14}}m^6 + \ldots,$$

$$\lambda^{(0)}_{6,0,1_1} = -\frac{3\,715^*}{2^{13}}m^6 + \ldots;$$

$$y^{(0)}_{6,0,-1_1} = \frac{5\,383}{2^{14}}m^6 + \ldots,$$

$$x^{(0)}_{6,0,-1_1} = \frac{6\,279}{2^{14}}m^6 + \ldots,$$

$$\lambda^{(0)}_{6,0,-1_1} = \frac{26\,005}{2^{13}}m^6 + \ldots.$$



Les nombres marqués d'un astérisque sont ceux qui diffèrent des coefficients correspondants donnés par Delaunay dans sa *Théorie de la Lune*.

Je ferai remarquer, en terminant, qu'il est facile de voir la cause de l'erreur commise par Delaunay sur le terme en m^6 du coefficient $\lambda^{(0)}_{6,0,1,i}$: le premier terme du coefficient correspondant (314) de la page 376 (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. XXIX) n'est pas $-\frac{821}{64}$, mais $-\frac{821}{64}\times\frac{9}{8}$. Le facteur $\frac{9}{8}$ a été omis, et il est facile de s'en convaincre en observant que ce terme provient de l'action de la sixième opération sur le terme (239) de la longitude (p. 356); réduit à la partie utile, ce terme est

$$\left(\frac{5}{16}+\frac{1053}{64}-\frac{63}{16}\right) e\,\frac{n'^4}{n^4}\sin(4h+4g+5l-4h'-4g'-4l')$$

ou

$$\frac{821}{64}\, e\,\frac{n'^4}{n^4}\sin(4h+4g+5l-4h'-4g'-4l');$$

or, par suite de la dixième opération (t. XXVIII, p. 329), on remplace

$$e\cos(2h+2g+l-2h'-2g'-l')$$

par

$$-\frac{9}{8}\, e'\,\frac{n'^2}{n^2}+\ldots;$$

donc on obtient le terme

$$-\frac{9}{8}\times\frac{821}{64}\, e'\,\frac{n'^6}{n^6}\sin(6h+6g+6l-6h'-6g'-5l');$$

il est dès lors évident que le facteur $\frac{9}{8}$ a été oublié dans la formule donnée par Delaunay.



SUR LE SYSTÈME D'ÉQUATIONS

AUX

DÉRIVÉES PARTIELLES SIMULTANÉES

AUXQUELLES SATISFAIT LA SÉRIE HYPERGÉOMÉTRIQUE A DEUX VARIABLES $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)$,

PAR M. R. LE VAVASSEUR,

Professeur au Lycée de Moulins.

Le présent travail est une modeste contribution à l'étude du système d'équations aux dérivées partielles simultanées (S) auxquelles satisfait la série hypergéométrique à deux variables $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)$.

Il est divisé en cinq Chapitres.

Dans le Chapitre I, je m'occupe des relations qui existent entre la fonc- $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)$ et ses contiguës. Je démontre que toute fonction contiguë, $F_1(\alpha+p, \beta+q, \beta'+q', \gamma+r; x, y)$, p, q, q' et r étant des nombres entiers, est une fonction linéaire et homogène de F_1, de $\frac{\partial F_1}{\partial x}$ et de $\frac{\partial F_1}{\partial y}$, les coefficients étant des fonctions rationnelles de x et de y. J'en déduis, par une voie naturelle, les équations aux dérivées partielles du second ordre auxquelles satisfait la fonction F_1. En suivant une marche identique, j'étudie de la même façon les dix intégrales particulières bien connues qu'on obtient en donnant à g et h, dans l'expression

$$\int_g^h u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}(1-uy)^{-\beta'}\,du,$$

les valeurs 0, 1, ∞, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$.

Dans le Chapitre II, j'établis un Tableau de 64 intégrales du système

(S) analogue au Tableau des 24 intégrales de Kummer relatif à l'équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait la série hypergéométrique de Gauss, $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$. C'est le développement d'une Note que M. Goursat a fait publier dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences.*

Le Chapitre III est occupé par la recherche des relations qui existent entre trois ou quatre des dix intégrales précédemment citées, lorsqu'elles ne sont pas distinctes. J'ai insisté sur ce fait que les relations en question dépendent des positions de x et y. J'ai dressé quatorze Tableaux distincts de relations, je n'ai écrit que celles qu'on ne peut déduire simplement des relations déjà trouvées. J'ai adopté un système de numérotage qui permet de trouver immédiatement dans l'un des Tableaux la relation qui existe entre tel groupe que l'on voudra, de trois ou quatre intégrales non distinctes.

Soit

$$\varphi(u) = u^{a-1}(u-1)^{b-1}(u-x)^{c-1}(u-y)^{d-1},$$

$$\omega_1 = \int_0^x \varphi(u)\,du, \qquad \omega_2 = \int_0^y \varphi(u)\,du, \qquad \omega_3 = \int_0^1 \varphi(u)\,du;$$

enfin

$$\frac{\omega_1}{\omega_3} = \xi, \qquad \frac{\omega_2}{\omega_3} = \eta.$$

M. Picard a démontré que si x et y, considérées comme fonctions de ξ et de η, étaient des fonctions uniformes de ξ et de η, les dix nombres $a+b-1$, $a+c-1$, $a+d-1$, $b+c-1$, $b+d-1$, $c+d-1$, $2-b-c-d$, $2-c-d-a$, $2-d-a-b$, $2-a-b-c$ devaient être les inverses de nombres entiers. Je me suis proposé, dans le Chapitre IV, de trouver tous les groupes de quatre nombres a, b, c, d, jouissant de cette propriété.

Dans le Chapitre V, j'établis le groupe du système (S) en suivant la méthode de M. Picard; puis, considérant la forme quadratique ternaire, à indéterminées conjuguées que ce groupe laisse inaltérée, j'établis que son déterminant invariant ne peut s'annuler qu'en même temps que tous ses premiers mineurs, répondant ainsi à une question que M. Picard a posée dans une Note insérée au *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XV, année 1886-1887, p. 148.

Je cherche ensuite dans quels cas le système (S) aura son intégrale générale algébrique.

CHAPITRE I.

1. Considérons l'expression

$$U = u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}(1-uy)^{-\beta'},$$

dans laquelle on suppose que u prend des valeurs réelles appartenant à l'intervalle (0, 1). Je choisis pour l'argument de u et pour l'argument de $(1-u)$ la valeur zéro. x et y sont des valeurs complexes ou réelles, mais, si elles sont réelles, inférieures à 1. Comme arguments de $(1-ux)$ et de $(1-uy)$, je choisis ceux qui s'annulent en même temps que u. Les nombres α, β, β', γ sont réels ou imaginaires. La partie réelle de α et celle de $(\gamma-\alpha)$ sont assujetties à être positives.

Dans ces conditions, l'intégrale définie

$$\Phi(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y) = \int_0^1 U\,du$$

a un sens. C'est une fonction bien déterminée de x et de y, Si l'on regarde la portion indéfinie de l'axe réel X qui est à droite du point (+ 1) comme une coupure, que ne pourront franchir ni le point x, ni le point y, Φ sera une fonction uniforme de x et de y.

On a, en particulier,

$$\Phi(\alpha, \beta, \beta' \gamma; 0, 0) = \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}\,du = B(\alpha, \gamma-\alpha),$$

en posant

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \qquad \Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx \quad (^1).$$

Nous définirons, avec M. Appell ([2]), l'expression (λ, k) par l'égalité

$$(\lambda, k) = \lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k-1).$$

---

(1) Voir le *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* de M. C. Jordan, t. II, p. 177, 190, 191.

(2) Voir *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de Liouville, t. VIII, année 1882, p. 173 et suivantes.

Par convention, le symbole $(\lambda, 0)$, qui n'a pas de sens par lui-même, représentera 1.

On voit alors immédiatement que l'on a

$$\frac{\partial^{m+n}\Phi(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)}{\partial x^m \partial y^n} = (\beta, m)(\beta', n)\Phi(\alpha+m+n, \beta+m, \beta'+n, \gamma+m+n; x, y).$$

En conséquence, si nous posons

$$\Phi(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y) = B(\alpha, \gamma-\alpha)\Phi_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y),$$

en sorte que

$$\Phi_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; 0,0) = 1,$$

on déduit aisément de l'égalité précédente pour cette nouvelle fonction Φ_1 la formule suivante :

$$\frac{\partial^{m+n}\Phi_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)}{\partial x^m \partial y^n}$$
$$= \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)}\Phi_1(\alpha+m+n, \beta+m, \beta'+n, \gamma+m+n; x, y).$$

On conclut de là, en observant que $m! = (1, m)$,

$$\frac{1}{m!\,n!}\left[\frac{\partial^{m+n}\Phi_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)}{\partial x^m \partial y^n}\right]_{\substack{x=0\\y=0}} = \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)}$$

et, par conséquent, la fonction Φ_1 sera représentée, pour x et y voisins de l'origine, par la série

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y) = \sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)}x^m y^n.$$

M. Appell a démontré que cette série est convergente sous les conditions $|x| < 1$, $|y| < 1$, quelles que soient les valeurs de α, β, β' et γ [1]. Elle servira donc à définir la fonction $\Phi_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)$, quelles que soient les valeurs de α, β, β' et γ, tant qu'on aura $|x| < 1$, $|y| < 1$.

2. Soit p un nombre entier quelconque. Dans ce qui va suivre, pour abréger, je désignerai par $\Phi(\alpha+p)$, $\Phi(\beta+p)$, $\Phi(\beta'+p)$, $\Phi(\gamma+p)$ les expressions $\Phi(\alpha+p, \beta, \beta', \gamma; x, y)$, $\Phi(\alpha, \beta+p, \beta', \gamma; x, y)$, $\Phi(\alpha, \beta, \beta'+p, \gamma; x, y)$, $\Phi(\alpha, \beta, \beta', \gamma+p; x, y)$, respectivement.

---

[1] *Voir* le Mémoire de M. Appell, *loc. cit.*

De même, q désignant un autre nombre entier, $\Phi\,(\alpha+p,\beta+q)$ représentera $\Phi(\alpha+p,\beta+q,\beta',\gamma;x,y)$, et ainsi de suite.

J'emploierai les mêmes abréviations pour la série $F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y)$.

Cela posé, si la partie réelle de α est supérieure à 1, l'intégrale $\int_0^1 \frac{U\,du}{u}$ aura un sens ainsi que $\Phi(\alpha-1)$ et l'on verra sans difficulté qu'on a

$$\int_0^1 \frac{U\,du}{u} = \Phi(\alpha-1)+\Phi.$$

De même, si la partie réelle de $(\gamma-\alpha)$ est supérieure à 1, l'intégrale $\int_0^1 \frac{U\,du}{1-u}$ aura un sens, ainsi que $\Phi\,(\gamma-1)$ et l'on aura précisément

$$\int_0^1 \frac{U\,du}{1-u} = \Phi(\gamma-1).$$

On a aussi

$$\int_0^1 \frac{U\,du}{1-ux} = \Phi(\beta+1),$$

$$\int_0^1 \frac{U\,du}{1-uy} = \Phi(\beta'+1)$$

et

$$\int_0^1 U u\,du = \Phi-\Phi(\gamma+1).$$

Ensuite on trouvera aisément les relations suivantes :

$$\Phi(\alpha+1)=\Phi(\gamma-1)-\Phi,$$
$$\Phi(\beta-1)=x\,\Phi(\gamma+1)-(x-1)\Phi,$$
$$\Phi(\beta'-1)=y\,\Phi(\gamma+1)-(y-1)\Phi.$$

Les trois dernières relations donnent immédiatement, si l'on suppose $|x|<1$, et $|y|<1$, en tenant compte de la formule

$$\Phi(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)}F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y),$$

qui a lieu dans les conditions données,

$$\alpha F_1(\alpha+1)=(\gamma-1)F_1(\gamma-1)\quad+(1+\alpha-\gamma)F_1, \tag{1}$$
$$\gamma F_1(\beta-1)=(\gamma-\alpha)\,xF_1(\gamma+1)-\gamma(x-1)F_1, \tag{2}$$
$$\gamma F_1(\beta'-1)=(\gamma-\alpha)\,yF_1(\gamma+1)-\gamma(y-1)F_1. \tag{3}$$

3. De l'équation

$$U = u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}(1-uy)^{-\beta'},$$

je déduis

$$\frac{dU}{du} = U\left(\frac{\alpha-1}{u} + \frac{1+\alpha-\gamma}{1-u} + \frac{\beta x}{1-ux} + \frac{\beta' y}{1-uy}\right).$$

Intégrant les deux membres de cette équation, multipliés par du, depuis o jusqu'à 1, on trouve (en supposant toujours les parties réelles de α et de $\gamma-\alpha$ supérieures à 1)

$$(\alpha-1)[\Phi(\alpha-1)+\Phi]-(\gamma-\alpha-1)\Phi(\gamma-1)+\beta x\Phi(\beta+1)+\beta' y\Phi(\beta'+1)=0,$$

et, par suite,

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned}&(\gamma-\alpha)F_1(\alpha-1)+(\alpha-1)F_1-(\gamma-1)F_1(\gamma-1)\\&\qquad+\beta x F_1(\beta+1)+\beta' y F_1(\beta'+1)=0.\end{aligned}\right.$$

De même, on a

$$\frac{d(uU)}{du} = uU\left(\frac{\alpha}{u} + \frac{1+\alpha-\gamma}{1-u} + \frac{\beta x}{1-ux} + \frac{\beta' y}{1-uy}\right).$$

Multiplions les deux membres de cette équation par du et intégrons de o jusqu'à 1, il vient

$$\beta\Phi(\beta+1)+\beta'\Phi(\beta'+1)=(\gamma-\alpha-1)\Phi(\gamma-1)+(1+\beta+\beta'-\gamma)\Phi,$$

et, par suite,

$$(5)\qquad \beta F_1(\beta+1)+\beta' F_1(\beta'+1)=(\gamma-1)F_1(\gamma-1)+(1+\beta+\beta'-\gamma)F_1.$$

Enfin, en partant de l'équation

$$\frac{d(u^2U)}{du} = u^2U\left(\frac{\alpha+1}{u} + \frac{1+\alpha-\gamma}{1-u} + \frac{\beta x}{1-ux} + \frac{\beta' y}{1-uy}\right),$$

multipliant les deux nombres par du, puis intégrant de o à 1, on trouve

$$\begin{aligned}&[(2\gamma-\beta-\beta'-\alpha-1)xy-\beta y-\beta' x]\Phi-(\gamma-\beta-\beta')xy\Phi(\gamma+1)\\&\qquad-(\gamma-\alpha-1)xy\Phi(\gamma-1)+\beta y\Phi(\beta+1)+\beta' x\Phi(\beta'+1)=0,\end{aligned}$$

et, par suite,

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned}&(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta-\beta')xyF_1(\gamma+1)\\&\quad=[(2\gamma-\beta-\beta'-\alpha-1)xy-\beta y-\beta' x]\gamma F_1-\gamma(\gamma-1)xyF_1(\gamma-1)\\&\qquad+\beta\gamma y F_1(\beta+1)+\beta'\gamma x F_1(\beta'+1).\end{aligned}\right.$$

Nous avons ainsi obtenu *six* équations linéaires et homogènes entre F_1, $F_1(\alpha-1)$, $F_1(\beta-1)$, $F_1(\beta'-1)$, $F_1(\gamma-1)$, $F_1(\alpha+1)$, $F_1(\beta+1)$, $F_1(\beta'+1)$, $F_1(\gamma+1)$, les coefficients étant des polynômes entiers en x et en y. La suite des calculs montrera que ces six relations sont distinctes. Nous pouvons dès lors énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Entre la fonction* F_1 *et trois quelconques des huit fonctions contiguës* $F_1(\alpha-1)$, $F_1(\beta-1)$, $F_1(\beta'-1)$, $F_1(\gamma-1)$, $F_1(\alpha+1)$, $F_1(\beta+1)$, $F_1(\beta'+1)$, $F_1(\gamma+1)$, *existe une relation linéaire et homogène dont les coefficients sont des polynômes entiers en* x *et en* y.

4. Posons

$$u_{mn}=\frac{(\alpha,m+n)(\beta,m)(\beta',n)}{(\gamma,m+n)(1,m)(1,n)}x^m y^n,$$

d'où

$$F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y)=\sum_{m=0}^{m=\infty}\sum_{n=0}^{n=\infty}u_{mn}=\mathbf{S}\,u_{mn}.$$

On a alors

$$F_1(\beta+1)=F_1+\frac{1}{\beta}\mathbf{S}\,mu_{mn},$$

$$F_1(\beta'+1)=F_1+\frac{1}{\beta'}\mathbf{S}\,nu_{mn}$$

et

$$F_1(\gamma-1)=F_1+\frac{1}{\gamma-1}\mathbf{S}\,(m+n)u_{mn}.$$

D'ailleurs, on voit immédiatement que

$$\mathbf{S}\,mu_{mn}=x\frac{\partial F_1}{\partial x},$$

$$\mathbf{S}\,nu_{mn}=y\frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

Donc

$$F_1(\beta+1)=F_1+\frac{x}{\beta}\frac{\partial F_1}{\partial x},$$

$$F_1(\beta'+1)=F_1+\frac{y}{\beta'}\frac{\partial F_1}{\partial y},$$

$$F_1(\gamma-1)=F_1+\frac{1}{\gamma-1}\left(x\frac{\partial F_1}{\partial x}+y\frac{\partial F_1}{\partial y}\right).$$

On déduit de là que *les huit fonctions contiguës pourront s'exprimer*

en fonction linéaire et homogène de F_1, *de* $\frac{\partial F_1}{\partial x}$ *et de* $\frac{\partial F_1}{\partial y}$, *les coefficients étant des polynômes entiers en* x *et en* y.

On a le Tableau suivant :

$$(\gamma-\alpha)\,F_1(\alpha-1)=(\gamma-\alpha-\beta x-\beta' y)\,F_1+x(1-x)\frac{\partial F_1}{\partial x}+y(1-y)\frac{\partial F_1}{\partial y},$$

$$(\gamma-\beta-\beta')\,F_1(\beta-1)=(\gamma-\beta-\beta'-\alpha x)\,F_1+x(1-x)\frac{\partial F_1}{\partial x}+x(1-y)\frac{\partial F_1}{\partial y},$$

$$(\gamma-\beta-\beta')\,F_1(\beta'-1)=(\gamma-\beta-\beta'-\alpha y)\,F_1+y(1-y)\frac{\partial F_1}{\partial y}+y(1-x)\frac{\partial F_1}{\partial x},$$

$$(\gamma-1)\,F_1(\gamma-1)=(\gamma-1)\,F_1+x\frac{\partial F_1}{\partial x}+y\frac{\partial F_1}{\partial y},$$

$$\alpha\,F_1(\alpha+1)=\alpha F_1+x\frac{\partial F_1}{\partial x}+y\frac{\partial F_1}{\partial y},$$

$$\beta\,F_1(\beta+1)=\beta\,F_1+x\frac{\partial F_1}{\partial x},$$

$$\beta'\,F_1(\beta'+1)=\beta' F_1+y\frac{\partial F_1}{\partial y},$$

$$(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta-\beta')\,F_1(\gamma+1)=(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\gamma\,F_1+\gamma(1-x)\frac{\partial F_1}{\partial x}+\gamma(1-y)\frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

De la formation effective de ce Tableau résulte que les équations (1), (2), ..., (6) sont bien distinctes, ainsi que nous l'avions annoncé.

5. La méthode que nous venons d'appliquer, pour trouver les huit premières fonctions contiguës en fonction linéaire et homogène de F_1, de $\frac{\partial F_1}{\partial x}$ et de $\frac{\partial F_1}{\partial y}$, s'applique aussi aux suivantes.

Soit à calculer

$$\Phi(\alpha+p,\ \beta+q,\ \beta'+q',\ \gamma+r),$$

p, q, q' et r étant des nombres entiers, positifs ou négatifs. On part de la formule

$$\Phi(\alpha+p,\ \beta+q,\ \beta'+q',\ \gamma+r)$$
$$=\int_0^1 u^{\alpha+p-1}(1-u)^{\gamma-\alpha+r-p-1}(1-ux)^{-\beta-q}(1-uy)^{-\beta'-q'}\,du;$$

si p est négatif, il faudra supposer que la partie réelle de α est supérieure à

$-p$; de même, si $(r-p)$ est négatif, il faudra supposer que la partie réelle de $\gamma-\alpha$ est supérieure à $p-r$.

Sous ces conditions seulement, l'intégrale du second membre a un sens. Cette intégrale peut s'écrire

$$\int_0^1 \mathrm{U}\, u^p(1-u)^{r-p}(1-ux)^{-q}(1-uy)^{-q'}du.$$

On décomposera alors la fonction rationnelle de u,

$$u^p(1-u)^{r-p}(1-ux)^{-q}(1-uy)^{-q'}$$

en ses éléments simples. Supposons que l'on ait

$$u^p(1-u)^{r-p}(1-ux)^{-q}(1-uy)^{-q'}$$
$$=\sum a_h u^h+\sum\frac{\mathrm{A}_\lambda}{u^\lambda}+\sum\frac{\mathrm{B}_\mu}{(1-u)^\mu}+\sum\frac{\mathrm{C}_\nu}{(1-ux)^\nu}+\sum\frac{\mathrm{C}'_{\nu'}}{(1-uy)^{\nu'}}$$

(h, λ, μ, ν, ν' étant des entiers positifs); on aura alors à calculer des intégrales de la forme

$$(7)\quad \int_0^1 u^h\mathrm{U}\,du,\quad \int_0^1\frac{\mathrm{U}\,du}{u^\lambda},\quad \int_0^1\frac{\mathrm{U}\,du}{(1-u)^\mu},\quad \int_0^1\frac{\mathrm{U}\,du}{(1-ux)^\nu},\quad \int_0^1\frac{\mathrm{U}\,du}{(1-uy)^{\nu'}}.$$

Or on a identiquement

$$\frac{d(u^{h+1}\mathrm{U})}{du}=u^{h+1}\mathrm{U}\left(\frac{\alpha+h}{u}+\frac{1+\alpha-\gamma}{1-u}+\frac{\beta x}{1-ux}+\frac{\beta' y}{1-uy}\right),$$

$$\frac{d}{du}\left[\frac{\mathrm{U}}{(1-u)^{\mu-1}}\right]=\frac{\mathrm{U}}{(1-u)^{\mu-1}}\left(\frac{\alpha-1}{u}+\frac{\alpha-\gamma+\mu}{1-u}+\frac{\beta x}{1-ux}+\frac{\beta' y}{1-uy}\right),$$

$$\frac{d}{du}\left[\frac{\mathrm{U}}{(1-ux)^{\nu-1}}\right]=\frac{\mathrm{U}}{(1-ux)^{\nu-1}}\left[\frac{\alpha-1}{u}+\frac{1+\alpha-\gamma}{1-u}+\frac{(\beta+\nu-1)x}{1-ux}+\frac{\beta' y}{1-uy}\right),$$

$$\frac{d}{du}\left[\frac{\mathrm{U}}{(1-uy)^{\nu'-1}}\right]=\frac{\mathrm{U}}{(1-uy)^{\nu'-1}}\left[\frac{\alpha-1}{u}+\frac{1+\alpha-\gamma}{1-u}+\frac{\beta x}{1-ux}+\frac{(\beta'+\nu'-1)y}{1-uy}\right].$$

Enfin

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\mathrm{U}}{u^{\lambda-1}}\right)=\frac{\mathrm{U}}{u^{\lambda-1}}\left(\frac{\alpha-\lambda}{u}+\frac{1+\alpha-\gamma}{1-u}+\frac{\beta x}{1-ux}+\frac{\beta' y}{1-uy}\right).$$

Multipliant par du les deux membres de l'une quelconque de ces équations, et intégrant, de 0 à 1, le premier membre est nul, et les équations obtenues, toute réduction faite, permettront de calculer les intégrales (7),

pourvu que l'on ait déjà calculé les intégrales analogues, où les exposants h, λ, μ, ν, ν' soient moindres.

On passe ensuite des formules concernant la fonction Φ aux formules concernant la fonction F_1, sans aucune difficulté.

Ces dernières formules se trouvent ainsi démontrées pour certaines valeurs de α, β, β', γ. Néanmoins, elles ont lieu pour toute valeur de α, β, β', γ. Il suffit, pour s'en convaincre, d'observer qu'on peut les vérifier directement, en partant de la formule

$$F_1 = \mathbf{S}\, u_{mn},$$

et que, dans le calcul de vérification, on n'a aucune restriction à faire sur les valeurs de α, β, β' et γ.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Toute fonction contiguë* $F_1(\alpha+p, \beta+q, \beta'+q', \gamma+r)$ *est une fonction linéaire et homogène de* F_1, *de* $\frac{\partial F_1}{\partial x}$ *et de* $\frac{\partial F_1}{\partial y}$, *les coefficients étant des fonctions rationnelles de* x *et de* y.

Je donne ici le Tableau des fonctions contiguës obtenues en remplaçant dans F_1 deux des quantités α, β, β', γ par $\alpha \pm 1$, $\beta \pm 1$, $\beta' \pm 1$, $\gamma \pm 1$.

$$\begin{aligned}
&(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta-\beta')\,F_1(\alpha-1,\beta-1)\\
&\quad=[(\gamma-\beta-\beta')(\gamma-\alpha-\beta x-\beta' y)-(\gamma-\beta-\beta'-\alpha)(\alpha-1)x]\,F_1\\
&\qquad+(1+\gamma-\alpha-\beta-\beta')\,x(1-x)\,\frac{\partial F_1}{\partial x}\\
&\qquad+[(\gamma-\beta-\beta')y-(\alpha-1)x](1-y)\,\frac{\partial F_1}{\partial y},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta-\beta')\,F_1(\alpha-1,\beta'-1)\\
&\quad=[(\gamma-\beta-\beta')(\gamma-\alpha-\beta x-\beta' y)-(\gamma-\beta-\beta'-\alpha)(\alpha-1)y]\,F_1\\
&\qquad+(1+\gamma-\alpha-\beta-\beta')\,y(1-y)\,\frac{\partial F_1}{\partial y}\\
&\qquad+[(\gamma-\beta-\beta')x-(\alpha-1)y](1-x)\,\frac{\partial F_1}{\partial x};
\end{aligned}$$

$$(\gamma-1)\,F_1(\alpha-1,\gamma-1)=(\gamma-1-\beta x-\beta' y)\,F_1+x(1-x)\,\frac{\partial F_1}{\partial x}+y(1-y)\,\frac{\partial F_1}{\partial y};$$

$$\beta(\gamma-\alpha)\,F_1(\alpha-1,\beta+1)=[\gamma-\alpha-(1+\beta-\alpha)x-\beta' y]\beta F_1$$
$$+(1+\beta-\alpha)x(1-x)\frac{\partial F_1}{\partial x}+\beta y(1-y)\frac{\partial F_1}{\partial y},$$

$$\beta'(\gamma-\alpha)\,F_1(\alpha-1,\beta'+1)=[\gamma-\alpha-(1+\beta'-\alpha)y-\beta x]\beta' F_1$$
$$+(1+\beta'-\alpha)y(1-y)\frac{\partial F_1}{\partial y}+\beta' x(1-x)\frac{\partial F_1}{\partial x};$$

$$(\gamma-\alpha+1)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta-\beta')\,F_1(\alpha-1,\gamma+1)$$
$$=[(\gamma-\beta-\beta')(\gamma-\alpha-\beta x-\beta' y)-(\alpha-1)(\gamma-\alpha-\beta-\beta')]\gamma F_1$$
$$+[(\gamma-\beta-\beta')x-(\alpha-1)]\,\gamma(1-x)\frac{\partial F_1}{\partial x}$$
$$+[(\gamma-\beta-\beta')y-(\alpha-1)]\,\gamma(1-y)\frac{\partial F_1}{\partial y};$$

$$(\gamma-\beta-\beta')(\gamma-\beta-\beta'+1)\,F_1(\beta-1,\beta'-1)$$
$$=[(\gamma-\beta-\beta')(\gamma-\beta-\beta'+1)+\alpha(\beta y+\beta' x)$$
$$-\alpha(\gamma-\beta-\beta'+1)(x+y)-\alpha(\beta+\beta'-\alpha-1)xy]F_1$$
$$+[(\beta+\beta'-\alpha-1)xy+(1-\beta)y+(1+\gamma-\beta-2\beta')x](1-x)\frac{\partial F_1}{\partial x}$$
$$+[(\beta+\beta'-\alpha-1)xy+(1-\beta')x+(1+\gamma-2\beta-\beta')y](1-y)\frac{\partial F_1}{\partial y};$$

$$(\gamma-1)\,F_1(\beta-1,\gamma-1)=(\gamma-1-\alpha x)F_1+(1-x)\left(x\frac{\partial F_1}{\partial x}+y\frac{\partial F_1}{\partial y}\right),$$
$$(\gamma-1)\,F_1(\beta'-1,\gamma-1)=(\gamma-1-\alpha y)F_1+(1-y)\left(x\frac{\partial F_1}{\partial x}+y\frac{\partial F_1}{\partial y}\right);$$

$$\alpha(\gamma-\beta-\beta')\,F_1(\alpha+1,\beta-1)$$
$$=\alpha[(\beta+\beta'-\alpha-1)x+(\gamma-\beta-\beta')]F_1-(\beta+\beta'-\alpha-1)x(1-x)\frac{\partial F_1}{\partial x}$$
$$+[(\beta+\beta'-\alpha-1)xy-(\gamma-\alpha-1)x+(\gamma-\beta-\beta')y]\frac{\partial F_1}{\partial y},$$

$$\alpha(\gamma-\beta-\beta')\,F_1(\alpha+1,\beta'-1)$$
$$=\alpha[(\beta+\beta'-\alpha-1)y+(\gamma-\beta-\beta')]F_1-(\beta+\beta'-\alpha-1)y(1-y)\frac{\partial F_1}{\partial y}$$
$$+[(\beta+\beta'-\alpha-1)xy-(\gamma-\alpha-1)y+(\gamma-\beta-\beta')x]\frac{\partial F_1}{\partial x};$$

$$\beta'\,F_1(\beta-1,\beta'+1)=\beta' F_1+(y-x)\frac{\partial F_1}{\partial y},$$
$$\beta\;F_1(\beta+1,\beta'-1)=\beta\;F_1+(x-y)\frac{\partial F_1}{\partial x};$$

$$(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta-\beta')(\gamma-\beta-\beta'+1)y\,F_1(\beta-1,\gamma+1)$$
$$=[\alpha(\alpha-\gamma)xy+\alpha(\beta y+\beta' x)+(\gamma-\beta-\beta'+1)(\gamma-\beta-\beta'+\alpha)y]\gamma F_1$$
$$+[(\gamma-\alpha)xy+(1-\beta)y-\beta' x]\,\gamma(1-x)\frac{\partial F_1}{\partial x}$$
$$+[(\gamma-\alpha)xy-(\gamma-\beta)x+(\gamma-2\beta-\beta'+1)y]\,\gamma(1-y)\frac{\partial F_1}{\partial y},$$

$$(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta-\beta')(\gamma-\beta-\beta'+1)x\,F_1(\beta'-1,\gamma+1)$$
$$=[\alpha(\alpha-\gamma)xy+\alpha(\beta y+\beta' x)+(\gamma-\beta-\beta'+1)(\gamma-\beta-\beta'+\alpha)x]\gamma F_1$$
$$+[(\gamma-\alpha)xy+(1-\beta')x-\beta y]\,\gamma(1-y)\frac{\partial F_1}{\partial y}$$
$$+[(\gamma-\alpha)xy-(\gamma-\beta')y+(\gamma-2\beta'-\beta+1)x]\,\gamma(1-x)\frac{\partial F_1}{\partial x};$$

$$\alpha(\gamma-1)F_1(\alpha+1,\gamma-1)=\left(\gamma-1+\frac{\beta x}{1-x}+\frac{\beta' y}{1-y}\right)\alpha F_1$$
$$+\left[\alpha-(\gamma-\alpha-1)\frac{x}{1-x}+\frac{\beta x}{1-x}+\frac{\beta' y}{1-y}\right]x\frac{\partial F_1}{\partial x}$$
$$+\left[\alpha-(\gamma-\alpha-1)\frac{y}{1-y}+\frac{\beta x}{1-x}+\frac{\beta' y}{1-y}\right]y\frac{\partial F_1}{\partial y};$$

$$\beta(\gamma-1)(1-x)F_1(\beta+1,\gamma-1)$$
$$=[\gamma-1-(\gamma-\alpha-1)x]\beta F_1+[\beta-(\gamma-\alpha-1)x]x\frac{\partial F_1}{\partial x}+\beta y\frac{\partial F_1}{\partial y},$$
$$\beta'(\gamma-1)(1-y)F_1(\beta'+1,\gamma-1)$$
$$=[\gamma-1-(\gamma-\alpha-1)y]\beta' F_1+[\beta'-(\gamma-\alpha-1)y]y\frac{\partial F_1}{\partial y}+\beta' x\frac{\partial F_1}{\partial x};$$

$$\alpha\beta(1-x)F_1(\alpha+1,\beta+1)=\alpha\beta\,F_1+(\alpha+\beta-\gamma+1)x\frac{\partial F_1}{\partial x}+\beta\,y\frac{\partial F_1}{\partial y},$$
$$\alpha\beta'(1-y)F_1(\alpha+1,\beta'+1)=\alpha\beta' F_1+(\alpha+\beta'-\gamma+1)y\frac{\partial F_1}{\partial y}+\beta' x\frac{\partial F_1}{\partial x};$$

$$\alpha(\gamma-\beta-\beta')F_1(\alpha+1,\gamma+1)=\alpha\gamma F_1+\gamma\left[(x-1)\frac{\partial F_1}{\partial x}+(y-1)\frac{\partial F_1}{\partial y}\right];$$
$$\beta\beta'(x-y)F_1(\beta+1,\beta'+1)=\beta\beta'(x-y)F_1+\beta' x^2\frac{\partial F_1}{\partial x}-\beta y^2\frac{\partial F_1}{\partial y};$$

$$\beta(\gamma-\alpha)F_1(\beta+1,\gamma+1)=\beta\gamma\,F_1+\gamma(x-1)\frac{\partial F_1}{\partial x},$$
$$\beta'(\gamma-\alpha)F_1(\beta'+1,\gamma+1)=\beta'\gamma F_1+\gamma(y-1)\frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

6. Revenons à la formule démontrée au n° 1, savoir :

$$\frac{\partial^{m+n} F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma : x, y)}{\partial x^m \partial y^n}$$
$$= \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)} F_1(\alpha+m+n, \beta+m, \beta'+n, \gamma+m+n; x, y).$$

De cette formule et du théorème énoncé au numéro précédent résulte le théorème suivant :

Les dérivées partielles d'ordre supérieur à 1 *de la fonction* F_1 *peuvent s'exprimer en fonction linéaire et homogène de* F_1, *de* $\frac{\partial F_1}{\partial x}$ *et de* $\frac{\partial F_1}{\partial y}$, *les coefficients étant des fonctions rationnelles de* x *et de* y.

En particulier, si nous calculons les dérivées partielles du second ordre, en suivant toujours la même méthode de calcul, nous obtenons le système d'équations aux dérivées partielles qui suit :

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} & x(1-x)(x-y)\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + [\gamma(x-y) - (\alpha+\beta+1)x^2 + (\alpha+\beta-\beta'+1)xy + \beta' y]\frac{\partial F_1}{\partial x} \\ & \qquad - \beta y(1-y)\frac{\partial F_1}{\partial y} - \alpha\beta(x-y)F_1 = 0, \\ & y(1-y)(y-x)\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} + [\gamma(y-x) - (\alpha+\beta'+1)y^2 + (\alpha+\beta'-\beta+1)xy + \beta x]\frac{\partial F_1}{\partial y} \\ & \qquad - \beta' x(1-x)\frac{\partial F_1}{\partial x} - \alpha\beta'(y-x)F_1 = 0, \\ & (x-y)\frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} = \beta'\frac{\partial F_1}{\partial x} - \beta\frac{\partial F_1}{\partial y} \quad (^1). \end{aligned} \right.$$

C'est ce système d'équations aux dérivées partielles que nous allons principalement étudier dans le présent travail. Nous en possédons déjà une intégrale particulière. Proposons-nous d'en trouver d'autres.

7. Envisageons pour cela l'intégrale définie

$$\Psi(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y) = \int_g^h u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}(1-uy)^{-\beta'} du,$$

---

(1) *Voir* le Mémoire de M. Appell, *loc. cit.* — Pour l'étude de la dernière équation aux dérivées partielles, prise isolément, *voir* le Chapitre III de la IIe Partie des *Leçons sur la théorie générale des surfaces* de M. Darboux.

où g et h sont deux constantes quelconques, réelles ou imaginaires. Nous prendrons pour le chemin que suit u pour aller du point g au point h, une courbe arbitraire, donnée une fois pour toutes. Si elle part du point o, ou si elle y aboutit, on supposera la partie réelle de α plus grande que zéro; si elle part du point $(+1)$, ou si elle y aboutit, on devra supposer la partie réelle de $(\gamma - \alpha)$ supérieure à zéro. Si elle part du point à l'infini, ou si elle y aboutit, il faudra que la partie réelle de $(1 + \beta + \beta' - \gamma)$ soit supérieure à zéro. Si les points g, h ne coïncident ni l'un ni l'autre, ni avec le point o, ni avec le point $(+1)$, ni avec le point à l'infini, α, β, β' et γ sont arbitraires; mais le chemin que suit u ne doit passer ni par le point o, ni par le point $+1$, ni par le point à l'infini. De plus, $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ ne devront pas se trouver sur ce chemin.

Cela posé, on a, comme pour la fonction Φ, d'abord

$$\frac{\partial^{m+n}\Psi(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y)}{\partial x^m\,\partial y^n}=(\beta,m)(\beta',n)\Psi(\alpha+m+n,\beta+m,\beta'+n,\gamma+m+n;x,y).$$

Ensuite, en posant

$$U(u)=u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}(1-uy)^{-\beta'},$$

on trouve

$$(9)\qquad \Psi(\alpha+1)=\Psi(\gamma-1)-\Psi,$$

$$(10)\qquad \Psi(\beta-1)=x\Psi(\gamma+1)-(x-1)\Psi,$$

$$(11)\qquad \Psi(\beta'-1)=y\Psi(\gamma+1)-(y-1)\Psi,$$

puis

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned}&(\alpha-1)[\Psi(\alpha-1)+\Psi]-(\gamma-\alpha-1)\Psi(\gamma-1)\\&\qquad+\beta x\Psi(\beta+1)+\beta' y\Psi(\beta'+1)=U(h)-U(g),\end{aligned}\right.$$

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned}&\beta\Psi(\beta+1)+\beta'\Psi(\beta'+1)\\&\quad=(\gamma-\alpha-1)\Psi(\gamma-1)+(1+\beta+\beta'-\gamma)\Psi+hU(h)-gU(g).\end{aligned}\right.$$

Enfin

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned}&[(2\gamma-\beta-\beta'-\alpha-1)xy-\beta y-\beta' x]\Psi-(\gamma-\beta-\beta')xy\Psi(\gamma+1)\\&\qquad-(\gamma-\alpha-1)xy\Psi(\gamma-1)+\beta y\Psi(\beta+1)+\beta' x\Psi(\beta'+1)\\&\quad=h^2U(h)-g^2U(g).\end{aligned}\right.$$

Il résulte de là que, entre la fonction Ψ et trois quelconques des huit pre-

Si nous cherchons en particulier l'expression des dérivées partielles du second ordre de Ψ, on arrive au résultat suivant :

$$\begin{aligned}
x(1-x)(x-y)\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} &- [\gamma(x-y) - (1-\alpha-\beta)x^2 - (1-\alpha-\beta-\beta')xy - \beta'y]\frac{\partial\Psi}{\partial x} \\
&- \beta'y(1-y)\frac{\partial\Psi}{\partial y} - \alpha\beta(x-y)\Psi = \beta(x-y)\left[\frac{g(1-g)U(g)}{1-gx} - \frac{h(1-h)U(h)}{1-hx}\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(1-y)(y-x)\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} &- [\gamma(y-x) - (1-\alpha-\beta')y^2 - (1-\alpha-\beta'-\beta)xy - \beta x]\frac{\partial\Psi}{\partial y} \\
&- \beta x(1-x)\frac{\partial\Psi}{\partial x} - \alpha\beta'(y-x)\Psi = \beta'(y-x)\left[\frac{g(1-g)U(g)}{1-gy} - \frac{h(1-h)U(h)}{1-hy}\right],
\end{aligned}$$

$$(x-y)\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\,\partial y} = \beta'\frac{\partial\Psi}{\partial x} - \beta\frac{\partial\Psi}{\partial y}.$$

De là résulte ce fait important : lorsque les intégrales $\int_0^{-\infty} U\,du$ et $\int_1^{-\infty} U\,du$ ont un sens, elles satisfont au système d'équations aux dérivées partielles (8) : en effet, on a alors partie réelle de $\alpha > 0$, partie réelle de $(\gamma - \alpha) > 0$, partie réelle de $(1 + \beta - \beta' - \gamma) > 0$. Les seconds membres des deux premières équations aux dérivées partielles qui précèdent s'annulent donc pour $g = 0, 1$, $h = \mp\infty$.

8. D'autres solutions particulières vont nous être fournies par l'intégrale

$$I(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y) = \int_g^{\frac{h}{x}} u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}(1-uy)^{-\beta'}du.$$

Ici encore, g et h sont des constantes quelconques. Donnons à x une valeur arbitraire, complexe ou réelle, et choisissons un chemin quelconque allant du point g au point $\frac{h}{x}$ en observant les conditions suivantes.

Si $g = 0$, ou $g = 1$, on devra supposer la partie réelle de α, ou la partie réelle de $(\gamma - \alpha)$ supérieure à zéro. Sinon, α et γ seront arbitraires. Si $h = 1$, on devra supposer que la partie réelle de β est inférieure à 1. Enfin, si $g = \infty$, la partie réelle de $(1 + \beta + \beta' - \gamma)$ devra être supérieure à zéro. En tous cas le chemin ne devra passer ni par le point 0, ni par le point $+1$, ni par les points $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, ni par le point à l'infini ; si l'on fait ensuite varier x

second ordre de I, on tombe sur les équations suivantes :

$$x(1-x)(x-y)\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}+[\gamma(x-y)-(\alpha+\beta+1)x^2-(\alpha+\beta-\beta'+1)xy+\beta' y]\frac{\partial I}{\partial x}$$
$$-\beta y(1-y)\frac{\partial I}{\partial y}-\alpha\beta(x-y)I$$
$$=\frac{\beta(x-y)g(1-g)U(g)}{1-gx}+\frac{h}{x}(1-h)U\left(\frac{h}{x}\right)\left[\frac{(\gamma-\alpha-1)(y-x)}{x-h}+\frac{\beta' y(x-1)}{x-hy}\right],$$

$$y(1-y)(y-x)\frac{\partial^2 I}{\partial y^2}+[\gamma(y-x)-(\alpha+\beta'+1)y^2+(\alpha+\beta'-\beta+1)xy+\beta x]\frac{\partial I}{\partial y}$$
$$-\beta' x(1-x)\frac{\partial I}{\partial x}-\alpha\beta'(y-x)I$$
$$=\frac{\beta'(y-x)g(1-g)U(g)}{1-gy}+\frac{\beta'(1-y)h(1-h)U\left(\frac{h}{x}\right)}{x-hy},$$

$$(x-y)\frac{\partial^2 I}{\partial x\,\partial y}+\beta\frac{\partial I}{\partial y}-\beta'\frac{\partial I}{\partial x}=\frac{\beta'}{x-hy}\frac{h}{x}(1-h)U\left(\frac{h}{x}\right).$$

Les seconds membres de ces trois équations aux dérivées partielles s'annulent si l'on y fait $h=1$, $g=0, 1, \infty$ en tenant compte des conditions auxquelles doivent alors satisfaire α, β, β' et γ.

Donc, *lorsque les intégrales* $\int_0^{\frac{1}{x}} U\,du$, $\int_1^{\frac{1}{x}} U\,du$, $\int_{\frac{1}{x}}^{\infty} U\,du$ *ont un sens, elles satisfont au système d'équations aux dérivées partielles* (8).

D'ailleurs l'étude de l'intégrale $\int_g^{\frac{h}{y}} U\,du$ se réduira à permuter dans les résultats précédemment obtenus pour l'intégrale $\int_g^{\frac{h}{x}} U\,du$ à la fois x et y d'une part, β et β' d'autre part. Et, par suite, *si les intégrales* $\int_0^{\frac{1}{y}} U\,du$, $\int_1^{\frac{1}{y}} U\,du$, $\int_{\frac{1}{y}}^{+\infty} U\,du$ *ont un sens, elles satisfont aux équations aux dérivées partielles* (8).

9. Il nous reste enfin à étudier l'intégrale $\int_{\frac{g}{x}}^{\frac{h}{y}} U\,du = J(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)$, où g et h sont des constantes quelconques, de module fini et différent de

zéro. Si $g = 1$ ou $h = 1$, on devra avoir (partie réelle de β) < 1 ou (partie réelle de β') < 1 respectivement; x et y étant donnés, on choisira pour le chemin que doit décrire le point u une courbe quelconque partant du point $\frac{g}{x}$ pour aboutir au point $\frac{h}{y}$, en l'assujettissant à ne passer ni par le point o, ni par le point 1, ni par les points $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, ni par le point à l'infini. Si ensuite x et y tiennent à varier d'une façon continue, on fera varier d'une façon continue les extrémités du chemin arbitrairement choisi, en tenant toujours compte des conditions précédentes.

Cela posé, on a tout d'abord

$$\begin{aligned}
J(\alpha+1) &= \ J(\gamma-1) - J,\\
J(\beta-1) &= xJ(\gamma+1) - (x-1)J,\\
J(\beta'-1) &= yJ(\gamma+1) - (y-1)J,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\alpha-1)[J(\alpha-1)+J] - (\gamma-\alpha-1)J(\gamma-1) + \beta x J(\beta+1) + \beta' y J(\beta'+1)\\
&\quad = U\left(\frac{h}{y}\right) - U\left(\frac{g}{x}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\beta J(\beta+1) + \beta' J(\beta'+1)\\
&\quad = (\gamma-\alpha-1)J(\gamma-1) + (1+\beta+\beta'-\gamma)J + \frac{h}{y}U\left(\frac{h}{y}\right) - \frac{g}{x}U\left(\frac{g}{x}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&[(2\gamma-\beta-\beta'-\alpha-1)xy - \beta y - \beta' x]J - (\gamma-\beta-\beta')xy\,J(\gamma+1)\\
&\qquad - (\gamma-\alpha-1)\,xy\,J(\gamma-1) + \beta y J(\beta+1) + \beta' x J(\beta'+1)\\
&\quad = \frac{h^2}{y^2}U\left(\frac{h}{y}\right) - \frac{g^2}{x^2}U\left(\frac{g}{x}\right).
\end{aligned}$$

On peut donc énoncer, pour la fonction J, le même théorème que pour les fonctions Ψ et I. D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\beta J(\beta+1) &= \beta J + x\frac{\partial J}{\partial x} - \frac{g}{x}U\left(\frac{g}{x}\right),\\
\beta' J(\beta'+1) &= \beta' J + y\frac{\partial J}{\partial y} + \frac{h}{y}U\left(\frac{h}{y}\right),\\
(\gamma-\alpha-1)J(\gamma-1) &= (\gamma-1)J + x\frac{\partial J}{\partial x} + y\frac{\partial J}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Les huit premières fonctions contiguës s'expriment donc linéairement en fonction de J, de $\frac{\partial J}{\partial x}$ et de $\frac{\partial J}{\partial y}$. La même méthode de calcul s'applique d'ailleurs aux fonctions contiguës suivantes, et en particulier aux dérivées

partielles de J d'ordre supérieur à un. Ainsi, si l'on fait le calcul pour les dérivées secondes, on trouve

$$x(1-x)(x-y)\frac{\partial^2 J}{\partial x^2} - [\gamma(x-y) - (\alpha-\beta-1)x^2 - (\alpha-\beta-\beta'-1)xy - \beta' y]\frac{\partial J}{\partial x}$$
$$- \beta' y(1-y)\frac{\partial J}{\partial y} - \alpha\beta(x-y)J$$
$$= \frac{g}{x}(1-g)U\left(\frac{g}{x}\right)\left[\frac{\beta' y(1-x)}{x-gy} - \frac{(\gamma-\alpha-1)(x-y)}{x-g}\right] - \frac{\beta h(1-h)U\left(\frac{h}{y}\right)(1-x)}{y-hx},$$

$$y(1-y)(y-x)\frac{\partial^2 J}{\partial y^2} - [\gamma(y-x) - (\alpha-\beta'-1)y^2 - (\alpha-\beta-\beta'-1)xy - \beta x]\frac{\partial J}{\partial y}$$
$$- \beta x(1-x)\frac{\partial J}{\partial x} - \alpha\beta'(y-x)J$$
$$= \frac{\beta' g(1-g)U\left(\frac{g}{x}\right)(1-y)}{x-gy} - \frac{h}{y}(1-h)U\left(\frac{h}{y}\right)\left[\frac{\beta x(1-y)}{y-hx} - \frac{(\gamma-\alpha-1)(y-x)}{y-h}\right],$$

$$(x-y)\frac{\partial^2 J}{\partial x\,\partial y} - \beta\frac{\partial J}{\partial y} - \beta'\frac{\partial J}{\partial x} = \frac{\beta\frac{h}{y}(1-h)U\left(\frac{h}{y}\right)}{y-hx} - \frac{\beta'\frac{g}{x}(1-g)U\left(\frac{g}{x}\right)}{x-gy}.$$

A la seule inspection de ces équations, on voit que si l'on suppose que l'intégrale $\int_{\frac{1}{y}}^{\frac{1}{g}} U\,du$ a un sens, elle satisfait aux équations aux dérivées partielles (8).

En résumé, nous avons trouvé dix intégrales particulières du système des équations aux dérivées partielles (8).

Ces dix intégrales ont déjà été signalées depuis longtemps par M. Picard (¹). La méthode ici exposée permet d'établir d'une façon nette les relations qui lient la fonction de x et de y définie par l'une de ces dix intégrales, ses dérivées partielles du premier ordre, et les fonctions contiguës qui s'y rattachent.

(¹) *Sur une extension aux fonctions de deux variables du problème de Riemann relatif aux fonctions hypergéométriques*, par M. Émile Picard (*Annales de l'École Normale supérieure*, t. X, année 1881, 2ᵉ série, p. 305 et suiv.).

CHAPITRE II.

10. J'ai l'intention d'établir dans le présent Chapitre un Tableau de 60 intégrales du système (8) analogue au Tableau des 24 intégrales de Kummer relatif à l'équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait la série hypergéométrique de Gauss, $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$. Ce Tableau a été signalé par M. Goursat dans une Note parue aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*.

Pour abréger, je désignerai par $\overline{\arg} x$ celui des arguments de x qui est compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

Reprenons l'intégrale $\int_0^1 U\,du$, telle que nous l'avons définie au n° 1 du Chapitre I. Posons $u = 1 - v$, d'où $v = 1 - u$; v et $(1 - v)$ seront réels, positifs, on pourra poser $\arg v = 0$, $\arg(1 - v) = 0$.

On a

$$1 - ux = (1 - x)\left(1 - \frac{vx}{x - 1}\right);$$

or, d'après nos conventions, l'argument de $1 - ux$ varie de 0 à $\overline{\arg}(1 - x)$; d'autre part, les points $1 - x$, $1 - \frac{vx}{x-1}$ sont dans des régions différentes du plan, l'un au-dessus de l'axe réel X, l'autre au-dessous. On peut donc choisir pour arguments de $(1 - x)$ et de $\left(1 - \frac{vx}{x-1}\right)$ ceux qui sont compris entre $(-\pi)$ et $(+\pi)$, car leur produit aura encore un argument compris entre $(-\pi)$ et $(+\pi)$, comme celui de $(1 - ux)$.

La formule $1 - uy = (1 - y)\left(1 - \frac{vy}{y-1}\right)$ donne lieu aux mêmes conclusions. On a alors

$$\int_0^1 U\,du = (1-x)^{-\beta}(1-y)^{-\beta'}\int_0^1 v^{\gamma-\alpha-1}(1-v)^{\alpha-1}\left(1 - \frac{vx}{x-1}\right)^{-\beta}\left(1 - \frac{vy}{y-1}\right)^{-\beta'} dv.$$

Sous la condition qu'on ait simultanément $\left|\frac{x}{x-1}\right| < 1$, $\left|\frac{y}{y-1}\right| < 1$,

cette dernière intégrale pourra être remplacée par un développement en série défini par l'équation

$$\int_0^1 v^{\gamma-\alpha-1}(1-v)^{\alpha-1}\left(1-\frac{vx}{x-1}\right)^{-\beta}\left(1-\frac{vy}{y-1}\right)^{-\beta'}dv$$
$$= B(\alpha, \gamma-\alpha)\,F_1\left(\gamma-\alpha, \beta, \beta', \gamma; \frac{x}{x-1}, \frac{y}{y-1}\right).$$

J'emploierai les mêmes notations que M. Goursat [1]. C_0 et C_1 seront les cercles de rayon égal à l'unité décrits des points o et +1 comme centres; E_0 et E_1 seront les portions de plan limitées par la corde commune à ces deux circonférences, prolongée indéfiniment, E_0 contenant le point o, E_1 le point (+1). Cela posé, si x et y sont simultanément dans la région E_0 et à l'intérieur du cercle C_0, on a identiquement

$$(15)\quad F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y) = (1-x)^{-\beta}(1-y)^{-\beta'}F_1\left(\gamma-\alpha, \beta, \beta', \gamma; \frac{x}{x-1}, \frac{y}{y-1}\right),$$

avec les conditions

$$-\pi < \arg(1-x) < +\pi,$$
$$-\pi < \arg(1-y) < +\pi \quad [2].$$

11. Posons maintenant

$$u = \frac{v}{1-x+vx}.$$

Tandis que u parcourt le segment rectiligne o——(+1), le point v par-
court un arc OM(+1) = L d'une circonférence qui passe par les trois
points o, 1, $\frac{x-1}{x}$.

De la formule $u = \frac{v}{1-x+vx}$, je tire $v = \frac{u(1-x)}{1-ux}$ et, en posant $x = \xi + i$

$$v = \frac{u(1-\xi)(1-u\xi) - iu(1-u)\eta}{(1-u\xi)^2+\eta^2};$$

je conclus de là que v et x sont dans des régions différentes du plan. D
leurs

$$1-ux = \frac{1}{1-v\frac{x}{x-1}},$$

(1) *Sur l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la séri*
géométrique (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, Suppléme
année 1881, 2e série, p. 11).

(2) Cette formule a été donnée par M. Appell (*loc. cit.*).

donc x et $\left(1 - v\frac{x}{x-1}\right)$ sont dans la même région, et, par suite, $(1-x)$ et $\left(1 - v\frac{x}{x-1}\right)$ dans des régions différentes. On peut donc choisir pour chacune de ces quantités des arguments compris entre $(-\pi)$ et $(+\pi)$, le produit $(1-x)\left(1 - v\frac{x}{x-1}\right)$ aura encore un argument compris entre $(-\pi)$ et $(+\pi)$, et la formule $u = \frac{v}{(1-x)\left(1 - v\frac{x}{x-1}\right)}$ nous permet de poser

$$\overline{\arg} v = \overline{\arg}(1-x) + \overline{\arg}\left(1 - v\frac{x}{x-1}\right).$$

L'égalité $1 - u = \frac{1-v}{1 - v\frac{x}{x-1}}$ nous permet de définir l'argument de $(1-v)$ par la formule

$$\overline{\arg}(1-v) = \overline{\arg}\left(1 - v\frac{x}{x-1}\right).$$

On a d'autre part

$$1 - uy = \frac{1 - v\frac{x-y}{x-1}}{1 - v\frac{x}{x-1}} = (1-ux)\left(1 - v\frac{x-y}{x-1}\right).$$

On posera

$$\overline{\arg}\left(1 - v\frac{x-y}{x-1}\right) = \overline{\arg}(1-uy) - \overline{\arg}(1-ux);$$

cela revient à choisir pour argument de $\left(1 - v\frac{x-y}{x-1}\right)$ celui qui s'annule pour $v = 0$. L'argument d'un facteur une fois choisi, on le laisse varier d'une façon continue, même si, dans sa variation, il franchit l'une des limites $(-\pi)$, $(+\pi)$.

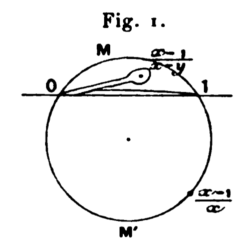
Cela posé, on aura

$$\int_0^{+1} \mathrm{U}\,du = (1-x)^{-\alpha}\int_{\mathrm{L}} v^{\alpha-1}(1-v)^{\gamma-\alpha-1}\left(1 - \frac{vx}{x-1}\right)^{\beta+\beta'-\gamma}\left[1 - \frac{v(x-y)}{x-1}\right]^{-\beta'} dv.$$

L'intégrale du second membre est prise le long de l'arc de circonférence L. On ne peut pas toujours remplacer l'arc $\mathrm{L} = \widehat{\mathrm{OM}1}$ que décrit le point v par le segment rectiligne 0——$(+1)$. Il est vrai que l'on n'a pas à se préoccuper du point critique $v = \frac{x-1}{x}$ qui correspond à $u = \infty$, et qui,

par suite, est sur l'arc $\widehat{\mathrm{OM}'1}$; mais le point critique $v = \frac{x-1}{x-y}$, qui corres-

Fig. 1.



pond à $u = \frac{1}{y}$, pourrait être situé à l'intérieur de l'aire O 1 MO (*fig.* 1). On aurait alors, en posant, pour abréger,

$$V = v^{\alpha-1}(1-v)^{\gamma-\alpha-1}\left(1-\frac{vx}{x-1}\right)^{\beta+\beta'-\gamma}\left[1-\frac{v(x-y)}{x-1}\right]^{-\beta'},$$

$$\int_{\mathrm{L}} V\,dv = (1-e^{2i\pi\beta'})\int_0^{\frac{x-1}{x-y}} V\,dv + e^{2i\pi\beta'}\int_0^1 V\,dv.$$

Maintenant, imaginons que l'on ait $\left|\frac{x}{x-1}\right| < 1$, $\left|\frac{x-y}{x-1}\right| < 1$, en sorte que les deux points $\frac{x-1}{x-y}$, $\frac{x-1}{x}$ soient *extérieurs* au cercle C_0. Alors l'arc $\widehat{\mathrm{OM}'1}$ devra être plus grand que l'arc $\widehat{\mathrm{OM}1}$, tandis que l'aire O 1 MO sera tout entière à l'intérieur de C_0. Donc le point $\frac{x-1}{x-y}$ *ne pourra pas être situé dans cette aire*. Alors on aura

$$\int_0^1 U\,du = (1-x)^{-\alpha}\int_0^1 v^{\alpha-1}(1-v)^{\gamma-\alpha-1}\left(1-\frac{vx}{x-1}\right)^{\beta+\beta'-\gamma}\left(1-v\frac{x-y}{x-1}\right)^{-\beta'}dv,$$

et d'ailleurs

$$\int_0^1 v^{\alpha-1}(1-v)^{\gamma-\alpha-1}\left(1-\frac{vx}{x-1}\right)^{\beta+\beta'-\gamma}\left(1-v\frac{x-y}{x-1}\right)^{-\beta'}dv$$
$$= \mathrm{B}(\alpha,\gamma-\alpha)\,\mathrm{F}_1\left(\alpha,\gamma-\beta-\beta',\beta',\gamma;\frac{x}{x-1},\frac{x-y}{x-1}\right).$$

Si donc x est à la fois dans E_0 et dans C_0, et plus rapproché de y que de 1, et si y est lui-même dans C_0, on aura

(16) $\mathrm{F}_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y) = (1-x)^{-\alpha}\,\mathrm{F}_1\left(\alpha,\gamma-\beta-\beta',\beta',\gamma;\frac{x}{x-1},\frac{x-y}{x-1}\right)$ [1]

[1] Cette formule a été donnée par M. Appell (*loc. cit.*).

avec

$$-\pi < \arg(1-x) < +\pi.$$

La formule de transformation $u = \dfrac{v}{1-y+vy}$ donne des résultats analogues. Il suffit de permuter, dans ce qui précède, x et y, β et β'.

Si donc x et y sont à la fois à l'intérieur de C_0, si, en outre, y est dans la région E_0 et plus rapproché du point x que du point 1, on aura

$$(17)\quad F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y) = (1-y)^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \beta, \gamma-\beta-\beta', \gamma; \frac{y-x}{y-1}, \frac{y}{y-1}\right)$$

avec

$$-\pi < \arg(1-y) < +\pi.$$

12. Soit maintenant

$$u = \frac{1-v}{1-vx}.$$

Tandis que u parcourt le segment rectiligne 0 —— $(+1)$, le point v décrira l'arc $\Lambda = \widehat{oM1}$ d'une circonférence passant par les points 0, 1, $\frac{1}{x}$. Je choisis comme arguments de $(1-x)$ et $(1-y)$ ceux qui sont compris entre $(-\pi)$ et $(+\pi)$, 0, si ces quantités sont réelles.

v et x sont dans la même région du plan, v et $1-x$ dans des régions différentes. Je choisis pour argument de v celui qui est compris entre $(-\pi)$ et $(+\pi)$. Alors la formule

$$1-u = \frac{v(1-x)}{1-vx}$$

nous permet de poser

$$\overline{\arg}(1-vx) = \overline{\arg}\, v + \overline{\arg}(1-x).$$

On a, d'autre part,

$$\overline{\arg}(1-v) = \overline{\arg}(1-vx).$$

L'argument de $\left(1 - v\dfrac{y-x}{y-1}\right)$ se trouve ainsi déterminé par la condition qu'il s'annule pour $v = 0$. On a alors

$$\int_0^1 U\,du = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(1-y)^{-\beta'} \int_\Lambda v^{\gamma-\alpha-1}(1-v)^{\alpha-1}(1-vx)^{\beta+\beta'-\gamma}\left(1-v\frac{y-x}{y-1}\right)^{-\beta'} dv.$$

On ne pourra remplacer l'arc de circonférence Λ par le segment recti-

ligne o——(+ 1) que si le point critique $v = \frac{y-1}{y-x}$ n'est pas sur l'aire o1Mo; c'est ce qui a lieu si l'on a

$$|x| < 1, \quad \left|\frac{y-x}{y-1}\right| < 1.$$

D'ailleurs

$$\int_0^1 v^{\gamma-\alpha-1}(1-v)^{\alpha-1}(1-vx)^{\beta+\beta'-\gamma}\left(1-v\frac{y-x}{y-1}\right)^{-\beta'}dv$$
$$= B(\alpha, \gamma-\alpha)\, F_1\left(\gamma-\alpha, \gamma-\beta-\beta', \beta', \gamma; x, \frac{y-x}{y-1}\right).$$

Par suite, si x et y sont simultanément dans C_0 et si, en même temps, y est plus voisin de x que du point $+1$, on aura

$$(18)\quad F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(1-y)^{-\beta'} F_1\left(\gamma-\alpha, \gamma-\beta-\beta', \beta', \gamma; x, \frac{y-x}{y-1}\right)$$

avec

$$-\pi < \arg(1-x) < +\pi,$$
$$-\pi < \arg(1-y) < +\pi.$$

Si l'on pose $u = \frac{1-v}{1-vy}$, il suffira de permuter, dans les résultats que nous venons d'obtenir, x et y d'une part, β et β' de l'autre, en sorte que, si x et y sont simultanément à l'intérieur de C_0, x étant plus voisin de y que du point $(+1)$, on a

$$(19)\quad F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y) = (1-x)^{-\beta}(1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'} F_1\left(\gamma-\alpha, \beta, \gamma-\beta-\beta', \gamma; \frac{x-y}{x-1}, y\right)$$

avec

$$-\pi < \arg(1-x) < +\pi,$$
$$-\pi < \arg(1-y) < +\pi.$$

13. En résumé, posons

$$\int_0^1 U\,du = B(\alpha, \gamma-\alpha)\varphi_1.$$

Si x et y sont tous les deux à l'intérieur de C_0, on a

$$\varphi_1 = F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y).$$

Lorsque x et y sont simultanément dans la région E_0

$$\varphi_1 = (1-x)^{-\beta}(1-y)^{-\beta'} F_1\left(\gamma-\alpha, \beta, \beta', \gamma; \frac{x}{x-1}, \frac{y}{y-1}\right)$$

avec

$$-\pi < \arg(1-x) < +\pi.$$
$$-\pi < \arg(1-y) < +\pi.$$

Si x est dans la région E_0, et plus voisin du point y que du point $(+1)$,

$$\varphi_1 = (1-x)^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \gamma - \beta - \beta', \beta', \gamma; \frac{x}{x-1}, \frac{x-y}{x-1}\right)$$

avec

$$-\pi < \arg(1-x) < +\pi.$$

Si y est pris dans la région E_0 et plus voisin de x que de $(+1)$,

$$\varphi_1 = (1-y)^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \beta, \gamma - \beta - \beta', \gamma; \frac{y-x}{y-1}, \frac{y}{y-1}\right), \quad [-\pi < \arg(1-y) < +\pi].$$

Si x est à l'intérieur de C_0 et y plus voisin de x que de $(+1)$,

$$\varphi_1 = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(1-y)^{-\beta'} F_1\left(\gamma - \alpha, \gamma - \beta - \beta', \beta', \gamma; x, \frac{y-x}{y-1}\right),$$
$$[-\pi < \arg(1-x) < +\pi],$$
$$[-\pi < \arg(1-y) < +\pi].$$

Enfin, si y est à l'intérieur de C_0 et y plus voisin de x que de $(+1)$,

$$\varphi_1 = (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}(1-x)^{-\beta} F_1\left(\gamma - \alpha, \beta, \gamma - \beta - \beta', \gamma; \frac{x-y}{x-1}, y\right),$$
$$[-\pi < \arg(1-x) < +\pi],$$
$$[-\pi < \arg(1-y) < +\pi].$$

14. Envisageons maintenant l'intégrale

$$\int_0^{-\infty} u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}(1-uy)^{-\beta'} du,$$

u est réel et négatif. Son argument pourra être pris soit égal à $(+\pi)$, soit égal à $(-\pi)$. On posera

$$\arg(1-u) = 0.$$

Pour arguments de $1 - ux$ et de $1 - uy$, on choisit ceux qui s'annulent pour $u = 0$.

On doit avoir

(Partie réelle de α) > 0, Partie réelle de $(1 + \beta + \beta' - \gamma) > 0$.

Les variables x et y seront assujetties à ne pas franchir le segment $(-\infty)-0$.

A ces conditions, l'intégrale a un sens et définit une fonction uniforme de x et de y.

Choisissons d'abord $(+\pi)$ pour argument de u. Posons

$$u = e^{i\pi}\frac{v}{1-v},$$

v étant une quantité réelle appartenant à l'intervalle $(0, 1)$.

On posera

$$\arg v = 0, \qquad \arg(1-v) = 0.$$

Pour arguments de $1 - v(1-x)$ et de $1 - v(1-y)$, il faudra prendre ceux qui s'annulent pour $v = 0$; et alors on a

$$\int_0^{-\infty} \mathrm{U}\, du = e^{\alpha i\pi} \int_0^1 v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta+\beta'-\gamma}[1-v(1-x)]^{-\beta}[1-v(1-y)]^{-\beta'} dv,$$

ou bien

$$\int_0^{-\infty} \mathrm{U}\, du = e^{\alpha i\pi}\,\mathrm{B}(\alpha, 1+\beta+\beta'-\gamma)\varphi_2.$$

D'ailleurs, en se reportant aux formules (15), (16), (17), (18) et (19), on voit que, si x et y sont simultanément dans C_1,

$$\varphi_2 = F_1(\alpha, \beta, \beta', 1+\alpha+\beta+\beta'-\gamma; 1-x, 1-y).$$

Si x et y sont simultanément dans E_1,

$$\varphi_2 = x^{-\beta} y^{-\beta'} F_1\left(1+\beta+\beta'-\gamma, \beta, \beta', 1+\alpha+\beta+\beta'-\gamma; \frac{x-1}{x}, \frac{y-1}{y}\right)$$

avec

$$(-\pi < \arg x < +\pi),$$
$$(-\pi < \arg y < +\pi).$$

Si x est dans la région E_1 et plus voisin de y que de l'origine,

$$\varphi_2 = x^{-\alpha} F_1\left(\alpha, 1+\alpha-\gamma, \beta', 1+\alpha+\beta+\beta'-\gamma; \frac{x-1}{x}, \frac{x-y}{x}\right)$$

avec

$$(-\pi < \arg x < +\pi).$$

Si y est dans la région E_1 et plus voisin de x que de l'origine

$$\varphi_2 = y^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \beta, 1+\alpha-\gamma, 1+\alpha+\beta+\beta'-\gamma; \frac{y-x}{y}, \frac{y-1}{y}\right)$$

avec

$$(-\pi < \arg y < +\pi).$$

Si x est à l'intérieur de C_1 et y plus voisin de x que de l'origine,

$$\varphi_2 = x^{1+\beta'-\gamma} y^{-\beta'} F_1\left(1+\beta+\beta'-\gamma, 1+\alpha-\gamma, \beta', 1+\alpha+\beta+\beta'-\gamma; 1-x, \frac{y-x}{y}\right),$$

Si y est à l'intérieur de C_1 et x plus voisin de y que de l'origine

$$\varphi_2 = x^{-\beta} y^{1+\beta-\gamma} F_1\left(1+\beta+\beta'-\gamma, \beta, 1+\alpha-\gamma, 1+\alpha+\beta+\beta'-\gamma; \frac{x-y}{x}, 1-y\right).$$

Dans ces deux dernières formules, on a

$$(-\pi < \arg x < +\pi),$$
$$(-\pi < \arg y < +\pi).$$

Rappelons que, si l'on prend $\arg u = +\pi$,

$$\int_0^{-\infty} U\,du = e^{+\alpha i\pi} B(\alpha, 1+\beta+\beta'-\gamma)\varphi_2,$$

et, si l'on prend $\arg u = -\pi$,

$$\int_0^{-\infty} U\,du = e^{-\alpha i\pi} B(\alpha, 1+\beta+\beta'-\gamma)\varphi_2,$$

15. Prenons maintenant l'intégrale

$$\int_{+1}^{+\infty} u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}(1-uy)^{-\beta'}\,du.$$

On prendra l'argument de u égal à zéro. Celui de $(1-u)$, quantité réelle négative, pourra être pris égal soit à $(+\pi)$, soit à $(-\pi)$.

Observons que les points x et y sont assujettis à ne pas prendre de valeurs réelles comprises entre o et 1. Pour rendre la fonction uniforme, nous interdirons aux variables x et y de franchir le segment rectiligne $0 —— (+\infty)$. On pourra donc choisir pour argument de $1-ux$, $1-uy$ ceux qui sont compris entre $(-\pi)$ et $(+\pi)$.

Les variables x et y seront assujetties à ne pas franchir le segment $(-\infty)$—o.

A ces conditions, l'intégrale a un sens et définit une fonction uniforme de x et de y.

Choisissons d'abord $(+\pi)$ pour argument de u. Posons

$$u = e^{i\pi}\frac{v}{1-v},$$

v étant une quantité réelle appartenant à l'intervalle $(o, 1)$.

On posera

$$\arg v = o, \qquad \arg(1-v) = o.$$

Pour arguments de $1 - v(1-x)$ et de $1 - v(1-y)$, il faudra prendre ceux qui s'annulent pour $v = o$; et alors on a

$$\int_0^{-\infty} \mathrm{U}\, du = e^{\alpha i\pi}\int_0^1 v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta+\beta'-\gamma}[1-v(1-x)]^{-\beta}[1-v(1-y)] \ldots$$

ou bien

$$\int_0^{-\infty} \mathrm{U}\, du = e^{\alpha i\pi}\,\mathrm{B}(\alpha, 1+\beta+\beta'-\gamma)\varphi_2.$$

D'ailleurs, en se reportant aux formules (15), (16), (17 on voit que, si x et y sont simultanément dans C_1,

$$\varphi_2 = F_1(\alpha, \beta, \beta', 1+\alpha+\beta+\beta'-\gamma; 1-x, 1 \ldots$$

Si x et y sont simultanément dans E_1,

$$\varphi_2 = x^{-\beta}y^{-\beta'}F_1\Big(1+\beta+\beta'-\gamma, \beta, \beta', 1+\alpha+\beta \ldots$$

avec

$$(-\pi < \arg x < +\pi),$$
$$(-\pi < \arg y < +\pi$$

Si x est dans la région E_1 et plus voisin d

$$\varphi_2 = x^{-\alpha}F_1\Big(\alpha, 1+\alpha-\gamma, \beta', 1+\alpha \ldots$$

avec

$$(-\pi < \arg$$

Si x et y sont tous les deux extérieurs au cercle C_0,

$$\varphi_3 = (-x)^{-\beta}(-y)^{-\beta'} F_1\left(1+\beta+\beta'-\gamma, \beta, \beta', 1+\beta+\beta'-\alpha; \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right).$$

Ici, on a

$$-\pi < \arg(-x) < +\pi,$$
$$-\pi < \arg(-y) < +\pi.$$

Si x et y sont tous les deux extérieurs au cercle C_1,

$$\varphi_3 = (1-x)^{-\beta}(1-y)^{-\beta'} F_1\left(\gamma-\alpha, \beta, \beta', 1+\beta+\beta'-\alpha; \frac{1}{1-x}, \frac{1}{1-y}\right).$$

Je dis qu'on a

$$(-\pi) < \arg(1-x) < (+\pi), \qquad (-\pi) < \arg(1-y)(+\pi).$$

En effet, reportons-nous à la formule (15); le facteur $(1-x)^{-\beta}$ provient du produit $(-x)^{-\beta}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-\beta}$; or l'argument de $(-x)$ a été choisi entre $(-\pi)$ et $(+\pi)$, et dans la formule (15) $\left(\text{après qu'on y a changé } x \text{ en } \frac{1}{x}\right)$, le facteur $\left(1-\frac{1}{x}\right)$ a aussi son argument compris entre $(-\pi)$ et $(+\pi)$.

D'ailleurs $(-x)$ et $\left(1-\frac{1}{x}\right)$ sont dans des régions différentes, on a donc

$$\overline{\arg}(1-x) = \overline{\arg}(-x) + \overline{\arg}\left(1-\frac{1}{x}\right), \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Si x est extérieur au cercle C_1, et $\frac{1}{x}$ plus voisin de $\frac{1}{y}$ que de 1,

$$\varphi_3 = (-x)^{1+\beta'-\gamma}(-y)^{-\beta'}(1-x)^{\gamma-1-\beta-\beta'} F_1\left(1+\beta+\beta'-\gamma, 1-\alpha, \beta', 1+\beta+\beta'-\alpha; \frac{1}{1-x}, \frac{y-x}{y(1-x)}\right),$$

avec

$$-\pi < \arg(-x) < +\pi,$$
$$-\pi < \arg(-y) < +\pi,$$
$$-\pi < \arg(1-x) < +\pi.$$

Si y est extérieur au cercle C_1, et $\frac{1}{y}$ plus voisin de $\frac{1}{x}$ que de 1,

$$\varphi_3 = (-y)^{1+\beta-\gamma}(-x)^{-\beta}(1-y)^{\gamma-1-\beta-\beta'}$$
$$\times F_1\left(1+\beta+\beta'-\gamma, \beta, 1-\alpha, 1+\beta+\beta'-\alpha; \frac{x-y}{x(1-y)}, \frac{1}{1-y}\right)$$

avec

$$-\pi < \arg(-x) < +\pi,$$
$$-\pi < \arg(-y) < +\pi,$$
$$-\pi < \arg(1-y) < +\pi.$$

Si x est extérieur à C_0 et $\frac{1}{y}$ plus voisin de $\frac{1}{x}$ que de 1,

$$\varphi_3 = (-x)^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(1-y)^{-\beta'} F_1\left(\gamma-\alpha,\ 1-\alpha,\ \beta',\ 1+\beta+\beta'-\alpha;\ \frac{1}{x},\ \frac{x-y}{x(1-y)}\right)$$

avec

$$-\pi < \arg(-x) < +\pi,$$
$$-\pi < \arg(1-x) < +\pi,$$
$$-\pi < \arg(1-y) < +\pi.$$

Si y est extérieur à C_0, et $\frac{1}{x}$ plus voisin de $\frac{1}{y}$ que de 1,

$$\varphi_3 = (-y)^{\alpha-\gamma}(1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}(1-x)^{-\beta} F_1\left(\gamma-\alpha,\ \beta,\ 1-\alpha,\ 1+\beta+\beta'-\alpha;\ \frac{y-x}{y(1-x)},\ \frac{1}{y}\right)$$

avec

$$-\pi < \arg(-y) < +\pi,$$
$$-\pi < \arg(1-x) < +\pi,$$
$$-\pi < \arg(1-y) < +\pi.$$

16. Examinons actuellement l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{x}} u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}(1-uy)^{-\beta'}\,du.$$

Nous faisons décrire à u le chemin qui va de l'origine au point $\frac{1}{x}$ en droite ligne. Si ω est l'argument de $(-x)$, supposé compris entre $(-\pi)$ et $(+\pi)$, et si l'on veut, pour l'argument de u, un argument compris, lui aussi, entre $(-\pi)$ et $(+\pi)$, il faudra poser $\arg u = \pi - \omega$, si le point $(-x)$ est dans la région supérieure du plan, et $\arg u = -\pi - \omega$, si le point $(-x)$ est dans la région inférieure.

Dans le premier, on écrira

$$u = e^{+i\pi}\frac{v}{(-x)} \quad v \text{ étant réel, et appartenant à l'intervalle } (0,\ 1),$$

et, dans le deuxième cas,

$$u = e^{-i\pi}\frac{v}{(-x)},\quad v \text{ étant réel et appartenant à l'intervalle } (0, 1).$$

$1 - u \;= 1 - \frac{v}{x}$: on choisira l'argument qui s'annule pour $v = 0$;

$1 - ux = 1 - v$; $\arg(1 - ux) = \arg(1 - v) = 0$;

$1 - uy = 1 - \frac{vy}{x}$: on choisira l'argument qui s'annule pour $v = 0$.

On doit avoir

$$\text{Partie réelle de } (\alpha) > 0,$$
$$\text{Partie réelle de } (1 - \beta) > 0,$$

x est assujetti à ne pas prendre de valeurs réelles comprises entre 0 et 1, de façon que le point $(+1)$ ne soit pas sur le parcours de la variable u. Le point $\frac{1}{y}$ ne devra pas, lui non plus, être situé sur ce parcours.

Supposons que $(-x)$ soit dans la région supérieure du plan; alors

$$\overline{\arg}\, u = \pi - \overline{\arg}(-x),$$

et

$$\int_0^{\frac{1}{x}} \mathrm{U}\,du = e^{\alpha i\pi}(-x)^{-\alpha}\int_0^1 v^{\alpha-1}(1-v)^{-\beta}\left(1-\frac{v}{x}\right)^{\gamma-\alpha-1}\left(1-\frac{vy}{x}\right)^{-\beta'}dv.$$

D'ailleurs, sous les conditions $\left|\frac{1}{x}\right| < 1$, $\left|\frac{y}{x}\right| < 1$,

$$\int_0^1 v^{\alpha-1}(1-v)^{-\beta}\left(1-\frac{v}{x}\right)^{\gamma-\alpha-1}\left(1-v\frac{y}{x}\right)^{-\beta'}dv$$
$$= \mathrm{B}(\alpha, 1-\beta)\,\mathrm{F}_1\left(\alpha, 1+\alpha-\gamma, \beta', 1+\alpha-\beta; \frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right).$$

On peut donc poser, si l'on a $\overline{\arg}\, u = \pi - \overline{\arg}(-x)$,

$$\int_0^{\frac{1}{x}} \mathrm{U}\,du = e^{\alpha i\pi}\mathrm{B}(\alpha, 1-\beta)\varphi_4,$$

et, si l'on a $\overline{\arg}\, u = -\pi - \overline{\arg}(-x)$,

$$\int_0^{\frac{1}{x}} \mathrm{U}\,du = e^{-\alpha i\pi}\mathrm{B}(\alpha, 1-\beta)\varphi_4,$$

l'intégrale φ_4 pouvant, d'ailleurs, prendre les formes suivantes :

Si x est extérieur au cercle C_0, et y plus voisin de l'origine que le point x,

$$v \ [illegible] \ (-x)^{-\alpha} F_1\left(\alpha, 1-\alpha-\gamma, \beta', 1-\alpha-\beta; \frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right)$$

avec

$$-\pi < \arg(-x) < +\pi.$$

Si x est extérieur au cercle C_1 et y plus voisin de l'origine que du point x,

$$v \ [illegible] \ F_1\left(1-\beta, 1-\alpha-\gamma, \beta', 1-\alpha-\beta; \frac{1}{1-x}, \frac{y}{y-x}\right).$$

On a toujours

$$-\pi < \arg(-x) < +\pi.$$

D'autre part,

$$\overline{\arg}(1-x) = \overline{\arg}\left(1-\frac{1}{x}\right) + \overline{\arg}(-x);$$

donc

$$-\pi < \arg(1-x) < +\pi.$$

Enfin

$$\arg(y-x) = \overline{\arg}\left(1-\frac{y}{x}\right) + \overline{\arg}(-x).$$

Si x est extérieur au cercle C_1, et y plus voisin de 1 que x,

$$v \ [illegible] \ (1-x)^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \gamma-\beta-\beta', \beta', 1-\alpha-\beta; \frac{1}{1-x}, \frac{1-y}{1-x}\right)$$

avec

$$-\pi < \arg(1-x) < +\pi.$$

Si y est plus voisin de 1 que de x, et aussi plus voisin de 0 que de x,

$$v \ [illegible] \ (y-x)^{-\alpha} F_1\left(\alpha, 1-\alpha-\gamma, \gamma-\beta-\beta', 1+\alpha-\beta; \frac{y-1}{y-x}, \frac{y}{y-x}\right)$$

avec

$$\arg(y-x) = \overline{\arg}\left(1-\frac{y}{x}\right) + \overline{\arg}(-x).$$

Si x est extérieur à C_0 et y plus voisin de 1 que de x,

$$v \ [illegible] \ (-x)^{\beta+\beta'-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(y-x)^{-\beta'} F_1\left(1-\beta, \gamma-\beta-\beta', \beta', 1+\alpha-\beta; \frac{1}{x}, \frac{y-1}{y-x}\right)$$

avec

$$-\pi < \arg\ (-x) < +\pi,$$
$$-\pi < \arg(1-x) < +\pi,$$
$$\arg(y-x) = \overline{\arg}\left(1-\frac{y}{x}\right) + \overline{\arg}(-x).$$

Enfin, si y est à la fois plus voisin des points 1 et 0 que x,

$$\varphi_4 = (-x)^{\beta+\beta'-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}(y-x)^{1-\beta-\beta'}F_1\left(1-\beta, 1+\alpha-\gamma, \gamma-\beta-\beta', 1+\alpha-\beta; \frac{1-y}{1-x}, \frac{y}{x}\right)$$

avec

$$-\pi < \arg\ (-x) < +\pi,$$
$$-\pi < \arg(1-x) < +\pi,$$
$$\arg(y-x) = \overline{\arg}\left(1-\frac{y}{x}\right) + \overline{\arg}(-x).$$

L'intégrale $\int_0^{\frac{1}{y}} U\,du$ donne lieu à des considérations analogues. Il suffit de permuter dans les résultats précédents x et y d'une part, β et β' de l'autre.

Si l'on a $\overline{\arg} u = \pi - \overline{\arg}(-y)$

$$\int_0^{\frac{1}{y}} U\,du = e^{\alpha i\pi} B(\alpha, 1-\beta')\varphi_5,$$

et si l'on a $\overline{\arg} u = -\pi - \overline{\arg}(-y)$

$$\int_0^{\frac{1}{y}} U\,du = e^{-\alpha i\pi} B(\alpha, 1-\beta')\varphi_5,$$

l'intégrale φ_5 pouvant d'ailleurs prendre les formes suivantes.

Si y est extérieur au cercle C_0 et x plus voisin de l'origine que y,

$$\varphi_5 = (-y)^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \beta, 1+\alpha-\gamma, 1+\alpha-\beta'; \frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right)$$

avec

$$-\pi < \arg(-y) < +\pi.$$

Si y est extérieur au cercle C_1 et x plus voisin de l'origine que de y,

$$\varphi = (-y)^{-\beta'}(1-y)^{\gamma-\alpha-1}(x-y)^{-\beta}F_1\left(1-\beta, \beta, 1-\alpha-\gamma, 1-\alpha-\beta ; \frac{x}{x-y}, \frac{1}{1-y}\right)$$

avec

$$-\pi < \arg(-y) < +\pi,$$
$$-\pi < \arg(1-y) < +\pi,$$

$$\arg(x-y) = \overline{\arg}\left(1-\frac{x}{y}\right) + \overline{\arg}(-y).$$

Si y est extérieur au cercle C_1 et x plus voisin de 1 que y,

$$\varphi = (1-y)^{-\alpha}F_1\left(\alpha, \beta, \gamma-\beta-\beta', 1-\alpha-\beta' ; \frac{1-x}{1-y}, \frac{1}{1-y}\right)$$

avec

$$-\pi < \arg(1-y) < +\pi.$$

Si x est plus voisin de 1 et de 0 que de y,

$$\varphi = (x-y)^{-\alpha}F_1\left(\alpha, \gamma-\beta-\beta', 1+\alpha-\gamma, 1-\alpha-\beta' ; \frac{x}{x-y}, \frac{x-1}{x-y}\right)$$

avec

$$\arg(x-y) = \overline{\arg}\left(1-\frac{x}{y}\right) + \overline{\arg}(-y).$$

Si y est extérieur à C_0, et x plus voisin de 1 que de y,

$$\varphi = (-y)^{\beta+\beta'-\gamma}(1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}(x-y)^{-\beta}F_1\left(1-\beta', \beta, \gamma-\beta-\beta', 1+\alpha-\beta' ; \frac{x-1}{x-y}, \frac{1}{y}\right)$$

avec

$$-\pi < \arg(-y) < +\pi,$$
$$-\pi < \arg(1-y) < +\pi,$$

$$\arg(x-y) = \overline{\arg}\left(1-\frac{x}{y}\right) + \overline{\arg}(-y).$$

Enfin, si x est à la fois plus voisin des points 1 et 0 que y,

$$\varphi = (-y)^{\beta+\beta'-\gamma}(1-y)^{\gamma-\alpha-1}(x-y)^{1-\beta-\beta'}F_1\left(1-\beta', \gamma-\beta-\beta', 1+\alpha-\gamma, 1+\alpha-\beta' ; \frac{x}{y}, \frac{1-x}{1-y}\right)$$

avec

$$-\pi < \arg\ (-y) < +\pi,$$
$$-\pi < \arg(1-y) < +\pi,$$

$$\arg(x-y) = \overline{\arg}\left(1-\frac{x}{y}\right) + \overline{\arg}(-y).$$

17. Soit à étudier l'intégrale

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\infty} u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}(1-uy)^{-\beta'}du.$$

Ici nous poserons $u = \frac{1}{vx}$, v étant une quantité réelle appartenant à l'intervalle $(0, 1)$; on aura donc

$$\arg u = -\overline{\arg} x.$$

On doit donc avoir

$$\text{Partie réelle de} \quad (1-\beta) > 0,$$
$$\text{Partie réelle de} \quad (1+\beta+\beta'-\gamma) > 0.$$

D'autre part,

$$1-u = 1-\frac{1}{vx};$$

il ne faut pas que cette quantité puisse devenir nulle. x est donc assujetti à ne pas prendre de valeurs réelles supérieures à 1.

De même

$$1-uy = 1-\frac{y}{vx};$$

il ne faut pas que ce facteur puisse s'annuler. Donc $\frac{y}{x}$ est assujetti à ne pas prendre de valeurs réelles comprises entre 0 et 1, c'est-à-dire que x et y ne devront pas se trouver en ligne droite avec l'origine, du même côté par rapport à l'origine, y étant compris entre l'origine et le point x.

Maintenant

$$1-u = (-1)\frac{1-vx}{vx}.$$

Pour argument de $1-vx$, je choisis celui qui s'annule pour $v = 0$. Si l'on veut que l'argument de $1-u$ soit compris entre $-\pi$ et $+\pi$, si x est dans

la partie supérieure du plan, il faudra poser

$$1 - u = e^{+i\pi}\frac{1 - vx}{vx} \qquad \text{et} \qquad 1 - u = e^{-i\pi}\frac{1 - vx}{vx}$$

lorsque x sera dans la partie inférieure.

De même

$$1 - uy = (-1)\frac{y}{vx}\left(1 - v\frac{x}{y}\right);$$

on choisira pour argument de $1 - v\frac{x}{y}$ celui qui s'annule pour $v = 0$. De plus, si l'on veut que l'argument de $1 - uy$ soit compris entre $-\pi$ et $+\pi$, si $\frac{x}{y}$ est dans la partie supérieure du plan, on posera

$$1 - uy = e^{+i\pi}\frac{y}{vx}\left(1 - v\frac{x}{y}\right);$$

si, au contraire, $\frac{x}{y}$ est dans la partie inférieure du plan, on écrira

$$1 - uy = e^{-i\pi}\frac{y}{vx}\left(1 - \frac{vx}{y}\right).$$

Si l'on pose $x = \xi + i\eta$, $y = \xi' + i\eta'$,

$$\frac{x}{y} = \frac{\xi\xi' + \eta\eta' + i(\eta\xi' - \xi\eta')}{(\xi'^2 + \eta'^2)}.$$

Si $\frac{x}{y}$ est dans la partie supérieure du plan, on a

$$\eta\xi' - \xi\eta' > 0.$$

Par suite, si l'on parcourt le périmètre du triangle Oxy dans le sens Oxy, on a l'aire du triangle *à sa droite*. On aura l'aire du triangle *à sa gauche* si le point $\frac{x}{y}$ est sur la partie inférieure du plan.

Enfin,

$$1 - ux = e^{+\pi i}\frac{1 - v}{v}.$$

On aura alors

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\infty} U\,du = e^{\beta i\pi + \beta' i\pi + (\gamma-\alpha-1)i\pi} x^{1+\beta'-\gamma} y^{-\beta'} \int_0^1 v^{\beta+\beta'-\gamma}(1 - v)^{-\beta}(1 - vx)^{\gamma-\alpha-1}\left(1 - \frac{vx}{y}\right)^{-\beta'} dv.$$

les valeurs de ε, ε', ε'' étant déterminées ainsi qu'il suit :

Si $\arg(1 - ux) = +\pi$,	$\varepsilon = -1$.
Si $\arg(1 - ux) = -\pi$,	$\varepsilon = +1$.
Si $\frac{x}{y}$ est dans la partie supérieure du plan,	$\varepsilon' = -1$.
Si $\frac{x}{y}$ est dans la partie inférieure du plan,	$\varepsilon' = +1$.
Si x est dans la partie supérieure du plan,	$\varepsilon'' = +1$.
Si x est dans la partie inférieure du plan,	$\varepsilon'' = -1$.

D'ailleurs, sous les conditions $|x| < 1$, $\left|\frac{x}{y}\right| < 1$,

$$\int_0^1 v^{\beta+\beta'-\gamma}(1-v)^{-\beta}(1-vx)^{\gamma-\alpha-1}\left(1-v\frac{x}{y}\right)^{-\beta'}dv$$
$$= B(1+\beta+\beta'-\gamma, 1-\beta)\,F_1\left(1+\beta+\beta'-\gamma, 1+\alpha-\gamma, \beta', 2+\beta'-\gamma; x, \frac{x}{y}\right).$$

En résumé,

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\infty} U\,du = e^{\varepsilon\beta i\pi+\varepsilon'\beta' i\pi+\varepsilon''(\gamma-\alpha-1)i\pi}\,B(1+\beta+\beta'-\gamma, 1-\beta)\varphi_6,$$

φ_6 ayant l'une des six formes qui suivent.

Si x est dans C_0 et plus voisin de l'origine que y,

$$\varphi_6 = x^{1+\beta'-\gamma}y^{-\beta'}F_1\left(1+\beta+\beta'-\gamma, 1+\alpha-\gamma, \beta', 2+\beta'-\gamma; x, \frac{x}{y}\right)$$

avec

$$-\pi < \arg x < +\pi$$

et

$$\arg y = \overline{\arg} x - \overline{\arg}\frac{x}{y}.$$

Si x est plus voisin de l'origine que de 1 et de y,

$$\varphi_6 = x^{1+\beta'-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}(y-x)^{-\beta'}F_1\left(1-\beta, 1+\alpha-\gamma, \beta', 2+\beta'-\gamma; \frac{x}{x-1}, \frac{x}{x-y}\right).$$

On a d'abord

$$-\pi < \arg x < +\pi,$$

puis

$$-\pi < \arg(1-x) < +\pi,$$

enfin

$$\arg(y-x) = \overline{\arg}\left(\frac{y}{x}-1\right) + \overline{\arg}\, x.$$

Si x est dans la région E_0 et $\frac{1}{y}$ plus voisin de 1 que $\frac{1}{x}$,

$$\varphi_6 = x^{1-\beta-\gamma} y^{-\beta'} (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1} F_1\left[1-\beta-\beta'-\gamma, 1-\alpha, \beta', 2-\beta-\gamma; \frac{x}{x-1}, \frac{x(y-1)}{y(x-1)}\right],$$

avec

$$-\pi < \arg x < +\pi,$$
$$\arg y = \overline{\arg}\, x - \overline{\arg}\, \frac{x}{y},$$
$$-\pi < \arg(1-x) < +\pi.$$

Si $\frac{1}{y}$ est plus voisin de 1 et de 0 que de $\frac{1}{x}$,

$$\varphi_6 = x^{1-\beta-\gamma} y^{1-\beta'} (y-x)^{\gamma-\beta-\beta'-1} F_1\left[1-\beta-\beta'-\gamma, 1-\alpha-\gamma, 1-\alpha, 2-\beta'-\gamma; \frac{x(1-y)}{x-y}, \frac{x}{x-y}\right]$$

avec

$$-\pi < \arg x < +\pi,$$
$$\arg y = \overline{\arg}\, x - \overline{\arg}\, \frac{x}{y},$$
$$\arg(y-x) = \overline{\arg}\left(\frac{y}{x}-1\right) + \overline{\arg}\, x.$$

Si x est dans C_0 et si $\frac{1}{y}$ est plus voisin de 1 que de $\frac{1}{x}$,

$$\varphi_6 = x^{1+\beta'-\gamma} (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} (y-x)^{-\beta'} F_1\left[1-\beta, 1-\alpha, \beta', 2+\beta'-\gamma; x, \frac{x(1-y)}{x-y}\right],$$

avec

$$-\pi < \arg x < +\pi,$$
$$-\pi < \arg(1-x) < +\pi,$$
$$\arg(y-x) = \overline{\arg}\left(\frac{y}{x}-1\right) + \overline{\arg}\, x.$$

Enfin, si x est plus voisin de l'origine que y, et $\frac{1}{y}$ plus voisin de 1 que de $\frac{1}{x}$,

$$\varphi_6 = x^{1-\beta-\gamma} y^{\beta-1} (y-x)^{1-\beta-\beta'} (1-x)^{\gamma-\alpha-1} F_1\left[1-\beta, 1+\alpha-\gamma, 1-\alpha, 2+\beta'-\gamma; \frac{x(y-1)}{y(x-1)}, \frac{x}{y}\right],$$

avec

$$
\begin{aligned}
&-\pi < \arg x < +\pi,\\
&-\pi < \arg(1-x) < +\pi,\\
&\arg y = \overline{\arg} x - \overline{\arg}\left(\frac{x}{y}\right),\\
&\arg(y-x) = \overline{\arg}\left(\frac{y}{x}-1\right) + \overline{\arg} x.
\end{aligned}
$$

Pour obtenir les résultats concernant l'intégrale $\int_{\frac{1}{y}}^{\infty} \mathrm{U}\,du$, il n'y a qu'à permuter, dans ce qui précède, x et y, β et β'.

On a donc

$$\int_{\frac{1}{y}}^{\infty} \mathrm{U}\,du\, e^{\varepsilon\beta i\pi+\varepsilon'\beta' i\pi+\varepsilon''(\gamma-\alpha-1)i\pi}\,\mathrm{B}(1+\beta+\beta'-\gamma,\ 1-\beta')\,\varphi_7,$$

ε, ε' et ε'' étant déterminés comme il suit :

Si $\arg(1-uy) = +\pi$, $\quad \varepsilon' = -1$,
Si $\arg(1-uy) = -\pi$, $\quad \varepsilon' = +1$.

Si $\frac{y}{x}$ est dans la partie supérieure du plan, $\varepsilon = -1$,
Si $\frac{y}{x}$ est dans la partie inférieure du plan, $\varepsilon = +1$,
Si y est dans la partie supérieure du plan, $\varepsilon'' = +1$,
Si y est dans la partie inférieure du plan, $\varepsilon'' = -1$.

φ_7 aura, d'ailleurs, l'une des six formes ci-jointes :

Si y est dans le cercle C_0 et plus voisin de l'origine que x,

$$\varphi_7 = y^{1+\beta-\gamma} x^{-\beta}\,\mathrm{F}_1\left(1+\beta+\beta'-\gamma,\ \beta,\ 1+\alpha-\gamma,\ 2+\beta-\gamma;\ \frac{y}{x},\ y\right);$$

Si y est plus voisin de l'origine que de 1 et de x,

$$\varphi_7 = y^{1+\beta-\gamma}(1-y)^{\gamma-\alpha-1}(x-y)^{-\beta}\,\mathrm{F}_1\left(1-\beta',\ \beta,\ 1+\alpha-\gamma,\ 2+\beta-\gamma;\ \frac{y}{y-x},\ \frac{y}{y-1}\right);$$

Si y est dans la région E_0, et $\frac{1}{x}$ plus voisin de 1 que $\frac{1}{y}$,

$$\varphi_7 = y^{1+\beta-\gamma} x^{-\beta}(1-y)^{\gamma-1-\beta-\beta'}\,\mathrm{F}_1\left[1+\beta+\beta'-\gamma,\ \beta,\ 1-\alpha,\ 2+\beta-\gamma;\ \frac{y(x-1)}{x(y-1)},\ \frac{y}{y-1}\right];$$

Si $\frac{1}{x}$ est plus voisin de 1 et de 0 que de $\frac{1}{y}$,

$$\varphi_7 = y^{1+\beta-\gamma} x^{1+\beta'-\gamma} (x-y)^{\gamma-1-\beta-\beta'} F_1\left[1+\beta+\beta'-\gamma, 1-\alpha, 1+\alpha-\gamma, 2+\beta-\gamma; \frac{y}{y-x}, \frac{y(1-x)}{y-x}\right];$$

Si y est dans C_0, et si $\frac{1}{x}$ est plus voisin de 1 que de $\frac{1}{y}$,

$$\varphi_7 = y^{1+\beta-\gamma} (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'} (x-y)^{-\beta} F_1\left[1-\beta', \beta, 1-\alpha, 2+\beta-\gamma; \frac{y(1-x)}{y-x}, y\right];$$

Enfin, si y est plus voisin de l'origine que x, et $\frac{1}{x}$ plus voisin de 1 que $\frac{1}{y}$,

$$\varphi_7 = y^{1+\beta-\gamma} x^{\beta'-1} (x-y)^{1-\beta-\beta'} (1-y)^{\gamma-\alpha-1} F_1\left[1-\beta', 1-\alpha, 1+\alpha-\gamma, 2+\beta-\gamma; \frac{y}{x}, \frac{y(x-1)}{x(y-1)}\right].$$

Dans ces formules, on a

$$\begin{aligned} &-\pi < \arg y < +\pi, \\ &-\pi < \arg(1-y) < +\pi, \\ &\arg x = \overline{\arg} y - \overline{\arg} \frac{y}{x}, \\ &\arg(x-y) = \overline{\arg}\left(\frac{x}{y} - 1\right) + \overline{\arg} y. \end{aligned}$$

18. Nous arrivons à l'intégrale

$$\int_{+1}^{+\frac{1}{x}} u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}(1-uy)^{-\beta'} du.$$

On doit avoir

Partie réelle de $(\gamma-\alpha) > 0$,
Partie réelle de $(1-\beta) > 0$.

On fera décrire à u le chemin rectiligne qui va du point 1 au point $\frac{1}{x}$; on posera, en conséquence, $u = 1 - v\frac{x-1}{x}$, v étant une variable réelle appartenant à l'intervalle $(0, 1)$. Ce facteur ne doit pas s'annuler. Or l'équation $u = 0$ équivaut à $x = 1 - \frac{1}{1-v}$; donc x est assujetti à ne pas prendre de valeurs réelles négatives.

De même

$$1 - uy = (1 - y)\left[1 - v\frac{y(1-x)}{x(1-y)}\right].$$

Ce dernier facteur ne doit pas s'annuler; $\frac{x(1-y)}{y(1-x)}$ est assujetti à ne pas prendre de valeur réelle, positive, comprise entre zéro et 1. Géométriquement, les points $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{x}$ ne devront pas être en ligne droite avec le point $+1$, $\frac{1}{y}$ étant plus près de 1 que $\frac{1}{x}$.

Passons aux arguments.

$u = 1 - v\frac{x-1}{x}$; on prendra pour argument de u celui qui s'annule pour $v = 0$.

$1 - u = -\frac{1-x}{x}v$; si x est dans la partie supérieure du plan, $\frac{1}{x}$ est dans la partie inférieure; il en est de même de $\frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1$. Si x est dans la partie supérieure du plan, on posera donc

$$\left(1 - u = e^{+i\pi}\frac{1-x}{x}v\right),$$

et si x est dans la partie inférieure,

$$1 - u = e^{-i\pi}\frac{1-x}{x}v,$$

en choisissant pour argument de $\frac{1-x}{x}$ celui qui est compris entre $-\pi$ et $+\pi$. L'argument de v est égal à zéro.

$1 - ux = (1-x)(1-v)$; posons $\arg(1-v) = 0$. Choisissons pour argument de $(1-x)$ celui qui est compris entre $-\pi$ et $+\pi$; alors

$$\arg(1-ux) = \overline{\arg}(1-x).$$

Remarquons que l'on a

$$\overline{\arg} x = \overline{\arg}(1-x) - \overline{\arg}\frac{1-x}{x},$$

$(1-uy) = (1-y)\left[1 - \frac{vy(1-x)}{x(1-y)}\right]$. On prendra pour argument de $(1-y)$ celui qui est compris entre $-\pi$ et $+\pi$, et pour argument de $1 - \frac{vy(1-x)}{x(1-y)}$ celui qui s'annule pour $v = 0$.

On arrive alors aux résultats suivants :

Si x est dans la partie supérieure du plan,

$$\int_1^{\frac{1}{x}} \mathrm{U}\,du = e^{(\gamma-\alpha-1)i\pi}\mathrm{B}(\gamma-\alpha, 1-\beta)\,\varphi_8;$$

Si x est dans la partie inférieure du plan,

$$\int_1^{\frac{1}{x}} \mathrm{U}\,du = e^{(1+\alpha-\gamma)i\pi}\mathrm{B}(\gamma-\alpha, 1-\beta)\,\varphi_8;$$

D'ailleurs, φ_8 prend les six formes qui suivent :

Si x est dans E_1, et $\frac{1}{x}$ plus près de 1 que $\frac{1}{y}$,

$$\varphi_8 = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}x^{\alpha-\gamma}(1-y)^{-\beta'}\mathrm{F}_1\left[\gamma-\alpha, 1-\alpha, \beta', 1+\gamma-\alpha-\beta; \frac{x-1}{x}, \frac{y(1-x)}{x(1-y)}\right],$$

les arguments de x, $1-x$, $1-y$ étant compris entre $-\pi$ et $+\pi$;

Si x est dans C_1 et $\frac{1}{x}$ plus voisin de 1 que de $\frac{1}{y}$,

$$\varphi_8 = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}x^{1+\beta'-\gamma}(x-y)^{-\beta'}\mathrm{F}_1\left[1-\beta, 1-\alpha, \beta', 1+\gamma-\alpha-\beta; 1-x, \frac{y(1-x)}{y-x}\right];$$

Si x est dans C_1 plus près de 1 que y,

$$\varphi_8 = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(1-y)^{-\beta'}\mathrm{F}_1\left(\gamma-\alpha, \gamma-\beta-\beta', \beta', 1+\gamma-\alpha-\beta; 1-x, \frac{x-1}{y-1}\right);$$

Si x est plus voisin de 1 que de y, $\frac{1}{x}$ plus voisin de 1 que de $\frac{1}{y}$,

$$\varphi_8 = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}(x-y)^{\alpha-\gamma}\mathrm{F}_1\left[\gamma-\alpha, 1-\alpha, \gamma-\beta-\beta', 1+\gamma-\alpha-\beta; \frac{1-x}{y-x}, \frac{y(1-x)}{y-x}\right];$$

Si x est dans la région E_1, plus voisin de 1 que de y,

$$\varphi_8 = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}x^{\beta+\beta'-\gamma}(x-y)^{-\beta'}\mathrm{F}_1\left[1-\beta, \gamma-\beta-\beta', \beta', 1+\gamma-\alpha-\beta; \frac{x-1}{x}, \frac{1-x}{y-x}\right];$$

Si enfin x est plus voisin de 1 que y, et $\frac{1}{x}$ plus voisin de 1 que $\frac{1}{y}$,

$$\varphi_8 = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}x^{\beta+\beta'-\gamma}(1-y)^{\beta-1}(x-y)^{1-\beta-\beta'}\mathrm{F}_1\left[1-\beta, 1-\alpha, \gamma-\beta-\beta', 1+\gamma-\alpha-\beta; \frac{x-1}{y-1}, \frac{y(1-x)}{x(1-y)}\right].$$

Dans ces formules, les arguments de x, $1-x$, $1-y$ sont compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

On a, d'autre part,

$$\arg(x-y) = \overline{\arg}\left[1 - \frac{y(1-x)}{x(1-y)}\right] + \overline{\arg}\, x + \overline{\arg}(1-y).$$

En permutant, dans ces résultats, x et y, β et β', on aura ceux qui concernent l'intégrale $\int_{+1}^{+\frac{1}{y}} \mathrm{U}\, du$.

Les voici : si y est dans la partie supérieure du plan,

$$\int_1^{\frac{1}{y}} \mathrm{U}\, du = e^{(\gamma-\alpha-1)i\pi} \mathrm{B}(\gamma-\alpha, 1-\beta')\varphi_2;$$

Si y est dans la partie inférieure du plan,

$$\int_1^{\frac{1}{y}} \mathrm{U}\, du = e^{-(\gamma-\alpha-1)i\pi} \mathrm{B}(\gamma-\alpha, 1-\beta')\varphi_2,$$

φ_2 pourra prendre l'une des six formes qui suivent :

Si y est dans E_1, $\frac{1}{y}$ plus voisin de 1 que $\frac{1}{x}$,

$$\varphi_2 = (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'} y^{\alpha-\gamma} (1-x)^{-\beta} \mathrm{F}_1\left[\gamma-\alpha, \beta, 1-\alpha, 1+\gamma-\alpha-\beta'; \frac{x(1-y)}{y(1-x)}, \frac{y-1}{y}\right];$$

Si y est dans C_1, et $\frac{1}{y}$ plus près de 1 que $\frac{1}{x}$,

$$\varphi_2 = (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'} y^{1+\beta-\gamma} (y-x)^{-\beta} \mathrm{F}_1\left[1-\beta', \beta, 1-\alpha, 1+\gamma-\alpha-\beta'; \frac{x(1-y)}{x-y}, 1-y\right];$$

Si y est, dans C_1, plus voisin de 1 que x,

$$\varphi_2 = (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'} (1-x)^{-\beta} \mathrm{F}_1\left(\gamma-\alpha, \beta, \gamma-\beta-\beta', 1+\gamma-\alpha-\beta'; \frac{y-1}{x-1}, 1-y\right);$$

Si y est plus voisin de 1 que de x et $\frac{1}{y}$ plus voisin de 1 que de $\frac{1}{x}$,

$$\varphi_2 = (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'} (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} (y-x)^{\alpha-\gamma} \mathrm{F}_1\left[\gamma-\alpha, \gamma-\beta-\beta', 1-\alpha, 1+\gamma-\alpha-\beta'; \frac{x(1-y)}{x-y}, \frac{1-y}{x-y}\right];$$

Si y est, dans la région E_1, plus voisin de 1 que de x,

$$\varphi_5 = (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'} y^{\beta+\beta'-\gamma} (y-x)^{-\beta} F_1\left(1-\beta', \beta, \gamma-\beta-\beta', 1+\gamma-\alpha-\beta'; \frac{1-y}{x-y}, \frac{y-1}{y}\right);$$

Enfin, si y est plus voisin de 1 que x, $\frac{1}{y}$ plus voisin de 1 que $\frac{1}{x}$,

$$\varphi_6 = (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta} y^{\beta+\beta'-\gamma} (1-x)^{\beta'-1} (y-x)^{1-\beta-\beta'} F_1\left[1-\beta', \gamma-\beta-\beta', 1-\alpha, 1+\gamma-\alpha-\beta'; \frac{x(1-y)}{y(1-x)}, \frac{y-1}{x-1}\right].$$

Dans ces formules, les arguments de y, $1-x$, $1-y$ sont compris entre $-\pi$ et $+\pi$, et l'on a

$$\arg(y-x) = \overline{\arg}\left[1 - \frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right] + \overline{\arg} y + \overline{\arg}(1-x).$$

19. Reste enfin à étudier l'intégrale

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{y}} u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}(1-uy)^{-\beta'}\,du.$$

En premier lieu, on doit avoir

Partie réelle de $(1-\beta) > 0$.
Partie réelle de $(1-\beta') > 0$.

Le chemin décrit par u sera le segment rectiligne allant de $\frac{1}{x}$ à $\frac{1}{y}$.

Posons

$$u = \frac{1}{x}\left[1 - \frac{v(y-x)}{y}\right],$$

v étant réel et appartenant à l'intervalle $(0, 1)$. Ce facteur ne doit pas s'annuler. Or l'égalité $1 - v\frac{y-x}{y} = 0$ revient à $\frac{x}{y} = 1 - \frac{1}{v}$: la condition revient donc géométriquement à la suivante : les points x et y ne doivent pas être à la fois en ligne droite avec l'origine, et de part et d'autre de l'origine.

D'ailleurs $1 - u = \frac{x-1}{x}\left[1 - v\frac{y-x}{y(1-x)}\right]$ ne doit pas non plus s'annuler. Or l'équation

$$1 - v\frac{y-x}{y(1-x)} = 0$$

peut s'écrire

$$\frac{1-\frac{1}{y}}{1-\frac{1}{x}} = 1 - \frac{1}{v};$$

on en conclut que le point 1 ne doit pas se trouver sur le segment de droite qui va de $\frac{1}{x}$ à $\frac{1}{y}$.

Dans la formule $u = \frac{1}{x}\left[1 - \frac{v(y-x)}{y}\right]$, je choisis comme argument de x celui qui est compris entre $-\pi$ et $+\pi$, et comme argument de $1 - \frac{v(y-x)}{y}$ celui qui s'annule pour $v = 0$; on a donc

$$\arg u = \overline{\arg}\left(1 - v + v\frac{x}{y}\right) - \overline{\arg} x, \qquad 1 - u = \frac{x-1}{x}\left[1 - v\frac{y-x}{y(1-x)}\right];$$

et l'on aura

$$\arg(1-u) = \overline{\arg}\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \overline{\arg}\left[1 - v\frac{y-x}{y(1-x)}\right],$$

$$1 - ux = \frac{y-x}{y}v, \qquad \text{d'où} \qquad \arg(1-ux) = \overline{\arg}\left(1 - \frac{x}{y}\right).$$

Enfin

$$1 - uy = e^{\varepsilon i\pi}\frac{y-x}{y}(1-v).$$

On posera

$$\varepsilon = +1 \quad \text{si } \frac{y}{x} \text{ est dans la partie inférieure du plan,}$$

$$\varepsilon = -1 \quad \text{si } \frac{y}{x} \text{ est dans la partie supérieure du plan.}$$

Alors on a

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{y}} \mathrm{U}\, du = e^{(1-\varepsilon\beta')i\pi}\mathrm{B}(1-\beta, 1-\beta')\varphi_{10},$$

φ_{10} pouvant d'ailleurs se mettre sous les six formes suivantes :

Si y est plus voisin de x que de l'origine, et $\frac{1}{x}$ plus voisin de $\frac{1}{y}$ que de 1,

$$\varphi_{10} = (y-x)^{1-\beta-\beta'}(x-1)^{\gamma-\alpha-1}x^{1+\beta'-\gamma}y^{\beta-1}\mathrm{F}_1\left[1-\beta, 1-\alpha, 1+\alpha-\gamma, 2-\beta-\beta'; \frac{y-x}{y}, \frac{y-x}{y(1-x)}\right];$$

Si x est plus voisin de y que de l'origine et que de 1,

$$z = (y - x)^{1-\beta-\beta'}(x-1)^{\gamma-\alpha-1}x^{\beta+\beta'-\gamma}F_1\left(1-\beta, \gamma-\beta-\beta', 1-\alpha-\gamma, 2-\beta-\beta'; \frac{x-y}{x}, \frac{y-x}{1-x}\right);$$

Si y est plus voisin de x que de 1, et aussi $\frac{1}{y}$ plus voisin de $\frac{1}{x}$ que de 1,

$$z = (y - x)^{1-\beta-\beta'}(x-1)^{\gamma-\alpha-\beta}x^{\beta+\beta'-\gamma}(y-1)^{\beta-1}F_1\left[1-\beta, 1-\alpha, \gamma-\beta-\beta', 2-\beta-\beta'; \frac{x-y}{1-y}, \frac{x-y}{x(1-y)}\right];$$

Si y est plus voisin de x que de l'origine et de 1,

$$z = (x - y)^{1-\beta-\beta'}(y-1)^{\gamma-\alpha-1}y^{\beta+\beta'-\gamma}F_1\left(1-\beta', 1-\alpha-\gamma, \gamma-\beta-\beta', 2-\beta-\beta'; \frac{x-y}{1-y}, \frac{y-x}{y}\right);$$

Si x est plus voisin de y que de 1, et $\frac{1}{x}$ plus voisin de $\frac{1}{y}$ que de 1,

$$z = (y - x)^{1-\beta-\beta'}(y-1)^{\gamma-\alpha-\beta}y^{\beta+\beta'-\gamma}(x-1)^{\beta'-1}F_1\left[1-\beta', \gamma-\beta-\beta', 1-\alpha, 2-\beta-\beta'; \frac{y-x}{y(1-x)}, \frac{y-x}{1-x}\right];$$

Enfin, si x est plus voisin de y que de l'origine, et $\frac{1}{y}$ plus voisin de $\frac{1}{x}$ que de 1,

$$z = (y - x)^{1-\beta-\beta'}(y-1)^{\gamma-\alpha-1}y^{1+\beta-\gamma}x^{\beta'-1}F_1\left[1-\beta', 1+\alpha-\gamma, 1-\alpha, 2-\beta-\beta'; \frac{y-x}{x(y-1)}, \frac{x-y}{x}\right].$$

Dans ces formules, les arguments de x et de $(x-1)$ sont compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

On a d'autre part

$$\arg y = \overline{\arg}\frac{y}{x} + \overline{\arg}\, x,$$

$$\arg(y-1) = \overline{\arg}\left(\frac{x}{y}\frac{y-1}{x-1}\right) + \overline{\arg}\frac{y}{x} + \overline{\arg}(x-1),$$

$$\arg(y-x) = \overline{\arg}\left(\frac{y}{x}-1\right) + \overline{\arg}\, x.$$

20. En résumé, voici le Tableau des soixante intégrales annoncé au début

de ce Chapitre :

$$\varphi_1 = \begin{cases} F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y), \\ (1-x)^{-\beta}(1-y)^{-\beta'} F_1\left(\gamma-\alpha, \beta, \beta', \gamma; \dfrac{x}{x-1}, \dfrac{y}{y-1}\right), \\ (1-x)^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \gamma-\beta-\beta', \beta', \gamma; \dfrac{x}{x-1}, \dfrac{x-y}{x-1}\right), \\ (1-y)^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \beta, \gamma-\beta-\beta', \gamma; \dfrac{y-x}{y-1}, \dfrac{y}{y-1}\right), \\ (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(1-y)^{-\beta'} F_1\left(\gamma-\alpha, \gamma-\beta-\beta', \beta', \gamma; x, \dfrac{y-x}{y-1}\right), \\ (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}(1-x)^{-\beta} F_1\left(\gamma-\alpha, \beta, \gamma-\beta-\beta', \gamma; \dfrac{x-y}{x-1}, y\right); \end{cases}$$

$$\varphi_2 = \begin{cases} F_1(\alpha, \beta, \beta', 1+\alpha+\beta+\beta'-\gamma; 1-x, 1-y), \\ x^{-\beta} y^{-\beta'} F_1\left(1+\beta+\beta'-\gamma, \beta, \beta', 1+\alpha+\beta+\beta'-\gamma; \dfrac{x-1}{x}, \dfrac{y-1}{y}\right), \\ x^{-\alpha} F_1\left(\alpha, 1+\alpha-\gamma, \beta', 1+\alpha+\beta+\beta'-\gamma; \dfrac{x-1}{x}, \dfrac{x-y}{x}\right), \\ y^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \beta, 1+\alpha-\gamma, 1+\alpha+\beta+\beta'-\gamma; \dfrac{y-x}{y}, \dfrac{y-1}{y}\right), \\ x^{1+\beta'-\gamma} y^{-\beta'} F_1\left(1+\beta+\beta'-\gamma, 1+\alpha-\gamma, \beta', 1+\alpha+\beta+\beta'-\gamma; 1-x, \dfrac{y-x}{y}\right), \\ y^{1+\beta-\gamma} x^{-\beta} F_1\left(1+\beta+\beta'-\gamma, \beta, 1+\alpha-\gamma, 1+\alpha+\beta+\beta'-\gamma; \dfrac{x-y}{x}, 1-y\right); \end{cases}$$

$$\varphi_3 = \begin{cases} (-x)^{-\beta}(-y)^{-\beta'} F_1\left(1+\beta+\beta'-\gamma, \beta, \beta', 1+\beta+\beta'-\alpha; \dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y}\right), \\ (1-x)^{-\beta}(1-y)^{-\beta'} F_1\left(\gamma-\alpha, \beta, \beta', 1+\beta+\beta'-\alpha; \dfrac{1}{1-x}, \dfrac{1}{1-y}\right), \\ (-x)^{1+\beta'-\gamma}(-y)^{-\beta'}(1-x)^{\gamma-1-\beta-\beta'} F_1\left[1+\beta+\beta'-\gamma, 1-\alpha, \beta', 1+\beta+\beta'-\alpha; \dfrac{1}{1-x}, \dfrac{y-x}{y(1-x)}\right], \\ (-y)^{1+\beta-\gamma}(-x)^{-\beta}(1-y)^{\gamma-1-\beta-\beta'} F_1\left[1+\beta+\beta'-\gamma, \beta, 1-\alpha, 1+\beta+\beta'-\alpha; \dfrac{x-y}{x(1-y)}, \dfrac{1}{1-y}\right], \\ (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(-x)^{\alpha-\gamma}(1-y)^{-\beta'} F_1\left[\gamma-\alpha, 1-\alpha, \beta', 1+\beta+\beta'-\alpha; \dfrac{1}{x}, \dfrac{x-y}{x(1-y)}\right], \\ (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}(-y)^{\alpha-\gamma}(1-x)^{-\beta} F_1\left(\gamma-\alpha, \beta, 1-\alpha, 1+\beta+\beta'-\alpha; \dfrac{y-x}{y(1-x)}, \dfrac{1}{y}\right); \end{cases}$$

$$\varphi_4 = \left\{ \begin{array}{l}
(-x)^{-\alpha} F_1\left(\alpha, 1+\alpha-\gamma, \beta', 1+\alpha-\beta; \frac{1}{x}, \frac{y}{x}\right), \\
(-x)^{1+\beta'-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}(y-x)^{-\beta'} F_1\left(1-\beta, 1+\alpha-\gamma, \beta', 1+\alpha-\beta; \frac{1}{1-x}, \frac{y}{y-x}\right), \\
(1-x)^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \gamma-\beta-\beta', \beta', 1+\alpha-\beta; \frac{1}{1-x}, \frac{1-y}{1-x}\right), \\
(y-x)^{-\alpha} F_1\left(\alpha, 1+\alpha-\gamma, \gamma-\beta-\beta', 1+\alpha-\beta; \frac{y-1}{y-x}, \frac{y}{y-x}\right), \\
(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(-x)^{\beta+\beta'-\gamma}(y-x)^{-\beta'} F_1\left(1-\beta, \gamma-\beta-\beta', \beta', 1+\alpha-\beta; \frac{1}{x}, \frac{y-1}{y-x}\right), \\
(y-x)^{1-\beta-\beta'}(-x)^{\beta+\beta'-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1} F_1\left(1-\beta, 1+\alpha-\gamma, \gamma-\beta-\beta', 1+\alpha-\beta; \frac{1-y}{1-x}, \frac{y}{x}\right);
\end{array} \right.$$

$$\varphi_5 = \left\{ \begin{array}{l}
(-y)^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \beta, 1+\alpha-\gamma, 1+\alpha-\beta'; \frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right), \\
(-y)^{1+\beta-\gamma}(1-y)^{\gamma-\alpha-1}(x-y)^{-\beta} F_1\left(1-\beta', \beta, 1+\alpha-\gamma, 1+\alpha-\beta'; \frac{x}{x-y}, \frac{1}{1-y}\right), \\
(1-y)^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \beta, \gamma-\beta-\beta', 1+\alpha-\beta'; \frac{1-x}{1-y}, \frac{1}{1-y}\right), \\
(x-y)^{-\alpha} F_1\left(\alpha, \gamma-\beta-\beta', 1+\alpha-\gamma, 1+\alpha-\beta'; \frac{x}{x-y}, \frac{x-1}{x-y}\right), \\
(1-y)^{\gamma-\alpha-\beta}(-y)^{\beta+\beta'-\gamma}(x-y)^{-\beta} F_1\left(1-\beta', \beta, \gamma-\beta-\beta', 1+\alpha-\beta'; \frac{x-1}{x-y}, \frac{1}{y}\right), \\
(x-y)^{1-\beta-\beta'}(-y)^{\beta+\beta'-\gamma}(1-y)^{\gamma-\alpha-1} F_1\left(1-\beta', \gamma-\beta-\beta', 1+\alpha-\gamma, 1+\alpha-\beta'; \frac{x}{y}, \frac{1-x}{1-y}\right);
\end{array} \right.$$

$$\varphi_6 = \left\{ \begin{array}{l}
x^{1+\beta'-\gamma} y^{-\beta'} F_1\left(1+\beta+\beta'-\gamma, 1+\alpha-\gamma, \beta', 2+\beta'-\gamma; x, \frac{x}{y}\right), \\
x^{1+\beta'-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}(y-x)^{-\beta'} F_1\left(1-\beta, 1+\alpha-\gamma, \beta', 2+\beta'-\gamma; \frac{x}{x-1}, \frac{x}{x-y}\right), \\
x^{1+\beta'-\gamma} y^{-\beta'}(1-x)^{\gamma-\beta-\beta'-1} F_1\left[1+\beta+\beta'-\gamma, 1-\alpha, \beta', 2+\beta'-\gamma; \frac{x}{x-1}, \frac{x(y-1)}{y(x-1)}\right], \\
x^{1+\beta'-\gamma} y^{1+\beta-\gamma}(y-x)^{\gamma-\beta-\beta'-1} F_1\left[1+\beta+\beta'-\gamma, 1+\alpha-\gamma, 1+\alpha, 2+\beta'-\gamma; \frac{x(1-y)}{x-y}, \frac{x}{x-y}\right], \\
x^{1+\beta'-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(y-x)^{-\beta'} F_1\left[1-\beta, 1-\alpha, \beta', 2+\beta'-\gamma; x, \frac{x(1-y)}{x-y}\right], \\
x^{1+\beta'-\gamma}(y-x)^{1-\beta-\beta'} y^{\beta-1}(1-x)^{\gamma-\alpha-1} F_1\left[1-\beta, 1+\alpha-\gamma, 1-\alpha, 2+\beta'-\gamma; \frac{x(y-1)}{y(x-1)}, \frac{x}{y}\right];
\end{array} \right.$$

$$\varphi_7=\begin{cases} y^{1+\beta-\gamma}x^{-\beta}\,F_1\left(1+\beta+\beta'-\gamma,\ \beta,\ 1+\alpha-\gamma,\ 2+\beta-\gamma;\ \frac{y}{x},\ y\right),\\ y^{1+\beta-\gamma}(1-y)^{\gamma-\alpha-1}(x-y)^{-\beta}\,F_1\left(1-\beta',\ \beta,\ 1+\alpha-\gamma,\ 2+\beta-\gamma;\ \frac{y}{y-x},\ \frac{y}{y-1}\right),\\ y^{1+\beta-\gamma}x^{-\beta}(1-y)^{\gamma-1-\beta-\beta'}\,F_1\left[1+\beta+\beta'-\gamma,\ \beta,\ 1-\alpha,\ 2+\beta-\gamma;\ \frac{y(x-1)}{x(y-1)},\ \frac{y}{y-1}\right],\\ y^{1+\beta-\gamma}x^{1+\beta'-\gamma}(x-y)^{\gamma-1-\beta-\beta'}\,F_1\left[1+\beta+\beta'-\gamma,\ 1-\alpha,\ 1+\alpha-\gamma,\ 2+\beta-\gamma;\ \frac{y}{y-x},\ \frac{y(1-x)}{y-x}\right],\\ y^{1+\beta-\gamma}(1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}(x-y)^{-\beta}\,F_1\left[1-\beta',\ \beta,\ 1-\alpha,\ 2+\beta-\gamma;\ \frac{y(1-x)}{y-x},\ y\right],\\ y^{1+\beta-\gamma}(x-y)^{1-\beta-\beta'}x^{\beta'-1}(1-y)^{\gamma-\alpha-1}\,F_1\left[1-\beta',\ 1-\alpha,\ 1+\alpha-\gamma,\ 2+\beta-\gamma;\ \frac{y}{x},\ \frac{y(x-1)}{x(y-1)}\right]; \end{cases}$$

$$\varphi_8=\begin{cases} (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}x^{\alpha-\gamma}(1-y)^{-\beta'}\,F_1\left[\gamma-\alpha,\ 1-\alpha,\ \beta',\ 1+\gamma-\alpha-\beta;\ \frac{x-1}{x},\ \frac{y(1-x)}{x(1-y)}\right],\\ (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}x^{1+\beta'-\gamma}(x-y)^{-\beta'}\,F_1\left[1-\beta,\ 1-\alpha,\ \beta',\ 1+\gamma-\alpha-\beta;\ 1-x,\ \frac{y(1-x)}{y-x}\right],\\ (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(1-y)^{-\beta'}\,F_1\left(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta-\beta',\ \beta',\ 1+\gamma-\alpha-\beta;\ 1-x,\ \frac{y-1}{x-1}\right),\\ (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}(x-y)^{\alpha-\gamma}\,F_1\left[\gamma-\alpha,\ 1-\alpha,\ \gamma-\beta-\beta',\ 1+\gamma-\alpha-\beta;\ \frac{1-x}{y-x},\ \frac{y(1-x)}{y-x}\right],\\ (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}x^{\beta+\beta'-\gamma}(x-y)^{-\beta'}\,F_1\left(1-\beta,\ \gamma-\beta-\beta',\ \beta',\ 1+\gamma-\alpha-\beta;\ \frac{x-1}{x},\ \frac{x-1}{x-y}\right),\\ (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(x-y)^{1-\beta-\beta'}x^{\beta+\beta'-\gamma}(1-y)^{\beta-1}\,F_1\left[1-\beta,\ 1-\alpha,\ \gamma-\beta-\beta',\ 1+\gamma-\alpha-\beta;\ \frac{y-1}{x-1},\ \frac{y(1-x)}{x(1-y)}\right]; \end{cases}$$

$$\varphi_9=\begin{cases} (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}y^{\alpha-\gamma}(1-x)^{-\beta}\,F_1\left[\gamma-\alpha,\ \beta,\ 1-\alpha,\ 1+\gamma-\alpha-\beta';\ \frac{x(1-y)}{y(1-x)},\ \frac{y-1}{y}\right],\\ (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}y^{1+\beta-\gamma}(y-x)^{-\beta}\,F_1\left[1-\beta',\ \beta,\ 1-\alpha,\ 1+\gamma-\alpha-\beta';\ \frac{x(1-y)}{x-y},\ 1-y\right],\\ (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}(1-x)^{-\beta}\,F_1\left[\gamma-\alpha,\ \beta,\ \gamma-\beta-\beta',\ 1+\gamma-\alpha-\beta';\ \frac{y-1}{x-1},\ 1-y\right],\\ (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}(y-x)^{\alpha-\gamma}\,F_1\left[\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta-\beta',\ 1-\alpha,\ 1+\gamma-\alpha-\beta';\ \frac{x(1-y)}{x-y},\ \frac{1-y}{x-y}\right],\\ (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}y^{\beta+\beta'-\gamma}(y-x)^{-\beta}\,F_1\left[1-\beta',\ \beta,\ \gamma-\beta-\beta',\ 1+\gamma-\alpha-\beta';\ \frac{1-y}{x-y},\ \frac{y-1}{y}\right],\\ (1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'}(y-x)^{1-\beta-\beta'}y^{\beta+\beta'-\gamma}(1-x)^{\beta'-1}\,F_1\left[1-\beta',\ \gamma-\beta-\beta',\ 1-\alpha,\ 1+\gamma-\alpha-\beta';\ \frac{x(1-y)}{y(1-x)},\ \frac{y-1}{x-1}\right]; \end{cases}$$

$$(y-x)^{1-\beta-\beta'} x^{1-\beta-\gamma}(x-1)^{\gamma-\alpha-1} y^{\beta-1} F_2\left[1-\beta, 1-\alpha, 1-\alpha-\gamma, 2-\beta-\beta' ; \frac{y-x}{y}, \frac{y-x}{y(1-x)}\right],$$

$$z_{1} = \begin{cases} (y-x)^{1-\beta-\beta'} y^{1-\beta-\gamma}(y-1)^{\gamma-\alpha-1} x^{\beta-1} F_2\left[1-\beta, 1-\alpha-\gamma, 1-\alpha, 2-\beta-\beta' ; \frac{y-x}{x(1-y)}, \frac{x-y}{x}\right], \\ (y-x)^{1-\beta-\beta'}(x-1)^{\gamma-\alpha-1} x^{\beta+\beta'-\gamma} F_2\left[1-\beta, \gamma-\beta-\beta', 1-\alpha-\gamma, 2-\beta-\beta' ; \frac{x-y}{x}, \frac{y-x}{1-x}\right], \\ (y-x)^{1-\beta-\beta'}(y-1)^{\gamma-\alpha-1} y^{\beta+\beta'-\gamma} F_2\left[1-\beta', 1-\alpha-\gamma, \gamma-\beta-\beta', 2-\beta-\beta' ; \frac{x-y}{1-y}, \frac{y-x}{y}\right], \\ (y-x)^{1-\beta-\beta'}(x-1)^{\gamma-\alpha-\beta} x^{\beta+\beta'-\gamma}(y-1)^{\beta-1} F_1\left[1-\beta, 1-\alpha, \gamma-\beta-\beta', 2-\beta-\beta' ; \frac{x-y}{1-y}, \frac{x-y}{x(1-y)}\right], \end{cases}$$

$$(y-x)^{1-\beta-\beta'}(y-1)^{\gamma-\alpha-\beta'} y^{\beta+\beta'-\gamma}(x-1)^{\beta-1} F_1\left[1-\beta, \gamma-\beta-\beta', 1-\alpha, 2-\beta-\beta' ; \frac{y-x}{y(1-x)}, \frac{y-x}{1-x}\right].$$

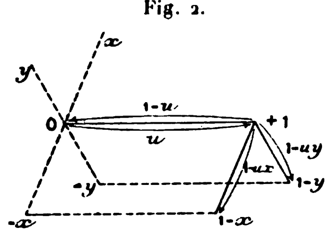
CHAPITRE III.

21. Les dix intégrales précédentes ne sont pas distinctes. Entre quatre d'entre elles existe certainement une relation linéaire. Parfois même, si on les prend trois par trois, certains groupes, pour des positions convenablement choisies de x et de y dans le plan, seront composés de trois intégrales non distinctes, entre lesquelles, par conséquent, il existera une relation linéaire et homogène. Le point capital que je désire bien mettre en évidence, c'est que les relations cherchées ne subsistent pas pour toutes les positions de x et de y dans le plan. C'est ce que je vais d'abord établir.

Rendons-nous compte, en premier lieu, des chemins suivis par les points $1-u$, $1-ux$, $1-uy$ quand le point u suit un chemin déterminé. Nous n'examinerons que les cas particuliers nécessaires pour la suite.

1° Le point u va sur l'axe réel X, de o à 1 (*fig.* 2); le point $1-u$ va sur X, de 1 à o; le point $1-ux$ va en ligne droite du point 1 au point $(1-x)$ et, de même, le point $1-uy$ va en ligne droite du point 1 au point $1-y$.

Fig. 2.

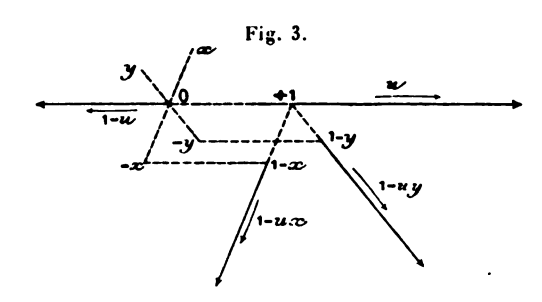


2° Le point u va sur X de $+1$ à $+\infty$ (*fig.* 3); le point $(1-u)$ va sur X de o à $(-\infty)$; $1-ux$ va de $(1-x)$ à l'infini sur la droite $(1, 1-x)$; $1-uy$ va de $(-y)$ à l'infini sur la droite $(1, 1-y)$.

3° Le point u va sur X de o à $(-\infty)$ (*fig.* 4); le point $(1-u)$ va sur X de $+1$ à $+\infty$; le point $(1-ux)$ va de 1 à l'infini sur la droite $(1, 1-x)$; le point $1-uy$ va de 1 à l'infini sur la droite $(1, 1-y)$.

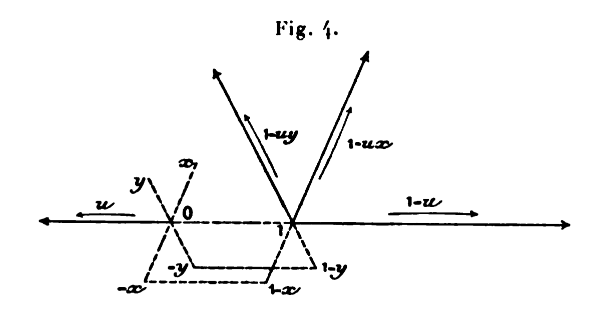
4° u va en ligne droite de o à $\frac{1}{x}$ (*fig.* 5); $1-u$ va en ligne droite de 1 à

Fig. 3.



$1-\frac{1}{x}$; $1-ux$ va sur X de 1 à o; $1-uy$ va en ligne droite de 1 à $1-\frac{y}{x}$.

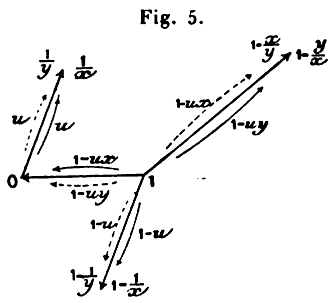
Fig. 4.



5° u va en ligne droite de o à $\frac{1}{y}$ (*fig.* 5); $1-u$ va en ligne droite de 1 à $1-\frac{1}{y}$; $1-ux$ va en ligne droite de 1 à $1-\frac{x}{y}$; et $(1-uy)$ va sur X de 1 à o.

6° u va en ligne droite de 1 à $\frac{1}{x}$ (*fig.* 6); $1-u$ va en ligne droite de o à $1-\frac{1}{x}$; $1-ux$ va en ligne droite de $1-x$ à o; $1-uy$ va en ligne droite de $1-y$ à $1-\frac{y}{x}$.

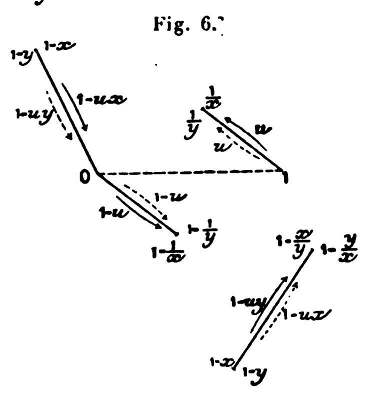
Fig. 5.



7° u va en ligne droite du point 1 au point $\frac{1}{y}$ (*fig.* 6); $1-u$ va en ligne

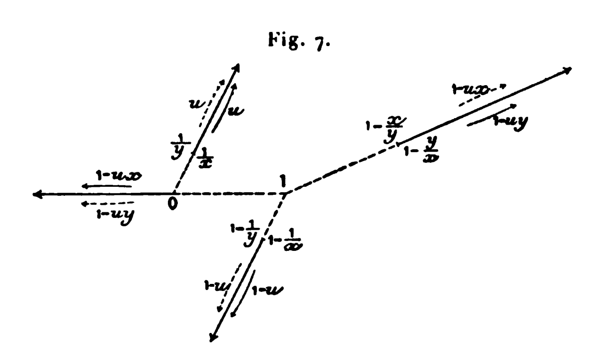
droite de o à $1-\frac{1}{y}$; $1-ux$ va en ligne droite de $1-x$ à $1-\frac{x}{y}$; et $1-uy$ va en ligne droite de $1-y$ à o.

Fig. 6.



8° u va en ligne droite de $\frac{1}{x}$ à l'infini sur la droite $\left(0, \frac{1}{x}\right)$ (*fig.* 7), sans passer par l'origine; $1-u$ va de $1-\frac{1}{x}$ à l'infini sur la droite $\left(1, 1-\frac{1}{x}\right)$, sans passer par le point 1; $1-ux$ va sur X de o à $(-\infty)$; $1-uy$ va de $1-\frac{y}{x}$ à l'infini sur la droite $\left(1, 1-\frac{y}{x}\right)$, sans passer par le point 1.

Fig. 7.

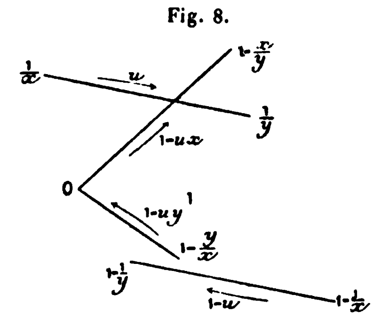


9° u va en ligne droite de $\frac{1}{y}$ à l'infini, sans passer par l'origine; $1-u$ va en ligne droite de $1-\frac{1}{y}$ à l'infini sur la droite $\left(1, 1-\frac{1}{y}\right)$, sans passer par le point 1; $1-ux$ va de $1-\frac{x}{y}$ à l'infini sur la droite $\left(1, 1-\frac{x}{y}\right)$, sans passer par le point 1. Enfin $1-uy$ va sur X de o à $(-\infty)$.

10° u va en ligne droite de $\frac{1}{x}$ à $\frac{1}{y}$ (*fig.* 8); $1-u$ va en ligne droite de

$1 - \frac{1}{x}$ à $1 - \frac{1}{y}$; $1 - ux$ va de o à $1 - \frac{x}{y}$; et $1 - uy$ de $1 - \frac{y}{x}$ à o, toujours en ligne droite.

Fig. 8.



11° Si le point u décrit une circonférence de rayon ρ autour de o comme centre, le point $1 - u$ décrit, dans le même sens, une circonférence de même rayon autour de 1 comme centre; $1 - ux$ décrit, dans le même sens, autour du point 1 comme centre une circonférence de rayon $\rho|x|$; et $1 - uy$ décrit, dans le même sens, autour du point 1 comme centre une circonférence de rayon $\rho|y|$.

12° Le point u décrit une circonférence de rayon ρ autour du point 1 comme centre; $1 - u$ décrit, dans le même sens, une circonférence de rayon ρ autour de l'origine comme centre; $1 - ux$ décrit, dans le même sens, une circonférence de rayon $\rho|x|$ autour du point $(1 - x)$ comme centre; $1 - uy$ décrit, dans le même sens, une circonférence de rayon $\rho|y|$ autour du point $(1 - y)$ comme centre.

13° Le point u décrit du point $\frac{1}{x}$ comme centre une circonférence de rayon ρ; le point $1 - u$ décrit, dans le même sens, autour du point $1 - \frac{1}{x}$ comme centre une circonférence de rayon ρ; le point $1 - ux$ décrit, dans le même sens, autour de o comme centre une circonférence de rayon $\rho|x|$; enfin le point $1 - uy$ décrit, dans le même sens, autour du point $1 - \frac{y}{x}$ une circonférence de rayon $\rho|y|$.

14° Le point u décrit autour de $\frac{1}{y}$ comme centre une circonférence de rayon ρ; $1 - u$ décrit, dans le même sens, autour de $1 - \frac{1}{y}$ comme centre une circonférence de rayon ρ; $1 - ux$ décrit, dans le même sens, autour de $1 - \frac{x}{y}$ comme centre une circonférence de rayon $\rho|x|$; enfin $1 - uy$ décrit autour de o comme centre une circonférence de rayon $\rho|y|$.

22. Précisons maintenant les arguments choisis pour u, $1-u$, $1-ux$, $1-uy$ dans les dix intégrales que nous aurons à considérer.

1° Dans l'intégrale $\int_0^1 \mathrm{U}\,du$, on a

$$\arg u = 0, \qquad \arg(1-u) = 0.$$

L'argument de $(1-ux)$ reste compris entre o et $\overline{\arg}(1-x)$;
L'argument de $(1-uy)$ reste compris entre o et $\overline{\arg}(1-y)$.
On posera

$$\int_0^1 \mathrm{U}\,du = \mathrm{B}(\alpha, \gamma-\alpha)\varphi_1 = \psi_1.$$

2° Dans l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{U}\,du$,

$$\arg u = \pm\pi, \qquad \arg(1-u) = 0.$$

L'argument de $(1-ux)$ varie entre o et $\overline{\arg}\, x$;
L'argument de $(1-uy)$ varie entre o et $\overline{\arg}\, y$.
Soit

$$\psi_2 = \mathrm{B}(\alpha, 1+\beta+\beta'-\gamma)\varphi_2,$$

on aura, en posant $(\alpha) = e^{\alpha i\pi}$,

$$\int_0^{-\infty} \mathrm{U}\,du = (\alpha)\psi_2 \qquad \text{si} \qquad \arg u = +\pi,$$

$$\int_0^{-\infty} \mathrm{U}\,du = (-\alpha)\psi_2 \qquad \text{si} \qquad \arg u = -\pi.$$

3° Dans l'intégrale $\int_{+1}^{+\infty} \mathrm{U}\,du$,

$$\arg u = 0, \qquad \arg(1-u) = \pm\pi.$$

L'argument de $(1-ux)$ varie entre $\overline{\arg}(-x)$ et $\overline{\arg}(1-x)$;
L'argument de $(1-uy)$ varie entre $\overline{\arg}(-y)$ et $\overline{\arg}(1-y)$.
Si l'on pose

$$\psi_3 = \mathrm{B}(1+\beta+\beta'-\gamma, \gamma-\alpha)\varphi_3,$$

on aura

$$\int_{-1}^{-\infty} U\,du = (\gamma-\alpha-1)\psi_3 \qquad \text{si} \qquad \arg(1-u)=\pi,$$

$$\int_{-1}^{-\infty} U\,du = (1-\alpha-\gamma)\psi_3 \qquad \text{si} \qquad \arg(1-u)=-\pi.$$

4° Dans l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{x}} U\,du$,

$$\arg u = \arg\frac{1}{x} = \pm\pi - \overline{\arg}(-x);$$

on prendra le signe + si x est dans la partie inférieure du plan, le signe — si x est dans la partie supérieure. L'argument de $(1-u)$ varie entre o et $\overline{\arg}\left(1-\frac{1}{x}\right)$. L'argument de $1-ux$ est nul; l'argument de $1-uy$ varie de o à $\overline{\arg}\left(1-\frac{y}{x}\right)$.

Soit

$$\psi_4 = B(\alpha, 1-\beta)\varphi_4:$$

si x est dans la partie supérieure du plan,

$$\int_0^{\frac{1}{x}} U\,du = (-\alpha)\psi_4;$$

si x est dans la partie inférieure du plan,

$$\int_0^{\frac{1}{x}} U\,du = (\alpha)\psi_4.$$

5° Dans l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{y}} U\,du$,

$$\arg u = \overline{\arg}\frac{1}{y} = \pm\pi - \overline{\arg}(-y).$$

L'argument de $(1-u)$ varie entre o et $\overline{\arg}\left(1-\frac{1}{y}\right)$; l'argument de $1-ux$ varie entre o et $\overline{\arg}\left(1-\frac{x}{y}\right)$; l'argument de $1-uy$ est nul.

Soit

$$\psi_5 = B(\alpha, 1-\beta')\varphi_5:$$

si y est dans la partie supérieure du plan,

$$\int_0^{\frac{1}{y}} \mathrm{U}\, du = (-\alpha)\psi_5\,;$$

si y est dans la partie inférieure du plan,

$$\int_0^{\frac{1}{y}} \mathrm{U}\, du = (\alpha)\psi_5.$$

6° Dans l'intégrale $\int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \mathrm{U}\, du$, on a

$$\arg u = \overline{\arg}\,\frac{1}{x} = -\,\overline{\arg}\, x.$$

L'argument de $(1-u)$ varie entre

$$\overline{\arg}\left(1-\frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad \overline{\arg}\left(-\frac{1}{x}\right) = \pm\pi - \overline{\arg}\, x;$$

l'argument de $(1-uy)$ varie entre

$$\overline{\arg}\left(1-\frac{y}{x}\right) \quad \text{et} \quad \overline{\arg}\left(-\frac{y}{x}\right) = \pm\pi - \overline{\arg}\left(\frac{x}{y}\right);$$

l'argument de $1-ux$ est égal à $\pm\pi$.

Soit

$$\psi_6 = \mathrm{B}(1+\beta+\beta'-\gamma,\ 1-\beta)\varphi_6,$$

on aura

$$\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \mathrm{U}\, du = [\varepsilon\beta + \varepsilon'\beta' + \varepsilon''(\gamma-\alpha-1)]\psi_6,$$

avec

$$\begin{array}{lll} \varepsilon = -1 & \text{si} & \arg(1-ux) = +\pi, \\ \varepsilon = +1 & \text{si} & \arg(1-ux) = -\pi, \\ \varepsilon' = -1 & \text{si} & \frac{x}{y} \text{ est dans la partie supérieure du plan,} \\ \varepsilon' = +1 & \text{si} & \frac{x}{y} \text{ est dans la partie inférieure du plan,} \\ \varepsilon'' = +1 & \text{si} & x \text{ est dans la partie supérieure du plan,} \\ \varepsilon'' = -1 & \text{si} & x \text{ est dans la partie inférieure du plan.} \end{array}$$

7° Dans l'intégrale $\int_1^\infty U\,du$, on a

$$\arg u = \overline{\arg}\frac{1}{y} = -\overline{\arg}y.$$

L'argument de $(1-u)$ varie entre

$$\overline{\arg}\left(1-\frac{1}{y}\right) \quad \text{et} \quad \overline{\arg}\left(-\frac{1}{y}\right) = \pm\pi - \overline{\arg}y;$$

l'argument de $(1-ux)$ varie entre

$$\overline{\arg}\left(1-\frac{x}{y}\right) \quad \text{et} \quad \arg\left(-\frac{x}{y}\right) = \pm\pi - \overline{\arg}\frac{x}{y};$$

l'argument de $1-uy$ est égal à $\pm\pi$.

Soit

$$\psi_7 = B(1+\beta+\beta'-\gamma,\ 1-\beta')\varphi_7,$$

on aura

$$\int_{\frac{1}{y}}^\infty U\,du = [\varepsilon\beta + \varepsilon'\beta' + \varepsilon''(\gamma-\alpha-1)]\psi_6,$$

avec

$\varepsilon = -1$ si $\frac{y}{x}$ est dans la partie supérieure du plan,

$\varepsilon = +1$ si $\frac{y}{x}$ est dans la partie inférieure du plan,

$\varepsilon' = -1$ si $\arg(1-uy) = +\pi$,

$\varepsilon' = +1$ si $\arg(1-uy) = -\pi$,

$\varepsilon'' = +1$ si y est dans la partie supérieure du plan,

$\varepsilon'' = -1$ si y est dans la partie inférieure du plan.

8° Passons à l'intégrale $\int_1^{\frac{1}{x}} U\,du$.

L'argument de u varie de o à $\overline{\arg}\frac{1}{x}$; on a

$$\arg(1-ux) = \overline{\arg}(1-x).$$

L'argument de $(1-u)$ est égal à

$$\overline{\arg}\left(1-\frac{1}{x}\right)=\pm\pi+\overline{\arg}\left(\frac{1-x}{x}\right).$$

Si le segment de droite $\left(1-y,\ 1-\frac{y}{x}\right)$ ne coupe pas l'*axe réel* X, ou le coupe *à droite* du point o, l'argument de $(1-uy)$ varie entre $\overline{\arg}(1-y)$ et $\overline{\arg}\left(1-\frac{y}{x}\right)$.

Si le segment de droite $\left(1-y,\ 1-\frac{y}{x}\right)$ coupe l'axe réel X *à gauche* du point o, si y est sur la partie supérieure du plan, l'argument de $1-uy$ varie entre $\overline{\arg}(1-y)$ et $\overline{\arg}\left(1-\frac{y}{x}\right)-2\pi$; tandis que, si y est sur la partie inférieure du plan, l'argument de $1-uy$ varie entre $\overline{\arg}(1-y)$ et $\overline{\arg}\left(1-\frac{y}{x}\right)+2\pi$.

Si maintenant l'on pose

$$\psi_8=\mathrm{B}(\gamma-\alpha,\ 1-\beta)\varphi_8,$$

on a, si x est dans la partie supérieure du plan,

$$\int_1^{\frac{1}{x}}\mathrm{U}\,du=(\gamma-\alpha-1)\psi_8,$$

et, si x est dans la partie inférieure du plan,

$$\int_1^{\frac{1}{x}}\mathrm{U}\,du=(1+\alpha-\gamma)\psi_8.$$

9° De même pour l'intégrale $\int_1^{\frac{1}{y}}\mathrm{U}\,du$.

L'argument de u varie de o à $\overline{\arg}\frac{1}{y}$; on a

$$\arg(1-uy)=\overline{\arg}(1-y);$$

l'argument de $(1-u)$ est égal à

$$\overline{\arg}\left(1-\frac{1}{y}\right)=\pm\pi+\overline{\arg}\left(\frac{1-y}{y}\right).$$

Si le segment de droite $\left(1 - x,\ 1 - \frac{x}{y}\right)$ ne coupe pas l'axe réel X, ou le coupe à droite du point o, l'argument de $1 - ux$ varie entre $\overline{\arg}(1 - x)$ et $\overline{\arg}\left(1 - \frac{x}{y}\right)$.

Si le segment de droite $\left(1 - x,\ 1 - \frac{x}{y}\right)$ coupe X *à gauche* du point o, si x est sur la partie supérieure du plan, on a

$$\overline{\arg}(1 - x) \geqq \arg(1 - ux) \geqq \overline{\arg}\left(1 - \frac{x}{y}\right) - 2\pi;$$

si x est sur la partie inférieure du plan, on a

$$\overline{\arg}(1 - x) \leqq \arg(1 - ux) \leqq \overline{\arg}\left(1 - \frac{x}{y}\right) + 2\pi.$$

Soit

$$\psi_9 = B(\gamma - \alpha,\ 1 - \beta')\varphi_9\ ;$$

si y est sur la partie supérieure du plan,

$$\int_1^{\frac{1}{y}} U\,du = (\gamma - \alpha - 1)\psi_9\ ;$$

si y est sur la partie inférieure du plan,

$$\int_1^{\frac{1}{y}} U\,du = (1 + \alpha - \gamma)\psi_9.$$

10° Enfin envisageons l'intégrale $\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{y}} U\,du$.

D'abord

$$\arg(1 - ux) = \overline{\arg}\left(1 - \frac{x}{y}\right),$$

puis

$$\arg(1 - uy) = \overline{\arg}\left(1 - \frac{y}{x}\right) = \pm\pi + \overline{\arg}\left(\frac{y - x}{x}\right).$$

Ensuite, si le segment rectiligne $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$ ne rencontre pas l'axe réel X, ou

le rencontre en un point situé à droite du point o, l'argument de u variera entre $\overline{\arg}\frac{1}{x}$ et $\overline{\arg}\frac{1}{y}$; si ce segment $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$ coupe X en un point situé *à gauche* du point o, on aura, si x est sur la partie supérieure du plan,

$$\overline{\arg}\frac{1}{x} \geqq \arg u \geqq -2\pi + \overline{\arg}\frac{1}{y};$$

si x est sur la partie inférieure du plan,

$$\overline{\arg}\frac{1}{x} \leqq \arg u \leqq +2\pi + \overline{\arg}\frac{1}{y}.$$

De même, si le segment rectiligne $\left(1 - \frac{1}{x}, 1 - \frac{1}{y}\right)$ ne coupe pas l'axe réel X, ou le rencontre en un point situé *à droite* de o, l'argument de $1 - u$ variera entre $\overline{\arg}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ et $\overline{\arg}\left(1 - \frac{1}{y}\right)$. S'il coupe l'axe réel en un point situé à gauche de o, si x est sur la partie supérieure du plan,

$$\overline{\arg}\left(1 - \frac{1}{x}\right) \leqq \arg(1 - u) \leqq +2\pi + \overline{\arg}\left(1 - \frac{1}{y}\right);$$

si x est sur la partie inférieure du plan,

$$\overline{\arg}\left(1 - \frac{1}{x}\right) \geqq \arg(1 - u) \geqq -2\pi + \overline{\arg}\left(1 - \frac{1}{y}\right).$$

Soit

$$\psi_{10} = B(1 - \beta, 1 - \beta')\varphi_{10}:$$

si $\frac{x}{y}$ est sur la partie supérieure du plan,

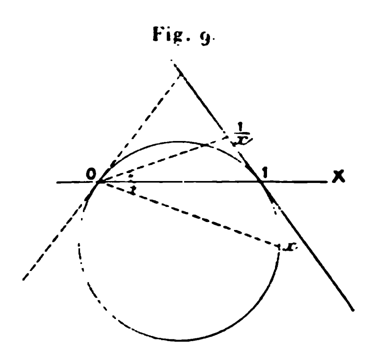
$$\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{y}} U\,du = (1 - \beta')\psi_{10};$$

si $\frac{x}{y}$ est sur la partie inférieure du plan,

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{y}} U\,du = (1 + \beta')\psi_{10}.$$

23. Les droites Ox, $O\frac{1}{x}$ sont également inclinées sur X (*fig.* 9); de plus, $\frac{1}{x}$ est sur la tangente au point 1, à la circonférence passant par les

Fig. 9.



points o, 1, x, de sorte que, si l'on fait varier x, en l'assujettissant à rester sur une circonférence quelconque passant par les points o, 1, le point $\frac{1}{x}$ se meut sur la tangente au point 1 à cette circonférence.

La droite qui joint le point $1-y$ au point $\left(1-\frac{y}{x}\right)$ a pour équation

$$\begin{vmatrix} z & z' & 1 \\ 1-y & 1-y' & 1 \\ 1-\frac{y}{x} & 1-\frac{y'}{x'} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(z et z' désignent deux quantités imaginaires conjuguées). Nous avons besoin de savoir en quelle région se trouve son point d'intersection avec X. Soit ζ l'abscisse de ce point d'intersection. On a

$$\zeta = \frac{xx'(y-y') + xy' - yx' - yy'(x-x')}{xx'(y-y') + xy' - yx'}.$$

Supposons que le point x soit fixe et le point y variable, l'équation

$$yy'(x-x') = xx'(y-y') + xy' - yx'$$

représente précisément le cercle qui passe par les points o, 1, x, et

$$xx'(y-y') + xy' - yx' = 0$$

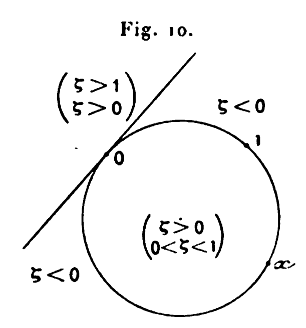
est l'équation de la tangente à ce cercle à l'origine.

En faisant $y = y' = \frac{1}{2}$, on trouve, en posant $x = \varepsilon + i\eta$,

$$\zeta = \frac{\frac{1}{2} i\eta}{i\eta} = \frac{1}{2}.$$

Il en résulte que ζ sera négatif si y est à l'extérieur de la circonfé-

Fig. 10.



rence o, 1, x, et du même côté de la tangente en o que la circonférence. Sinon ζ est positif.

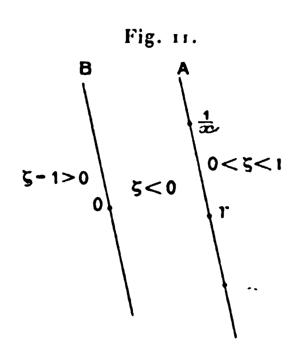
D'ailleurs

$$\zeta - 1 = \frac{yy'(x' - x)}{xx'(y - y') + xy' - yx'};$$

$\zeta - 1$ sera donc positif dans la région du plan séparée par la tangente qui ne contient pas la circonférence, et négatif dans l'autre.

Avec le point $\frac{1}{y}$ les résultats sont encore plus simples. Soient A (*fig.* 11) la droite $\left(1, \frac{1}{x}\right)$, B la parallèle à A menée par l'origine.

Fig. 11.



Si $\frac{1}{y}$ est dans la région séparée par B et ne contenant pas A, la droite $\left(1 - y, 1 - \frac{y}{x}\right)$ coupe X à droite du point 1.

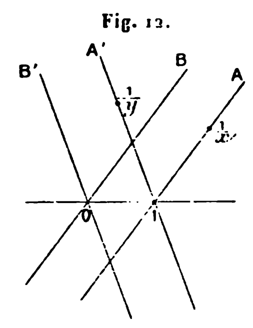
Si $\frac{1}{y}$ est dans la bande comprise entre A et B, la droite $\left(1-y,\ 1-\frac{y}{x}\right)$ coupe X à gauche de o.

Si $\frac{1}{y}$ est dans la région séparée par A, qui ne contient pas B, la droite $\left(1-y,\ 1-\frac{y}{x}\right)$ coupe X entre o et 1.

Des considérations analogues nous indiqueront en quelle région sera le point d'intersection de la droite $\left(1-x,\ 1-\frac{x}{y}\right)$ avec X. Il suffit de permuter x et y dans ce qui précède.

1° Supposons x et y tous les deux dans la partie inférieure du plan. Supposons $\frac{1}{y}$ situé dans la région séparée par B et ne contenant pas A. On voit que, nécessairement, $\frac{1}{x}$ est dans la région séparée par A′ qui ne contient pas B′ (*fig.* 12). Ainsi la droite $\left(1-y,\ 1-\frac{y}{x}\right)$ coupe X à

Fig. 12.



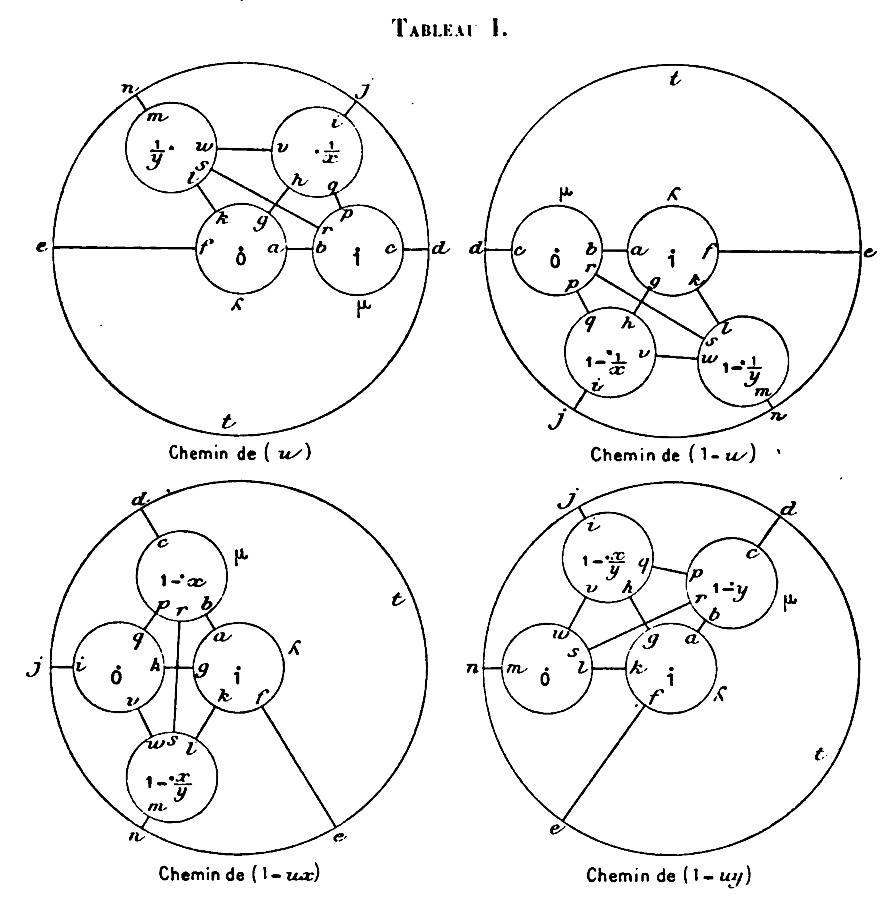
droite de 1 et la droite $\left(1-x,\ 1-\frac{x}{y}\right)$ coupe X entre o et 1. D'ailleurs, puisque le triangle o $\frac{1}{x}\ \frac{1}{y}$ est à gauche de l'observateur qui parcourt dans le sens o $\frac{1}{x}\ \frac{1}{y}$ son périmètre, c'est que $\frac{y}{x}$ est dans la partie inférieure du plan.

D'autre part, x est dans la partie inférieure du plan; il en est de même de $\frac{-y}{-\frac{y}{x}} = x$. Or $(-y)$ et $\left(-\frac{y}{x}\right)$ sont simultanément dans la partie supérieure, donc le point $\frac{1-y}{1-\frac{y}{x}}$ est, lui aussi, comme $\frac{-y}{-\frac{y}{x}} = x$ dans la partie inférieure du plan.

Bref, le triangle $\left(o,\ 1-y,\ 1-\frac{y}{x}\right)$ est à gauche de l'observateur.

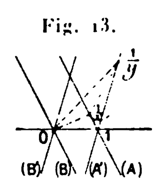
Voici alors le schéma des chemins que parcourront les variables u, $1-u$, $1-ux$, $1-uy$.

TABLEAU I.



Si le point $\frac{1}{y}$ vient sur B la droite $\left(1-\frac{y}{x},\ 1-y\right)$ devient parallèle à X. Si $\frac{1}{y}$ entre dans la bande AB, la droite $\left(1-\frac{y}{x},\ 1-y\right)$ coupera X à gauche

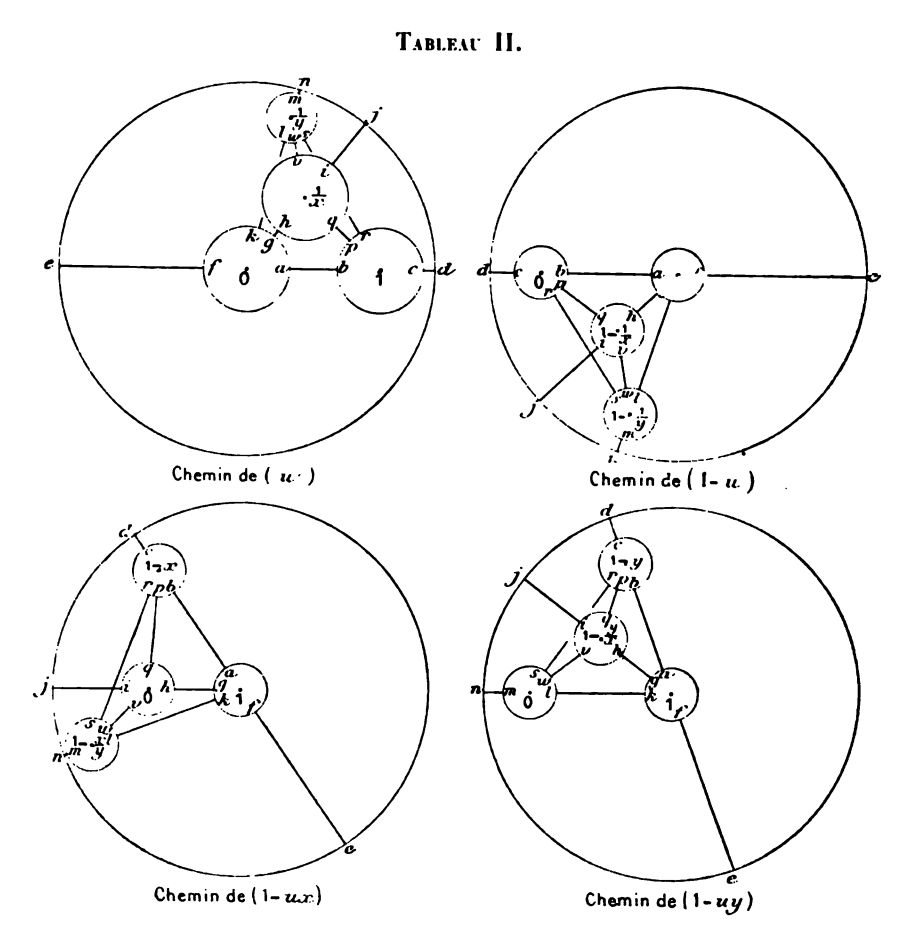
Fig. 13.



du point o. Mais le segment $\left(1-\frac{y}{x},\ 1-y\right)$ reste tout entier dans la partie supérieure du plan. Ces deux cas rentrent donc dans le premier.

Dans le Tableau II, on suppose toujours que x, y, $\frac{y}{x}$ sont dans la partie inférieure du plan, mais $\frac{1}{y}$ est dans la région séparée par A qui ne contient

TABLEAU II.



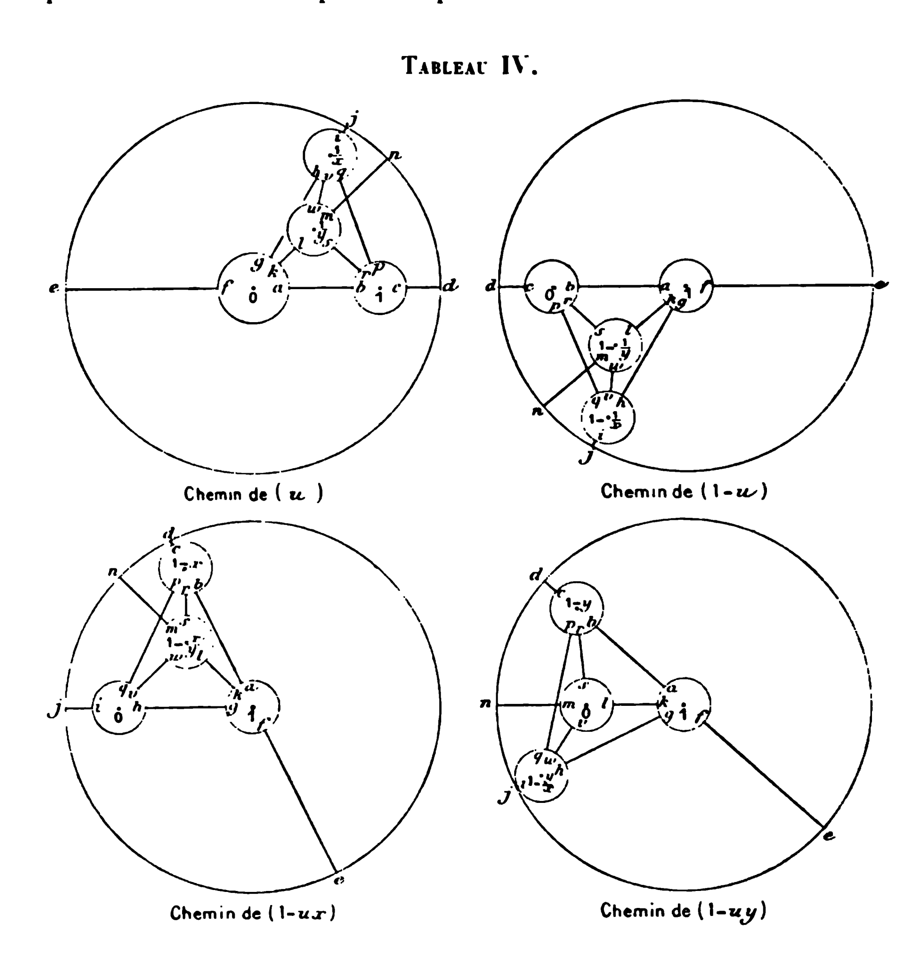
pas B. Alors le segment $\left(1-x,\ 1-\frac{x}{y}\right)$ coupe X à gauche de o. Le point $\frac{1}{x}$ est à l'intérieur du triangle $\left(0\ 1\ \frac{1}{y}\right)$ (*fig.* 13).

Dans le Tableau III, $\frac{y}{x}$ vient sur la partie supérieure du plan, $1-\frac{x}{y}$ asse aussi dans la partie supérieure; le segment $\left(1-y,\ 1-\frac{y}{x}\right)$ coupe le segment (0, 1) entre 0 et 1, etc. On obtient de la sorte quatorze Tableaux.

24. Voici maintenant comment nous allons opérer. Imaginons un système de trois ou quatre intégrales qui, pour les positions de x et de y con-

Alors les intégrales de la forme $\int_C U\,du$, C étant un arc de circonférence de rayon infiniment petit ayant pour centres les points o, 1, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$; ou un arc de circonférence de rayon infiniment grand ayant pour centre o, sont des quantités infiniment petites, qui deviennent nulles à la limite.

TABLEAU IV.

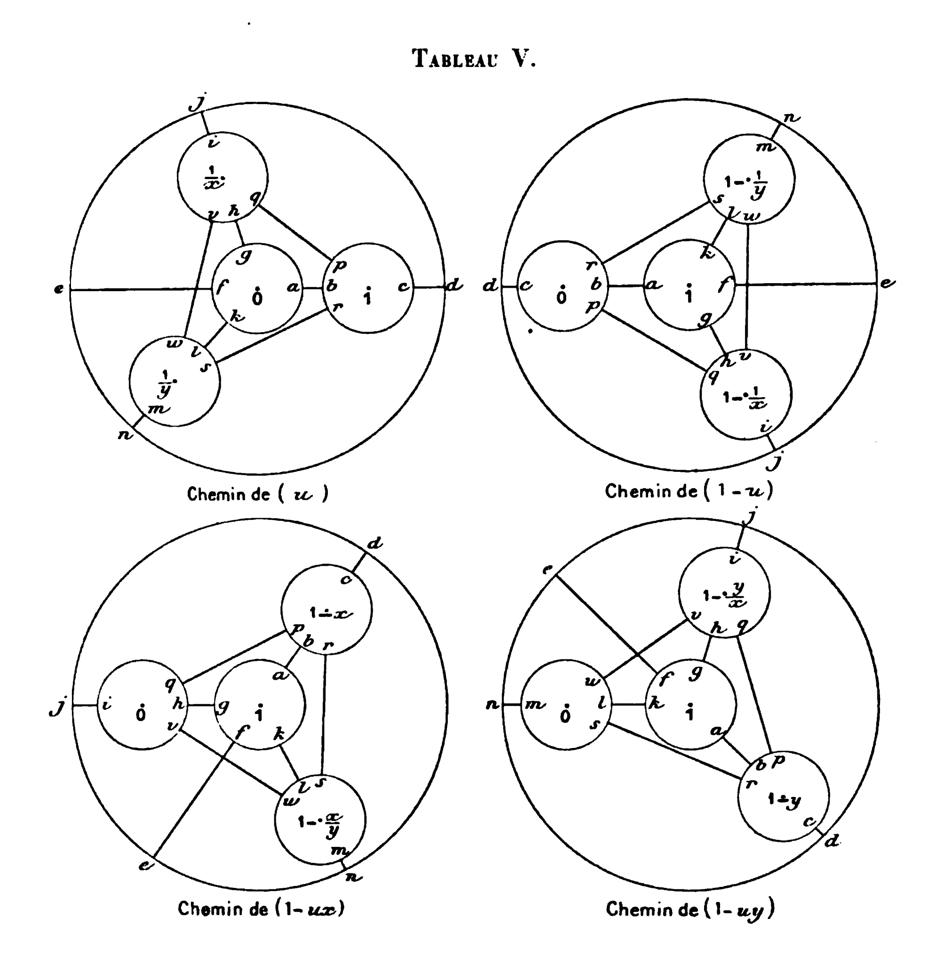


Chemin de (u) — Chemin de ($1-u$) — Chemin de ($1-ux$) — Chemin de ($1-uy$)

L'aire trouvée, on forme un Tableau dans lequel, en suivant d'une façon continue sur les schémas des Tableaux précédents, les chemins de u, $1-u$, $1-ux$, $1-uy$, on indiquera si les arguments de u, $1-u$, $1-ux$, $1-uy$ sont bien ceux que nous avons choisis pour préciser la définition des fonctions ψ_1, ψ_2, ..., ψ_{10}, ou de combien ils en diffèrent. N désignant l'argument normal choisi, on aura à écrire si l'argument trouvé est N ou $N+2\pi$ ou $N-2\pi$. Si l'argument trouvé est o, $+\pi$, ou $-\pi$, on l'écrira dans le

Tableau. Le Tableau formé, on en déduit immédiatement la relation par l'application du théorème de Cauchy.

TABLEAU V.



Premier exemple. — Soit à trouver, dans le Tableau I, la relation qui existe entre ψ_1, ψ_2, ψ_3. Considérons l'aire

$$ab.\mu.cd.\iota.ef.\lambda.$$

Formons le Tableau suivant :

Chemin.	arg u.	arg$(1-u)$.	arg$(1-ux)$.	arg$(1-uy)$.
ab	o	o	N	N
cd..............	o	$+\pi$	N	N
ef..............	$-\pi$	o	N	N

Nous reportant alors au n° 22, nous obtenons la formule

$$\psi_1 + (\gamma - \alpha - 1)\psi_3 - (-\alpha)\psi_2 = 0,$$

qu'on peut écrire

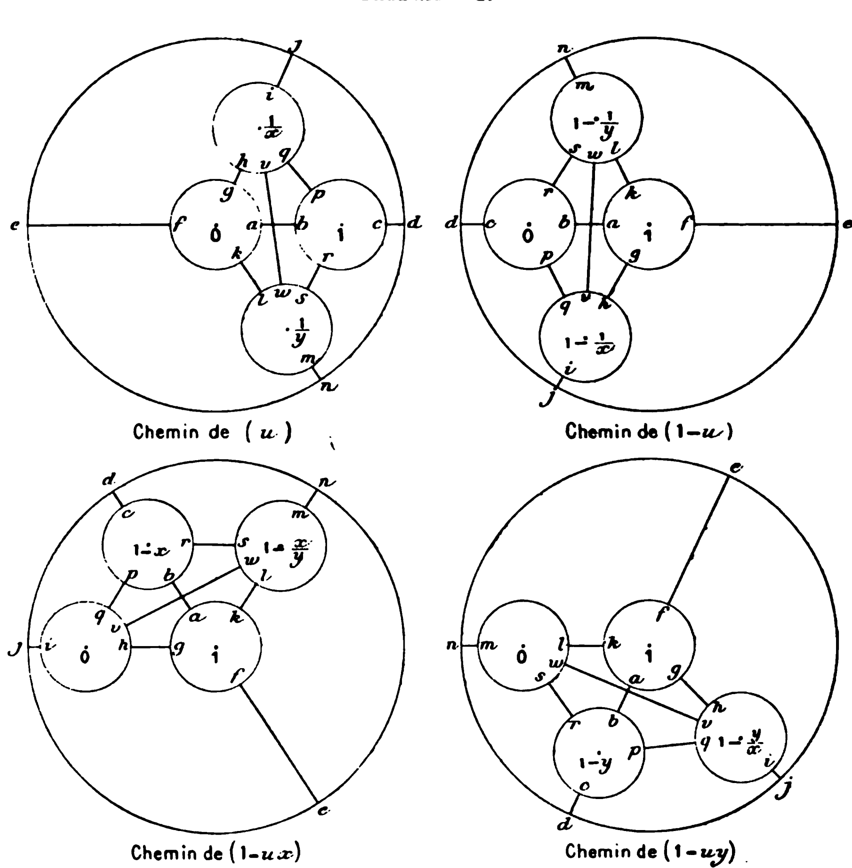
$$(\alpha)\psi_1 - (\gamma)\psi_3 - \psi_2 = 0,$$

où

$$(\alpha) = e^{i\pi\alpha}, \qquad (\gamma) = e^{i\pi\gamma}, \qquad \ldots.$$

Deuxième exemple. — Proposons-nous d'obtenir la relation qui existe

TABLEAU VI.



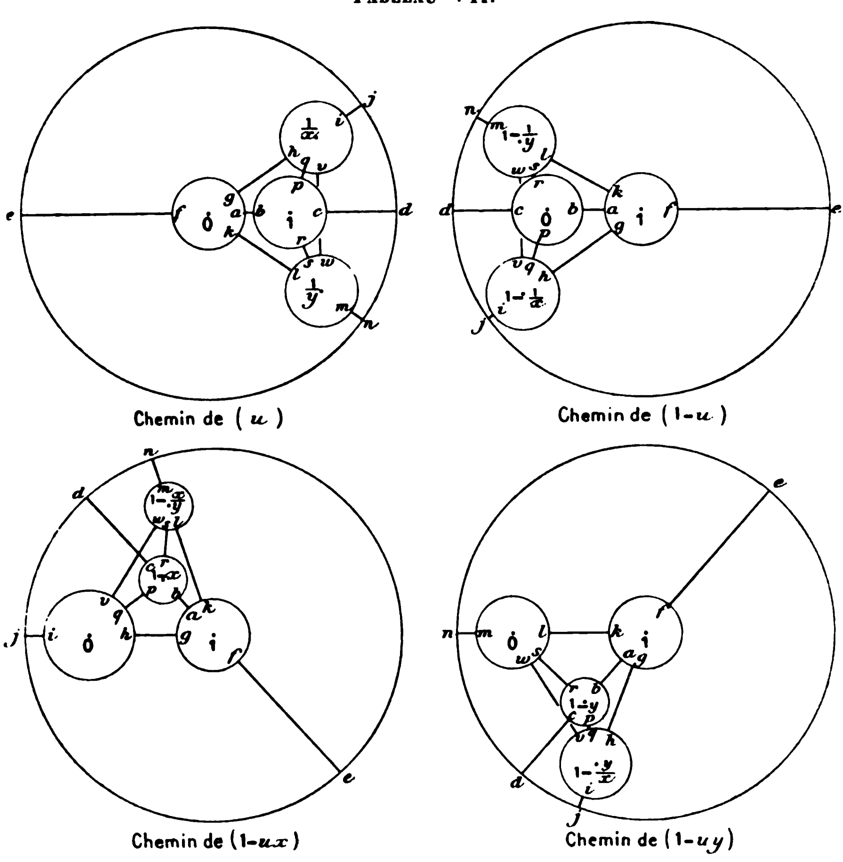
entre ψ_1, ψ_2, ψ_4, ψ_5. J'envisage, toujours dans le premier Tableau, l'aire

$$ab.rpc\mu.ba.\lambda.fe.tdjn.ef.kl.mws.lk.gh.viq.hg,$$

et je forme le Tableau qui suit :

Chemin.	arg u.	arg$(1-u)$.	arg$(1-ux)$.	arg$(1-uy)$.
ab	0	0	N	N
ba	0	-2π	N	N
fe	$-\pi$	-2π	N	N
ef	$+\pi$	0	$N+2\pi$	$N+2\pi$
kl	N	N	$N+2\pi$	2π
lk	N	N	$N+2\pi$	0
gh	N	N	2π	N
hg	N	N	0	N

TABLEAU VII.



Chemin de (u) — Chemin de ($1-u$) — Chemin de ($1-ux$) — Chemin de ($1-uy$)

De ce Tableau, je déduis la formule

$$[1-(2\alpha-2\gamma)]\psi_1+[(\alpha-2\gamma)-(\alpha-2\beta-2\beta')]\psi_2$$
$$+[(\alpha-2\beta-2\beta')-(\alpha-2\beta)]\psi_3+[(\alpha-2\beta)-(\alpha)]\psi_4=0,$$

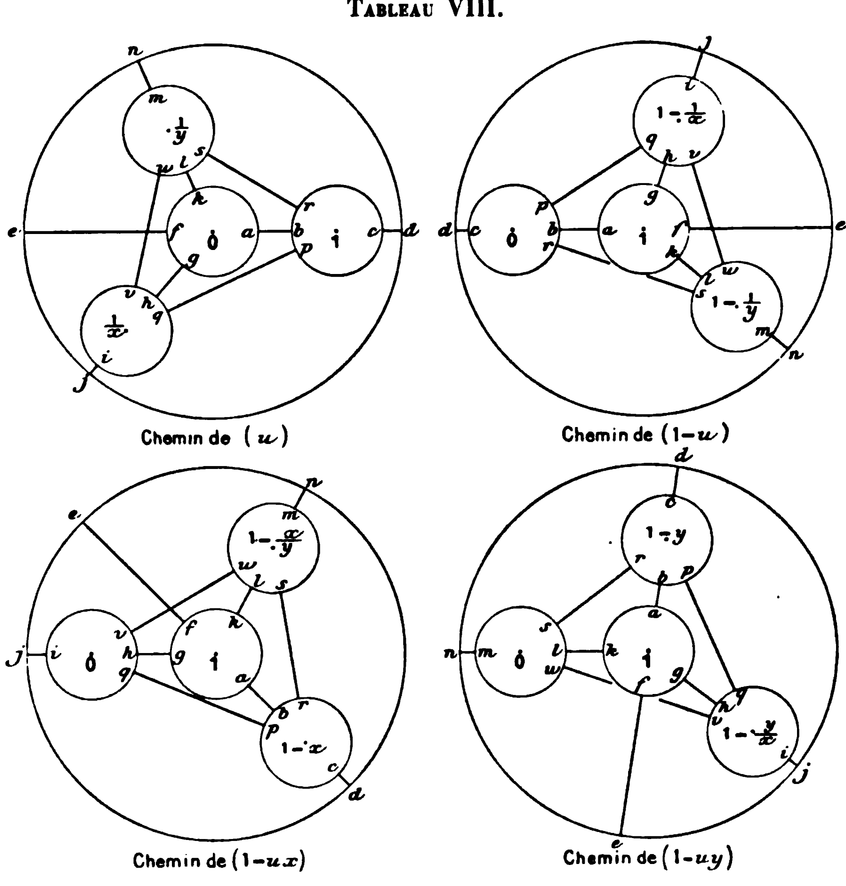
formule qui peut s'écrire

$$(\beta+\beta')\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi + \psi_2 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$$
$$-(\gamma+\beta')\psi_4 \sin\beta\pi - (\gamma-\beta)\psi_3 \sin\beta'\pi = 0.$$

Troisième exemple. — Soit encore à trouver la relation qui existe entre ψ_1, ψ_2, ψ_4, ψ_6. Envisageons l'aire

$ab.rpc\mu.ba.\lambda.fe.td.jiq.kg$ (Tableau I),


Tableau VIII.


Chemin de (u)
Chemin de ($1-u$)
Chemin de ($1-ux$)
Chemin de ($1-uy$)

et formons le Tableau suivant :

Chemin.	arg u.	arg$(1-u)$.	arg$(1-ux)$.	arg$(1-uy)$.
ab	o	o	N	N
ba	o	-2π	N	N
fe	$-\pi$	-2π	N	N
ji	N	N	$+\pi$	N
hg	N	N	o	N

D'où la formule

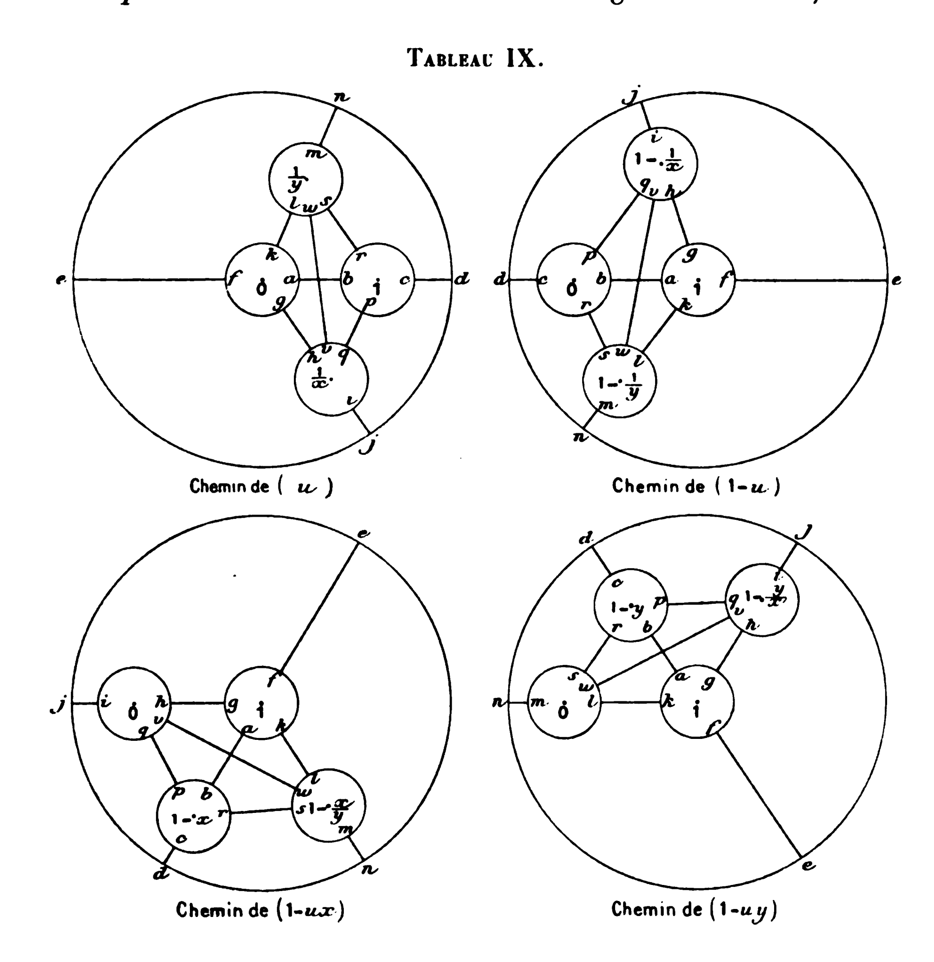
$$[1-(2\alpha-2\gamma)]\psi_1+(\alpha-2\gamma)\psi_2-(-\beta-\beta'+1+\alpha-\gamma)\psi_6-(\alpha)\psi_4=0,$$

qu'on peut écrire

$$2i\psi_1\sin(\gamma-\alpha)\pi+(-\gamma)\psi_2-(\gamma)\psi_4+(-\beta-\beta')\psi_6=0.$$

Remarque. — Au cas où deux chemins rectilignes se croisent, la relation

TABLEAU IX.



Chemin de (u) — Chemin de ($1-u$) — Chemin de ($1-ux$) — Chemin de ($1-uy$)

correspondant à l'aire où ce fait se produit se déduira des relations déjà trouvées par voie d'élimination.

Voici les quatorze Tableaux de relations. Je désigne par (ijk) la relation qui existe entre ψ_i, ψ_j, ψ_k, quand elles ne sont pas distinctes; par $(ijkh)$ la relation qui existe entre ψ_i, ψ_j, ψ_k et ψ_h.

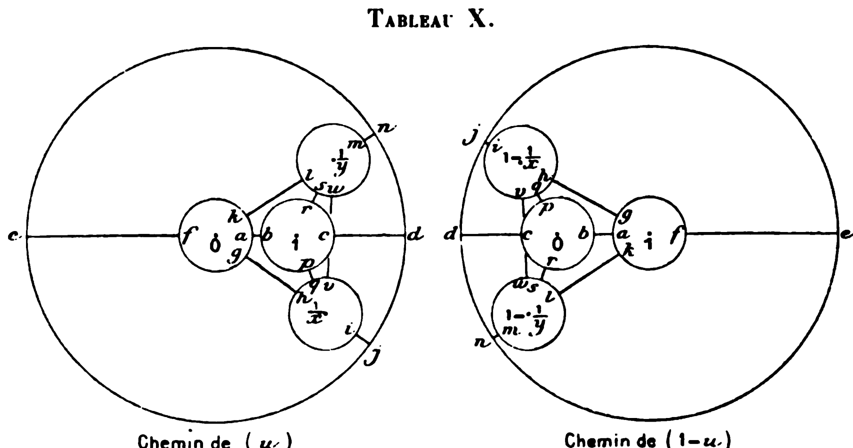
TABLEAU I (*voir* page 67).

(1, 2, 3) $(\alpha)\psi_1 - \psi_2 - (\gamma)\psi_3 = 0, \qquad [(\alpha) = e^{\alpha i \pi}],$

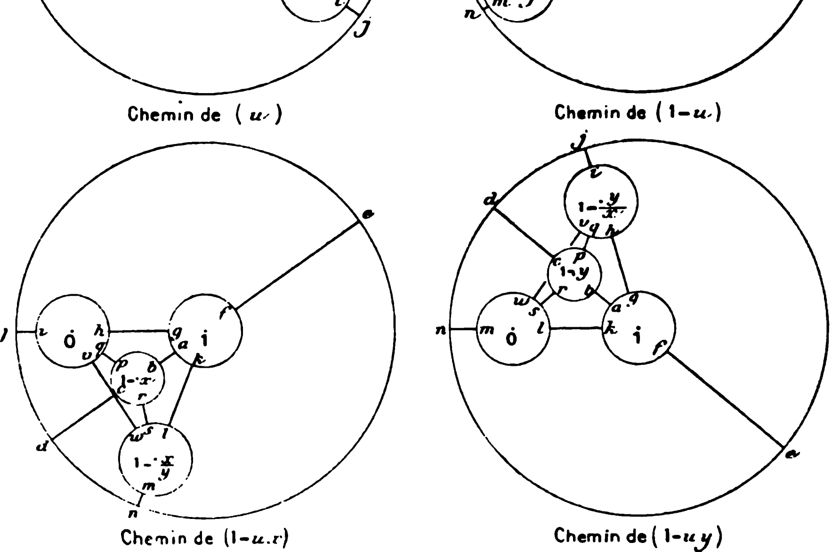
(1, 2, 4, 5) $(\beta + \beta')\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi + \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
$\qquad - (\gamma + \beta')\psi_4 \sin\beta\pi - (\gamma - \beta)\psi_5 \sin\beta'\pi = 0,$

(1, 2, 4, 6) $2i\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi + (-\gamma)\psi_2 - (\gamma)\psi_4 + (-\beta - \beta')\psi_6 = 0,$

TABLEAU X.



Chemin de (u)   Chemin de ($1-u$)



Chemin de ($1-ux$)   Chemin de ($1-uy$)

(1, 2, 4, 7) $(\beta)\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi + \psi_2 \sin(\beta - \gamma)\pi - (\gamma)\psi_4 \sin\beta\pi - \psi_7 \sin\beta'\pi = 0,$

(1, 2, 4, 9) $[(\beta + \beta')\sin(\gamma - \alpha)\pi - (\gamma - \alpha - \beta)\sin\beta'\pi]\psi_1$
$\qquad + \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - (\gamma + \beta')\psi_4 \sin\beta\pi + (-\beta)\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$

(1, 2, 4, 10) $(\beta + \beta')\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi + \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
$\qquad - (\gamma)\psi_4 \sin(\beta + \beta')\pi + (\gamma - \alpha - \beta - \beta')\psi_{10} \sin\beta'\pi = 0,$

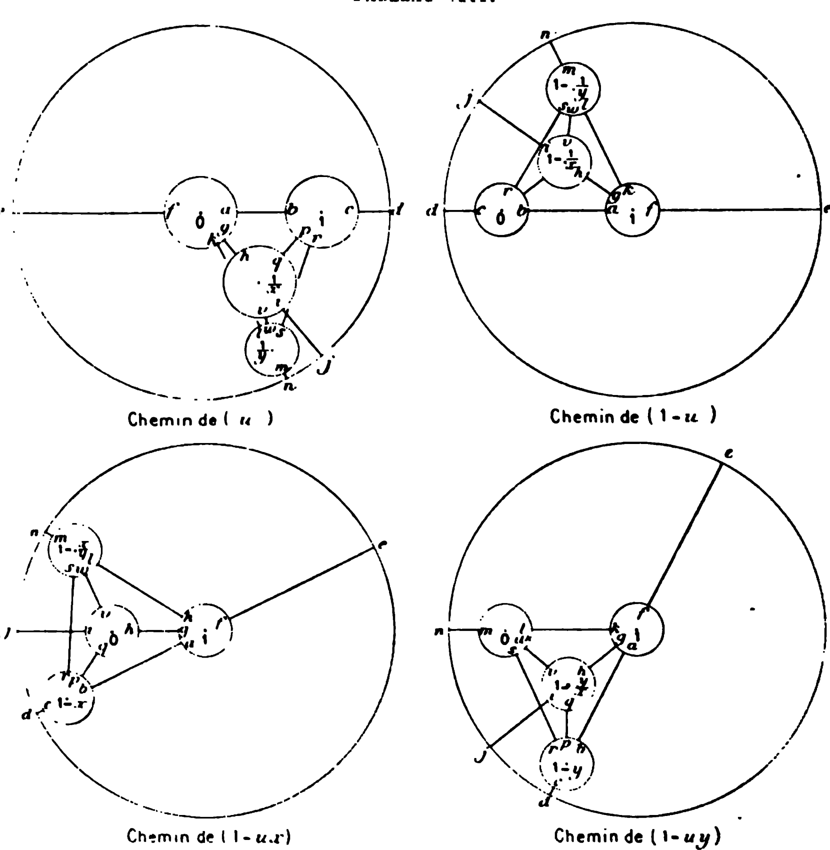
(1, 2, 5, 6) $(\beta')\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi + \psi_2 \sin(\beta' - \gamma)\pi - (\gamma)\psi_5 \sin\beta'\pi - \psi_6 \sin\beta\pi = 0,$

(1, 2, 8, 9) $\psi_1 \sin(\gamma - \alpha - \beta - \beta')\pi + \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (\beta')\psi_8 \sin\beta$
$+ (-\beta)\psi_9 \sin\beta' = 0,$

(1, 2, 8, 10) $\psi_1 \sin(\gamma - \alpha - \beta - \beta')\pi + \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + \psi_8 \sin(\beta + \beta')\pi$
$+ (\gamma - \alpha - \beta - \beta')\psi_{10} \sin\beta'\pi = 0,$

(1, 2, 9, 10) $\psi_1 \sin(\gamma - \alpha - \beta - \beta')\pi + \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + \psi_9 \sin(\beta + \beta')\pi$
$- (\gamma - \alpha)\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$

Tableau XII.



Chemin de (u)   Chemin de (1 - u)

Chemin de (1 - ux)   Chemin de (1 - uy)

(1, 3, 4, 5) $\psi_1 \sin(\beta + \beta' - \alpha)\pi + \psi_3 \sin(\gamma - \beta - \beta')\pi - (\beta')\psi_4 \sin\beta\pi$
$- (-\beta)\psi_5 \sin\beta'\pi = 0,$

(1, 3, 4, 6) $\psi_1 - (\alpha - \gamma)\psi_3 - (\alpha)\psi_4 + (\alpha - \gamma - \beta - \beta')\psi_6 = 0,$

(1, 3, 4, 7) $\psi_1 \sin(\beta - \alpha)\pi + \psi_3 \sin(\gamma - \beta)\pi - \psi_4 \sin\beta\pi - (-\gamma)\psi_7 \sin\beta'\pi = 0,$

(1, 3, 4, 9) $[(\beta' - \alpha)\sin\beta\pi - (-\beta - \beta')\sin\alpha\pi]\psi_1 - \psi_3 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
$- (\beta')\psi_4 \sin\beta\pi + (-\beta - \gamma)\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$

(1, 3, 4, 10) $\psi_1 \sin(\beta + \beta' - \alpha)\pi + \psi_3 \sin(\gamma - \beta - \beta')\pi$
$- \psi_4 \sin(\beta + \beta')\pi + (-\alpha - \beta - \beta')\psi_{10} \sin\beta'\pi = 0,$

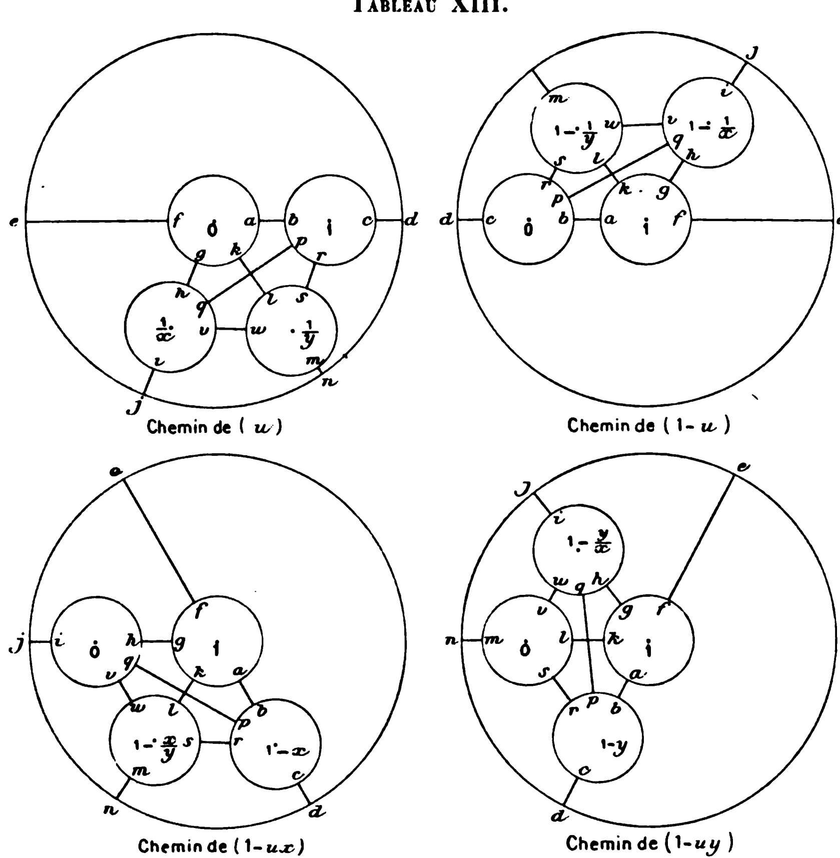
(1, 3, 5, 6) $\psi_1 \sin(\beta' - \alpha)\pi + \psi_3 \sin(\gamma - \beta')\pi - \psi_5 \sin\beta'\pi - (-\gamma)\psi_6 \sin\beta\pi = 0,$

(1, 3, 5, 7) $\psi_1 - (\gamma - \alpha)\psi_3 + (\beta + \beta' - \alpha - \gamma)\psi_7 - (-\alpha)\psi_5 = 0,$

(1, 3, 5, 8) $(-\beta)\psi_1 \sin(\beta' - \alpha)\pi + \psi_3 \sin(\gamma - \beta - \beta')\pi$
$- (-\beta)\psi_5 \sin\beta'\pi + (\beta' - \gamma)\psi_8 \sin\beta\pi = 0,$

(1, 3, 5, 10) $\psi_1 \sin(\beta + \beta' - \alpha)\pi + \psi_3 \sin(\gamma - \beta - \beta')\pi - \psi_5 \sin(\beta + \beta')\pi$
$- (-\alpha)\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$

TABLEAU XIII.



(1, 3, 6, 7) $\psi_1 \sin\alpha\pi - \psi_3 \sin\gamma\pi + (-\gamma - \beta')\psi_6 \sin\beta\pi + (\beta - \gamma)\psi_7 \sin\beta'\pi = 0,$

(1, 3, 6, 9) $\psi_1 \sin\alpha\pi + (\beta')\psi_3 \sin(\beta' - \gamma)\pi + (\beta' - \gamma)\psi_6 \sin\beta\pi - (\beta' - \gamma)\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$

(1, 3, 6, 10) $\psi_1 \sin\alpha\pi - \psi_3 \sin\gamma\pi + (-\gamma)\psi_6 \sin(\beta + \beta')\pi - (-\alpha)\psi_{10} \sin\beta'\pi = 0,$

(1, 3, 7, 8) $\psi_1 \sin\alpha\pi + (\beta)\psi_3 \sin(\beta - \gamma)\pi + (\beta - \gamma)\psi_7 \sin\beta'\pi - (\beta - \gamma)\psi_8 \sin\beta\pi = 0,$

(1, 3, 7, 9) $2i\psi_1 \sin\alpha\pi - (\gamma)\psi_3 + (\beta + \beta' - \gamma)\psi_7 + (-\gamma)\psi_9 = 0,$

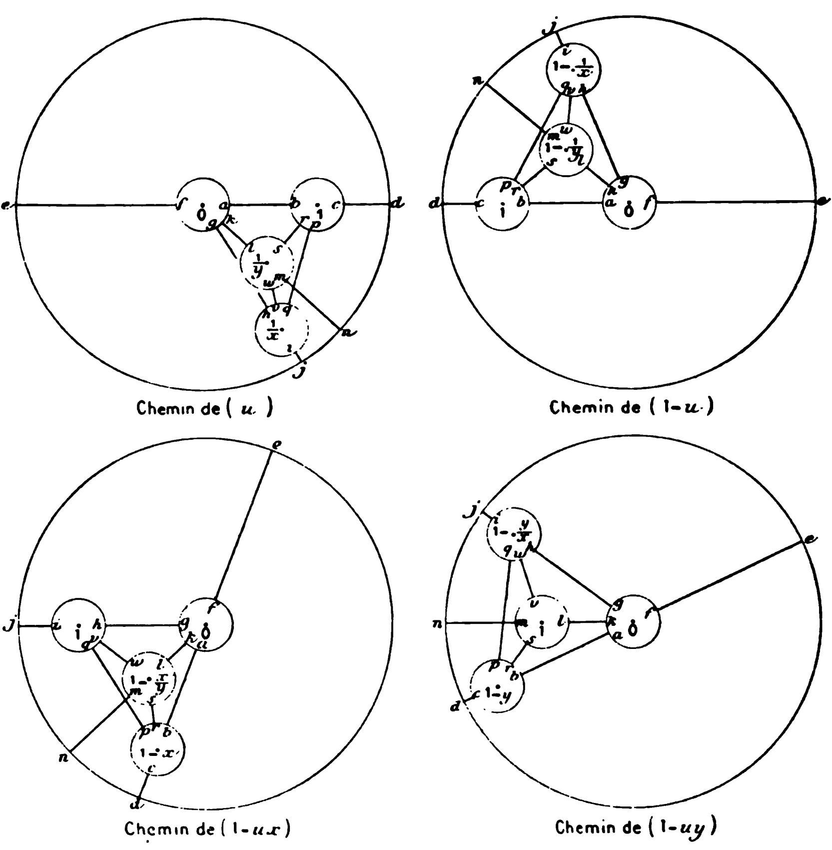
(1, 3, 7, 10) $\psi_1 \sin\alpha\pi - \psi_3 \sin\gamma\pi + (-\gamma)\psi_7 \sin(\beta + \beta')\pi + (-\alpha - \beta - \beta')\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$

$$(1, 3, 8, 9)\quad (\gamma - \beta - \beta')\psi_1 \sin \alpha\pi + (\gamma)\psi_3 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - (\beta')\psi_8 \sin \beta\pi - (-\beta)\psi_9 \sin \beta'\pi = 0,$$

$$(1, 3, 8, 10)\quad (\gamma - \beta - \beta')\psi_1 \sin \alpha\pi + (\gamma)\psi_3 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - \psi_8 \sin(\beta + \beta')\pi - (\gamma - \alpha - \beta - \beta')\psi_{10} \sin \beta'\pi = 0,$$

$$(1, 3, 9, 10)\quad (\gamma - \beta - \beta')\psi_1 \sin \alpha\pi + (\gamma)\psi_3 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - \psi_9 \sin(\beta + \beta')\pi + (\gamma - \alpha)\psi_{10} \sin \beta\pi = 0,$$

TABLEAU XIV.



Chemin de (u) — Chemin de ($1-u$) — Chemin de ($1-ux$) — Chemin de ($1-uy$)

$$(1, 4, 5, 6)\quad \psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi + (\beta')\psi_4 \sin(\beta' - \gamma)\pi - (\beta' - \gamma)\psi_5 \sin \beta'\pi - (-\gamma)\psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi = 0,$$

$$(1, 4, 5, 7)\quad \psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi - (\gamma - \beta)\psi_4 \sin \beta\pi + (-\beta)\psi_5 \sin(\beta - \gamma)\pi - (-\gamma)\psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi = 0,$$

$$(1, 4, 6, 7)\quad (\gamma)\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi - (\gamma)\psi_4 \sin \gamma\pi - (-\beta')\psi_6 \sin(\beta - \gamma)\pi - (\beta - \gamma)\psi_7 \sin \beta'\pi = 0,$$

$$(1, 4, 6, 9)\quad [(\gamma - \alpha) \sin(\beta' - \gamma)\pi + (-\beta') \sin \alpha\pi]\psi_1 - (\gamma)\psi_4 \sin(\beta' - \gamma)\pi + (-\beta')\psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - \psi_9 \sin \beta'\pi = 0,$$

(1, 4, 6, 10) $\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_4 \sin\gamma\pi - (-\gamma)\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$- (-\alpha-\gamma)\psi_{10} \sin\beta'\pi = 0,$

(1, 4, 7, 9) $[\sin(\gamma-\alpha)\pi + (-\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\pi]\psi_1 - (\gamma-\beta)\psi_4 \sin\beta\pi$
$- (-\gamma)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (-\beta-\gamma)\psi_9 \sin(\beta-\gamma)\pi = 0,$

(1, 4, 7, 10) $\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_4 \sin\gamma\pi - (-\gamma)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$- (-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10} \sin(\beta-\gamma)\pi = 0,$

(1, 4, 8) $\psi_1 - (\alpha)\psi_4 - (\alpha-\gamma)\psi_8 = 0,$

(1, 4, 9, 10) $\psi_1 - (\alpha)\psi_4 - (\alpha-\gamma)\psi_9 + (-\beta')\psi_{10} = 0,$

(1, 5, 6, 7) $(\gamma)\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi - (\gamma)\psi_5 \sin\gamma\pi - (\gamma-\beta')\psi_6 \sin\beta\pi$
$- (\beta)\psi_7 \sin(\beta'-\gamma)\pi = 0,$

(1, 5, 6, 8) $\psi_1 \sin(\beta'-\alpha)\pi - \psi_5 \sin\beta'\pi + (-\beta')\psi_6 \sin(\gamma-\beta-\beta')\pi$
$+ \psi_8 \sin(\gamma-\beta')\pi = 0,$

(1, 5, 6, 10) $\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_5 \sin\gamma\pi - (-\gamma)\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+ (-\alpha)\psi_{10} \sin(\beta'-\gamma)\pi = 0,$

(1, 5, 7, 8) $\psi_1 \sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi + \psi_5 \sin(\beta-\gamma)\pi$
$- (\beta-\gamma)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + \psi_8 \sin\beta\pi = 0,$

(1, 5, 7, 10) $\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_5 \sin\gamma\pi - (-\gamma)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$

(1, 5, 8, 10) $\psi_1 - (\alpha)\psi_5 - (\alpha-\gamma)\psi_8 - (-\beta')\psi_{10} = 0,$

(1, 5, 9) $\psi_1 - (\alpha)\psi_5 - (\alpha-\gamma)\psi_9 = 0,$

(1, 6, 7, 8) $\psi_1 \sin\alpha\pi + (-\beta')\psi_6 \sin(\beta-\gamma)\pi + (\beta-\gamma)\psi_7 \sin\beta'\pi - \psi_8 \sin\gamma\pi = 0,$

(1, 6, 7, 9) $\psi_1 \sin\alpha\pi + (\gamma-\beta')\psi_6 \sin\beta\pi + (\beta)\psi_7 \sin(\beta'-\gamma)\pi - \psi_9 \sin\gamma\pi = 0,$

(1, 6, 8, 9) $\psi_1 \sin\alpha\pi + \psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\beta')\psi_8 \sin(\beta'-\gamma)\pi$
$-(\beta'-\gamma)\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$

(1, 6, 8, 10) $\psi_1 \sin\alpha\pi + \psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - \psi_8 \sin\gamma\pi - (-\alpha)\psi_{10} \sin\beta'\pi = 0,$

(1, 6, 9, 10) $\psi_1 \sin\alpha\pi + \psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - \psi_9 \sin\gamma\pi - (\gamma-\alpha)\psi_{10} \sin(\beta'-\gamma)\pi = 0,$

(1, 7, 8, 9) $\psi_1 \sin\alpha\pi + \psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\gamma-\beta)\psi_8 \sin\beta\pi$
$+ (-\beta)\psi_9 \sin(\beta-\gamma)\pi = 0,$

(1, 7, 8, 10) $\psi_1 \sin\alpha\pi + \psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - \psi_8 \sin\gamma\pi$
$+ (\gamma-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10} \sin(\beta-\gamma)\pi = 0,$

(1, 7, 9, 10) $\psi_1 \sin\alpha\pi + \psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - \psi_9 \sin\gamma\pi + (2\gamma-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$

(2, 3, 4, 5) $\psi_2 \sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi + (\beta+\beta')\psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi$
$- (\alpha+\beta')\psi_4 \sin\beta\pi - (\alpha-\beta)\psi_5 \sin\beta'\pi = 0,$

(2, 3, 4, 6) $(-\alpha)\psi_2 + 2i\psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi - (\alpha)\psi_4 + (\alpha-\gamma-\beta-\beta')\psi_6 = 0,$

(2, 3, 4, 7) $\psi_2 \sin(\beta-\alpha)\pi + (\beta)\psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi - (\alpha)\psi_4 \sin\beta\pi - (\alpha-\gamma)\psi_7 \sin\beta'\pi = 0,$

(2, 3, 4, 8) $(-\alpha)\psi_2 + (\gamma-\alpha)\psi_3 - (\alpha\ )\psi_4 - (\alpha-\gamma)\psi_8 = 0.$

(2, 3, 4, 9) $[(\beta-\beta'-\alpha)\sin\beta\pi - (\ -\beta')\sin\alpha\pi]\psi_2$
$- [(2\beta-\beta')\sin(\gamma-\alpha)\pi - (\gamma-\alpha)\sin\beta'\pi]\psi_3$
$- (\alpha-\beta-\beta')\psi_4\sin\beta\pi + (\alpha-\gamma)\psi_9\sin\beta'\pi = 0,$

(2, 3, 4, 10) $\psi_2\sin(\beta-\beta'-\alpha)\pi - (\beta-\beta')\psi_3\sin(\gamma-\alpha)\pi$
$- (\alpha)\psi_4\sin(\beta-\beta')\pi + (-\beta-\beta')\psi_{10}\sin\beta'\pi = 0,$

(2, 3, 5, 6) $\psi_2\sin(\beta'-\alpha)\pi + (\beta')\psi_3\sin(\gamma-\alpha)\pi - (\alpha)\psi_5\sin\beta'\pi$
$- (\alpha-\gamma)\psi_6\sin\beta\pi = 0,$

(2, 3, 5, 8) $\psi_2\sin(\beta'-\alpha)\pi + (\beta-\beta')\psi_3\sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi$
$- (\alpha)\psi_5\sin\beta'\pi + (\beta-\beta'+\alpha-\gamma)\psi_8\sin\beta\pi = 0,$

(2, 3, 5, 9) $(-\alpha)\psi_2 + (\gamma-\alpha)\psi_3 - (\alpha)\psi_5 - (\alpha-\gamma)\psi_9 = 0,$

(2, 3, 5, 10) $\psi_2\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi + (\beta-\beta')\psi_3\sin(\gamma-\alpha)\pi$
$- (\alpha)\psi_5\sin(\beta+\beta')\pi - \psi_{10}\sin\beta\pi = 0,$

(2, 3, 6, 7) $\psi_2\sin\alpha\pi + \psi_3\sin(\alpha-\gamma)\pi + (\alpha-\beta'-\gamma)\psi_6\sin\beta\pi$
$+ (\alpha+\beta-\gamma)\psi_7\sin\beta'\pi = 0,$

(2, 3, 6, 9) $\psi_2\sin\alpha\pi + (\beta')\psi_3\sin(\alpha+\beta-\gamma) + (\alpha+\beta'-\gamma)\psi_6\sin\beta\pi$
$- (\alpha+\beta'-\gamma)\psi_9\sin\beta'\pi = 0,$

(2, 3, 6, 10) $\psi_2\sin\alpha\pi + \psi_3\sin(\alpha-\gamma)\pi - (\alpha-\gamma)\psi_6\sin(\beta+\beta')\pi - \psi_{10}\sin\beta'\pi = 0,$

(2, 3, 7, 8) $\psi_2\sin\alpha\pi + (\beta)\psi_3\sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi + (\alpha+\beta-\gamma)\psi_7\sin\beta'\pi$
$- (\alpha+\beta-\gamma)\psi_8\sin\beta\pi = 0,$

(2, 3, 7, 9) $2i\psi_2\sin\alpha\pi - (\gamma-\alpha)\psi_3 + (\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_7 + (\alpha-\gamma)\psi_9 = 0,$

(2, 3, 7, 10) $\psi_2\sin\alpha\pi + \psi_3\sin(\alpha-\gamma)\pi + (\alpha-\gamma)\psi_7\sin(\beta+\beta')\pi$
$+ (-\beta-\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi = 0,$

(2, 3, 8, 9) $\psi_2\sin\alpha\pi + (\beta+\beta')\psi_3\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$- (\alpha+\beta+2\beta'-\gamma)\psi_8\sin\beta\pi - (\alpha+\beta'-\gamma)\psi_9\sin\beta'\pi = 0,$

(2, 3, 8, 10) $\psi_2\sin\alpha\pi + (\beta+\beta')\psi_3\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$- (\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_8\sin(\beta+\beta')\pi - \psi_{10}\sin\beta'\pi = 0,$

(2, 3, 9, 10) $\psi_2\sin\alpha\pi + (\beta+\beta')\psi_3\sin(\alpha+\beta-\beta'-\gamma)\pi$
$- (\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_9\sin(\beta+\beta')\pi + (\beta+\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi = 0,$

(2, 4, 5, 6) $(\ \ \beta')\psi_2 - (\beta')\psi_4 + 2i\psi_5\sin\beta'\pi + (\beta-\gamma)\psi_6 = 0,$

(2, 4, 5, 8) $\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\alpha+\beta')\psi_4\sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi$
$- (\gamma-\beta)\psi_5\sin\beta'\pi + (\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_8\sin(\gamma-\alpha)\pi = 0,$

(2, 4, 5, 9) $\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\gamma+\beta')\psi_4\sin\beta\pi$
$+ [(\alpha+\beta+\beta')\sin(\gamma-\alpha)\pi - (\gamma-\beta)\sin\beta'\pi]\psi_5$
$+ (\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_9\sin(\gamma-\alpha)\pi = 0,$

(2, 4, 6, 7) $\psi_2 - \psi_4 + (\beta+\beta'-\gamma)\psi_6 + 2i(\beta-\gamma)\psi_7\sin\beta'\pi = 0,$

(2,6,9,10) $\psi_2 \sin\alpha\pi - \psi_6 \sin(\alpha-\beta-\beta'-\gamma)\pi - \psi_9\sin(\alpha-\gamma)\pi$
$- (\gamma-\alpha)\psi_{10}\sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi = 0,$

(2,7,8,9) $\psi_2\sin\alpha\pi - \psi_7\sin(\alpha-\beta-\beta'-\gamma)\pi - (\gamma-\alpha-\beta)\psi_8\sin\beta\pi$
$-(-\beta)\psi_9\sin(\alpha-\beta-\gamma)\pi = 0,$

(2,7,8,10) $\psi_2\sin\alpha\pi - \psi_7\sin(\alpha-\beta-\beta'-\gamma)\pi - \psi_8\sin(\alpha-\gamma)\pi$
$-(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10}\sin(\alpha-\beta-\gamma)\pi = 0,$

(2,7,9,10) $\psi_2\sin\alpha\pi - \psi_7\sin(\alpha-\beta-\beta'-\gamma)\pi - \psi_9\sin(\alpha-\gamma)\pi$
$-(2\gamma-2\alpha-\beta-\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi = 0,$

(3,4,5,6) $\psi_3\sin(\gamma-\alpha)\pi - (\beta)\psi_4\sin(\beta-\alpha)\pi - (\beta'-\alpha)\psi_5\sin\beta'\pi$
$-(-\gamma)\psi_6\sin(\alpha-\beta-\beta')\pi = 0,$

(3,4,5,7) $\psi_3\sin(\gamma-\alpha)\pi - (\alpha-\beta)\psi_4\sin\beta\pi - (-\beta)\psi_5\sin(\beta-\alpha)\pi$
$-(-\gamma)\psi_7\sin(\alpha-\beta-\beta')\pi = 0,$

(3,4,5,8) $\psi_3\sin(\gamma-\beta-\beta')\pi - (\alpha-\beta)\psi_4\sin(\beta'-\alpha)\pi$
$-(-\beta)\psi_5\sin\beta\pi - (\alpha-\gamma)\psi_8\sin(\beta-\beta'-\alpha)\pi = 0,$

(3,4,5,9) $\psi_3\sin(\gamma-\beta-\beta')\pi - (\beta')\psi_4\sin\beta\pi$
$-[(\alpha)\sin(\beta-\beta'-\alpha)\pi - (-\beta)\sin\beta'\pi]\psi_5$
$-(\alpha-\gamma)\psi_9\sin(\beta-\beta'-\alpha)\pi = 0,$

(3,4,6,7) $\psi_3\sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_4\sin\alpha\pi - (-\beta-\gamma)\psi_6\sin(\alpha-\beta)\pi$
$-(\beta-\alpha-\gamma)\psi_7\sin\beta'\pi = 0,$

(3,4,6,9) $[(\alpha)\sin(\gamma-\alpha)\pi - (\beta'-\gamma)\sin\beta'\pi]\psi_3 - (\alpha)\psi_4\sin\alpha\pi$
$-[(\alpha-\beta-\beta'-\gamma)\sin\alpha\pi - (\beta'-\gamma)\sin\beta\pi]\psi_6 - (\beta'-\gamma)\psi_9\sin\beta'\pi = 0,$

(3,4,6,10) $\psi_3\sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_4\sin\alpha\pi - (-\gamma)\psi_6\sin(\alpha-\beta-\beta')\pi$
$-(-2\alpha)\psi_{10}\sin\beta'\pi = 0,$

(3,4,7,8) $\psi_3\sin(\gamma-\beta)\pi - (\alpha-\beta)\psi_4\sin\alpha\pi - (-\gamma)\psi_7\sin\beta'\pi$
$+(\alpha-\gamma)\psi_8\sin(\beta-\alpha)\pi = 0,$

(3,4,7,9) $[(\gamma-\alpha)\sin\beta\pi - (\beta-\gamma)\sin\alpha\pi]\psi_3 - 2i\psi_4\sin\alpha\pi\sin\beta\pi$
$+[(-\beta'-\gamma)\sin\alpha\pi - (\beta-\beta'-\gamma-\alpha)\sin\beta\pi]\psi_7 + (-\gamma)\psi_9\sin(\alpha-\beta)\pi = 0,$

(3,4,7,10) $\psi_3\sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_4\sin\alpha\pi - (-\gamma)\psi_7\sin(\alpha-\beta-\beta')\pi$
$-(-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10}\sin(\alpha-\beta)\pi = 0,$

(3,4,8,9) $(\gamma)\psi_3\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\alpha+\gamma-\beta-\beta')\psi_4\sin\alpha\pi$
$+[(\alpha-\beta-\beta')\sin\alpha\pi - (\beta')\sin\beta\pi]\psi_8 - (-\beta)\psi_9\sin\beta'\pi = 0,$

(3,4,8,10) $\psi_3\sin(\gamma-\beta-\beta')\pi - (\alpha-\beta-\beta')\psi_4\sin\alpha\pi$
$+(\alpha-\gamma)\psi_8\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi + (-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10}\sin\beta'\pi = 0,$

(3,4,9,10) $\psi_3\sin(\gamma-\beta-\beta')\pi - (\alpha-\beta-\beta')\psi_4\sin\alpha\pi$
$+(\alpha-\gamma)\psi_9\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi$
$+(-\beta+\beta')[(-\beta')\sin\alpha\pi - (\beta+\beta'-\alpha)\sin\beta\pi]\psi_{10} = 0,$

(3,5,6,7) $\psi_3\sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_5\sin\alpha\pi - (\alpha-\beta'-\gamma)\psi_6\sin\beta\pi$
$+(\beta-\gamma)\psi_7\sin(\alpha-\beta')\pi = 0,$

$$(4,6,8,9)\quad \psi_4 \sin\alpha\pi + (-\alpha)\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + [(-\gamma)\sin\alpha\pi + (\beta'-\alpha)\sin(\beta'-\gamma)\pi]\psi_8 - (\beta'-\alpha-\gamma)\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$$

$$(4,6,8,10)\quad (\alpha)\psi_4 \sin\alpha\pi + \psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\alpha)\psi_8 \sin(\alpha-\gamma)\pi - (-\alpha)\psi_{10} \sin\beta'\pi = 0,$$

$$(4,6,9,10)\quad (\alpha)\psi_4 \sin\alpha\pi + \psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\alpha)\psi_9 \sin(\alpha-\gamma)\pi + (-\alpha)[(\gamma-\beta')\sin(\gamma-\alpha)\pi - (-\alpha)\sin\beta'\pi]\psi_{10} = 0,$$

$$(4,7,8,9)\quad (\alpha)\psi_4 \sin\alpha\pi + \psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + [(\alpha-\gamma)\sin\alpha\pi - (\gamma-\beta)\sin\beta\pi]\psi_8 + (-\beta)\psi_9 \sin(\beta-\gamma)\pi = 0,$$

$$(4,7,8,10)\quad (\alpha)\psi_4 \sin\alpha\pi + \psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\alpha)\psi_8 \sin(\alpha-\gamma)\pi + (\gamma-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10} \sin(\beta-\gamma)\pi = 0,$$

$$(4,7,9,10)\quad (\alpha)\psi_4 \sin\alpha\pi + \psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\alpha)\psi_9 \sin(\alpha-\gamma)\pi + [(2\gamma-\alpha-\beta-\beta')\sin\beta\pi - (-\beta')\sin\alpha\pi]\psi_{10} = 0,$$

$$(5,6,7,8)\quad \psi_5 \sin\alpha\pi + (-\beta')\psi_6 \sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi + (\beta-\gamma)\psi_7 \sin(\beta'-\alpha)\pi + \psi_8 \sin(\alpha-\gamma)\pi = 0,$$

$$(5,6,7,9)\quad \psi_5 \sin\alpha\pi + (\gamma-\alpha-\beta')\psi_6 \sin\beta\pi + (\beta-\alpha)\psi_7 \sin(\beta'-\gamma)\pi + \psi_9 \sin(\alpha-\gamma)\pi = 0,$$

$$(5,6,8,9)\quad \psi_5 \sin\alpha\pi + (-\alpha)\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\beta'-\alpha)\psi_8 \sin(\beta'-\gamma)\pi + (\beta'-\gamma)\psi_9 \sin(\alpha-\beta')\pi = 0,$$

$$(5,6,8,10)\quad (\alpha)\psi_5 \sin\alpha\pi + \psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\alpha)\psi_8 \sin(\alpha-\gamma)\pi + \psi_{10} \sin(\alpha-\beta')\pi = 0,$$

$$(5,6,9,10)\quad (\alpha)\psi_5 \sin\alpha\pi + \psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\alpha)\psi_9 \sin(\alpha-\gamma)\pi + (\gamma-\alpha)\psi_{10} \sin(\gamma-\beta')\pi = 0,$$

$$(5,7,8,9)\quad (\alpha)\psi_5 \sin\alpha\pi + \psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\gamma-\beta)\psi_8 \sin\beta\pi + (\alpha-\beta)\psi_9 \sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi = 0,$$

$$(5,7,8,10)\quad (\alpha)\psi_5 \sin\alpha\pi + \psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\alpha)\psi_8 \sin(\alpha-\gamma)\pi + (\gamma-\beta-\beta')\psi_{10} \sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi = 0,$$

$$(5,7,9,10)\quad (\alpha)\psi_5 \sin\alpha\pi + \psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\alpha)\psi_9 \sin(\alpha-\gamma)\pi + (2\gamma-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$$

$$(6,7,8,9)\quad (\beta-\beta')\psi_6 - (\beta-\beta')\psi_7 + \psi_8 - \psi_9 = 0,$$

$$(6,7,10)\quad \psi_6 - \psi_7 - (\gamma-\alpha-\beta)\psi_{10} = 0,$$

$$(8,9,10)\quad \psi_8 - \psi_9 + (\gamma-\alpha-\beta')\psi_{10} = 0.$$

TABLEAU II (*voir* page 68).

(1, 2, 3), (1, 2, 4, 5), (1, 2, 4, 6), (1, 2, 4, 7) (*voir* le Tableau I).

$$(1,2,4,9)\quad \psi_1 \sin(\gamma-\alpha-\beta')\pi + (-\beta)\psi_2 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\gamma-\beta-\beta')\psi_4 \sin\beta\pi + \psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$$

(1, 2, 4, 10), (1, 2, 5, 6), (1, 2, 5, 8) (*voir* le Tableau I).

(1, 4, 7, 9) $\psi_1 \sin(\beta - \alpha)\pi - \psi_4 \sin\beta\pi$
$+ (-\beta)\psi_7 \sin(\gamma - \beta - \beta')\pi + \psi_9 \sin(\gamma - \beta)\pi = 0,$

(1, 4, 7, 10), (1, 4, 8) (*voir* le Tableau I),

(1, 4, 9, 10) $\psi_1 - (\alpha)\psi_4 - (\beta - \gamma)\psi_9 + (-2\beta - \beta')\psi_{10} = 0,$

(1, 5, 6, 7), (1, 5, 6, 8) (*voir* le Tableau I),

(1, 5, 6, 9) $[(\gamma + \beta' - \alpha)\sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - (\alpha)\sin\beta\pi]\psi_1$
$- [(\gamma + \beta')\sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - \sin\beta\pi]\psi_5$
$- 2i\psi_6 \sin\beta\pi \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - (\beta + \beta')\psi_9 \sin(\beta' - \gamma)\pi = 0,$

(1, 5, 6, 10), (1, 5, 7, 8) (*voir* le Tableau I),

(1, 5, 7, 9) $\psi_1 - (-\alpha)\psi_5 + 2i(-\alpha)\psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - (\gamma - \alpha)\psi_9 = 0,$

(1, 5, 7, 10) (*voir* le Tableau I),

(1, 5, 8, 9) $(-\beta)\psi_1 - (\alpha - \beta)\psi_5 + 2i(\alpha - \gamma)\psi_8 \sin\beta\pi - (\alpha + \beta - \gamma)\psi_9 = 0,$

(1, 5, 8, 10) (*voir* le Tableau I),

(1, 5, 9, 10) $\psi_1 - (\alpha)\psi_5 - (\alpha - \gamma)\psi_9 - 2i(-\beta - \beta')\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$

(1, 6, 7, 8) (*voir* le Tableau I),

(1, 6, 7, 9) $\psi_1 \sin\alpha\pi + (-\beta' - \gamma)\psi_6 \sin\beta\pi$
$+ [(\beta - \gamma)\sin\beta'\pi - (-\beta - \beta')\sin\gamma\pi]\psi_7 - \psi_9 \sin\gamma\pi = 0,$

(1, 6, 8, 9) $(\gamma - \beta - \beta')\psi_1 \sin\alpha\pi + (\gamma - \beta - \beta')\psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
$+ [(\gamma)\sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - (-\beta')\sin\beta\pi]\psi_8 - (\beta)\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$

(1, 6, 8, 10) (*voir* le Tableau I),

(1, 6, 9, 10) $\psi_1 \sin\alpha\pi + \psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - \psi_9 \sin\gamma\pi$
$- (\gamma - \alpha - \beta - \beta')[(\beta + \beta' - \gamma)\sin\beta'\pi - (-\beta)\sin\gamma\pi]\psi_{10} = 0,$

(1, 7, 8, 9) $\psi_1 \sin\alpha\pi + \psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - (\beta - \gamma)\psi_8 \sin\beta\pi + (\beta)\psi_9 \sin(\beta - \gamma)\pi = 0,$

(1, 7, 8, 10) (*voir* le Tableau I),

(1, 7, 9, 10) $\psi_1 \sin\alpha\pi + \psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - \psi_9 \sin\gamma\pi + (-\alpha - \beta - \beta')\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$

(2, 3, 4, 5), (2, 3, 4, 6), (2, 3, 4, 7), (2, 3, 4, 8) (*voir* le Tableau I),

(2, 3, 4, 9) $\psi_2 \sin(\beta - \alpha)\pi + (\beta + \beta')\psi_3 \sin(\gamma - \alpha - \beta')$
$+ (\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\psi_9 \sin\beta'\pi - (\alpha)\psi_4 \sin\beta\pi = 0,$

(2, 3, 4, 10), (2, 3, 5, 6), (2, 3, 5, 8) (*voir* le Tableau I),

(2, 3, 5, 9) $\psi_2 + (2\beta + 2\beta' - \gamma)\psi_3 - \psi_5 - (2\beta + 2\beta' - \gamma)\psi_9 = 0.$

(2, 3, 5, 10), (2, 3, 6, 7) (*voir* le Tableau I),

(2, 3, 6, 9) $(-\beta)\psi_2 \sin\alpha\pi + [(\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\sin\beta'\pi - (-\beta)\sin(\gamma - \alpha)\pi]\psi_3$
$+ (\alpha - \beta - \beta' - \gamma)\psi_6 \sin\beta\pi - (\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$

(2, 3, 6, 10), (2, 3, 7, 8), (2, 3, 7, 10) (*voir* le Tableau I),

(2, 3, 8, 9) $\psi_2 \sin\alpha\pi + (\beta + \beta')\psi_3 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\pi$
$- (\alpha + \beta - \gamma)\psi_8 \sin\beta\pi - (\alpha + 2\beta + \beta' - \gamma)\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$

(2, 3, 8, 10) (*voir* le Tableau I),

(2, 3, 9, 10) $\psi_2 \sin\alpha\pi + (\beta+\beta')\psi_3 \sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$$- (\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_9 \sin(\beta+\beta')\pi + (-\beta-\beta')\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$$

(2, 4, 5, 6), **(2, 4, 5, 8)** (*voir* le Tableau I),

(2, 4, 5, 9) $(\gamma-\alpha-\beta')\psi_2 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\alpha)\psi_4 \sin\beta\pi$
$$+ (\gamma-\beta-\beta')\psi_5 \sin(\gamma-\alpha-\beta')\pi + (\beta)\psi_9 \sin(\gamma-\alpha)\pi = 0,$$

(2, 4, 6, 7), **(2, 4, 6, 8)** (*voir* le Tableau I),

(2, 4, 6, 9) $(-\beta)[(\beta-\alpha)\sin\beta\pi - (\gamma-\beta-\beta')\sin(\gamma-\alpha)\pi]\psi_2$
$$- (\gamma-\beta-\beta')[(\beta+\beta'+\alpha-\gamma)\sin\beta'\pi - (-\beta)\sin(\gamma-\alpha)\pi]\psi_4$$
$$+ (-\beta-\beta')\psi_6 \sin(\alpha+\beta'-\gamma)\pi + 2i\psi_9 \sin\beta'\pi \sin(\gamma-\alpha)\pi = 0,$$

(2, 4, 6, 10), **(2, 4, 7, 8)** (*voir* le Tableau I),

(2, 4, 7, 9) $\psi_2 \sin(\beta-\alpha)\pi - (\alpha)\psi_4 \sin\beta\pi$
$$+ \psi_7 \sin(\gamma-\alpha-\beta')\pi + (\beta)\psi_9 \sin(\gamma-\alpha)\pi = 0,$$

(2, 4, 7, 10) (*voir* le Tableau I),

(2, 4, 8, 9) $\psi_2 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\alpha)\psi_4 \sin(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\pi$
$$+ (\alpha+\beta-\gamma)\psi_8 \sin(\gamma-\alpha-\beta')\pi + (\beta)\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$$

(2, 4, 8, 10) (*voir* le Tableau I),

(2, 4, 9, 10) $\psi_2 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\alpha)\psi_4 \sin(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\pi$
$$+ (\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_9 \sin(\gamma-\alpha)\pi + (-\beta-\beta')\psi_{10} \sin(\alpha+\beta'-\gamma)\pi = 0,$$

(2, 5, 6, 8) (*voir* le Tableau I),

(2, 5, 6, 9) $[(\beta)\sin(\beta'-\alpha)\pi - (\gamma-\beta-\beta')\sin(\gamma-\alpha)\pi]\psi_2$
$$- [(\alpha+\beta)\sin\beta'\pi + (\gamma-\beta-\beta')\sin(\alpha-\gamma)\pi]\psi_5$$
$$- (\alpha+\beta-\gamma)\psi_6 \sin\beta\pi - (\beta+\beta')\psi_9 \sin(\alpha-\gamma)\pi = 0,$$

(2, 5, 6, 10), **(2, 5, 7)** (*voir* le Tableau I),

(2, 5, 8, 9) $(\gamma-\alpha)\psi_2 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\gamma)\psi_5 \sin(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\pi$
$$+ (\alpha+2\beta+\beta'-\gamma)\psi_8 \sin\beta\pi + (+2\beta+\beta')\psi_9 \sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi = 0,$$

(2, 5, 8, 10) (*voir* le Tableau I),

(2, 5, 9, 10) $(\gamma-\alpha)\psi_2 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\gamma)\psi_5 \sin(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\pi$
$$+ (\beta+\beta')\psi_9 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$$

(2, 6, 7, 8) (*voir* le Tableau I),

(2, 6, 7, 9) $\psi_2 \sin\alpha\pi + [(\alpha+\beta-\gamma)\sin\beta'\pi + (-\beta-\beta')\sin(\alpha-\gamma)\pi]\psi_7$
$$+ (\alpha-\beta'-\gamma)\psi_6 \sin\beta\pi + \psi_9 \sin(\alpha-\gamma)\pi = 0,$$

(2, 6, 8, 9) $\psi_2 \sin\alpha\pi + \psi_6 \sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$$+ [(\beta+\beta')\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\alpha+\beta-\gamma)\sin\beta\pi]\psi_8$$
$$- (\alpha+2\beta+\beta'-\gamma)\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$$

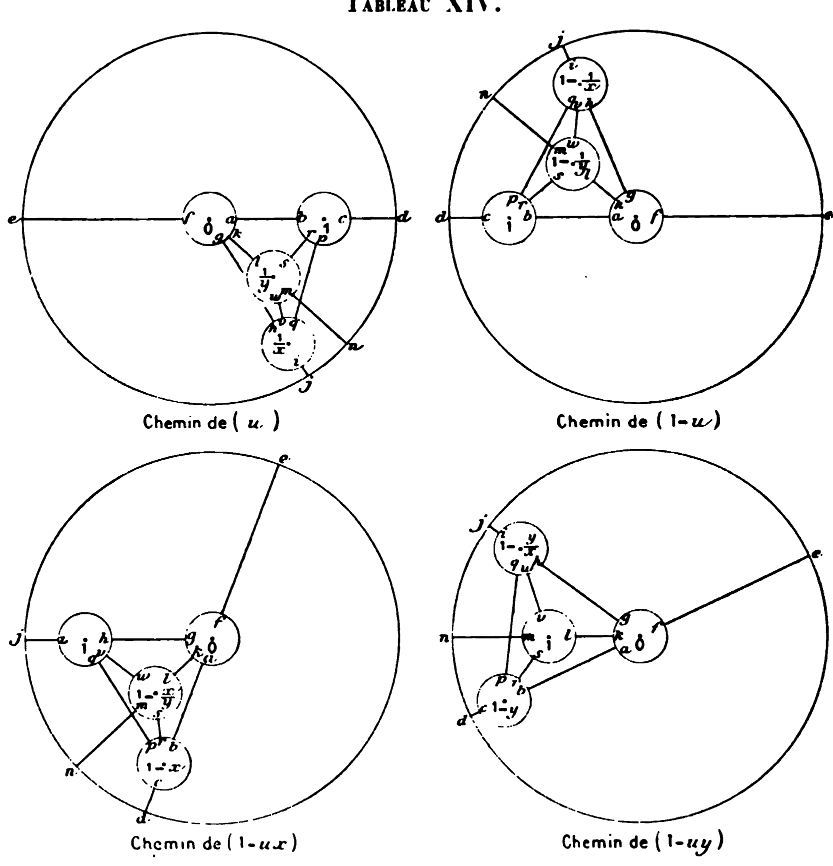
(2, 6, 8, 10) (*voir* le Tableau I),

(1, 3, 8, 9) $(\gamma-\beta-\beta')\psi_1\sin\alpha\pi+(\gamma)\psi_3\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$$-(\beta')\psi_8\sin\beta\pi-(-\beta)\psi_9\sin\beta'\pi=0,$$

(1, 3, 8, 10) $(\gamma-\beta-\beta')\psi_1\sin\alpha\pi+(\gamma)\psi_3\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$$-\psi_8\sin(\beta+\beta')\pi-(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$$

(1, 3, 9, 10) $(\gamma-\beta-\beta')\psi_1\sin\alpha\pi+(\gamma)\psi_3\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$$-\psi_9\sin(\beta+\beta')\pi+(\gamma-\alpha)\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$$

TABLEAU XIV.



Chemin de (u) Chemin de ($1-u$)

Chemin de ($1-ux$) Chemin de ($1-uy$)

(1, 4, 5, 6) $\psi_1\sin(\gamma-\alpha)\pi+(\beta')\psi_4\sin(\beta'-\gamma)\pi-(\beta'-\gamma)\psi_5\sin\beta'\pi$
$$-(-\gamma)\psi_6\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi=0,$$

(1, 4, 5, 7) $\psi_1\sin(\gamma-\alpha)\pi-(\gamma-\beta)\psi_4\sin\beta\pi+(-\beta)\psi_5\sin(\beta-\gamma)\pi$
$$-(-\gamma)\psi_7\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi=0,$$

(1, 4, 6, 7) $(\gamma)\psi_1\sin(\gamma-\alpha)\pi-(\gamma)\psi_4\sin\gamma\pi-(-\beta')\psi_6\sin(\beta-\gamma)\pi$
$$-(\beta-\gamma)\psi_7\sin\beta'\pi=0,$$

(1, 4, 6, 9) $[(\gamma-\alpha)\sin(\beta'-\gamma)\pi+(-\beta')\sin\alpha\pi]\psi_1-(\gamma)\psi_4\sin(\beta'-\gamma)\pi$
$$+(-\beta')\psi_6\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi-\psi_9\sin\beta'\pi=0,$$

(1, 4, 6, 10) $\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_4 \sin\gamma\pi - (-\gamma)\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$- (-\alpha-\gamma)\psi_{10} \sin\beta'\pi = 0,$

(1, 4, 7, 9) $[\sin(\gamma-\alpha)\pi + (-\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\pi]\psi_1 - (\gamma-\beta)\psi_4 \sin\beta\pi$
$- (-\gamma)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (-\beta-\gamma)\psi_9 \sin(\beta-\gamma)\pi = 0,$

(1, 4, 7, 10) $\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_4 \sin\gamma\pi - (-\gamma)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$- (-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10} \sin(\beta-\gamma)\pi = 0,$

(1, 4, 8) $\psi_1 - (\alpha)\psi_4 - (\alpha-\gamma)\psi_8 = 0,$

(1, 4, 9, 10) $\psi_1 - (\alpha)\psi_4 - (\alpha-\gamma)\psi_9 + (-\beta')\psi_{10} = 0,$

(1, 5, 6, 7) $(\gamma)\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi - (\gamma)\psi_5 \sin\gamma\pi - (\gamma-\beta')\psi_6 \sin\beta\pi$
$- (\beta)\psi_7 \sin(\beta'-\gamma)\pi = 0,$

(1, 5, 6, 8) $\psi_1 \sin(\beta'-\alpha)\pi - \psi_5 \sin\beta'\pi + (-\beta')\psi_6 \sin(\gamma-\beta-\beta')\pi$
$+ \psi_8 \sin(\gamma-\beta')\pi = 0,$

(1, 5, 6, 10) $\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_5 \sin\gamma\pi - (-\gamma)\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+ (-\alpha)\psi_{10} \sin(\beta'-\gamma)\pi = 0,$

(1, 5, 7, 8) $\psi_1 \sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi + \psi_5 \sin(\beta-\gamma)\pi$
$- (\beta-\gamma)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + \psi_8 \sin\beta\pi = 0,$

(1, 5, 7, 10) $\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_5 \sin\gamma\pi - (-\gamma)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$

(1, 5, 8, 10) $\psi_1 - (\alpha)\psi_5 - (\alpha-\gamma)\psi_8 - (-\beta')\psi_{10} = 0,$

(1, 5, 9) $\psi_1 - (\alpha)\psi_5 - (\alpha-\gamma)\psi_9 = 0,$

(1, 6, 7, 8) $\psi_1 \sin\alpha\pi + (-\beta')\psi_6 \sin(\beta-\gamma)\pi + (\beta-\gamma)\psi_7 \sin\beta'\pi - \psi_8 \sin\gamma\pi = 0,$

(1, 6, 7, 9) $\psi_1 \sin\alpha\pi + (\gamma-\beta')\psi_6 \sin\beta\pi + (\beta)\psi_7 \sin(\beta'-\gamma)\pi - \psi_9 \sin\gamma\pi = 0,$

(1, 6, 8, 9) $\psi_1 \sin\alpha\pi + \psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\beta')\psi_8 \sin(\beta'-\gamma)\pi$
$-(\beta'-\gamma)\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$

(1, 6, 8, 10) $\psi_1 \sin\alpha\pi + \psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - \psi_8 \sin\gamma\pi - (-\alpha)\psi_{10} \sin\beta'\pi = 0,$

(1, 6, 9, 10) $\psi_1 \sin\alpha\pi + \psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - \psi_9 \sin\gamma\pi - (\gamma-\alpha)\psi_{10} \sin(\beta'-\gamma)\pi = 0,$

(1, 7, 8, 9) $\psi_1 \sin\alpha\pi + \psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\gamma-\beta)\psi_8 \sin\beta\pi$
$+ (-\beta)\psi_9 \sin(\beta-\gamma)\pi = 0,$

(1, 7, 8, 10) $\psi_1 \sin\alpha\pi + \psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - \psi_8 \sin\gamma\pi$
$+ (\gamma-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10} \sin(\beta-\gamma)\pi = 0,$

(1, 7, 9, 10) $\psi_1 \sin\alpha\pi + \psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - \psi_9 \sin\gamma\pi + (2\gamma-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$

(2, 3, 4, 5) $\psi_2 \sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi + (\beta+\beta')\psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi$
$- (\alpha+\beta')\psi_4 \sin\beta\pi - (\alpha-\beta)\psi_5 \sin\beta'\pi = 0,$

(2, 3, 4, 6) $(-\alpha)\psi_2 + 2i\psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi - (\alpha)\psi_4 + (\alpha-\gamma-\beta-\beta')\psi_6 = 0,$

(2, 3, 4, 7) $\psi_2 \sin(\beta-\alpha)\pi + (\beta)\psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi - (\alpha)\psi_4 \sin\beta\pi - (\alpha-\gamma)\psi_7 \sin\beta'\pi = 0,$

$(2, 3, 4, 8)\quad (-\alpha)\psi_2 + (\gamma-\alpha)\psi_3 - (\alpha)\psi_4 - (\alpha-\gamma)\psi_8 = 0,$

$$(2, 3, 4, 9)\quad [(\beta+\beta'-\alpha)\sin\beta\pi - (-\beta')\sin\alpha\pi]\psi_2 + [(2\beta+\beta')\sin(\gamma-\alpha)\pi - (\gamma-\alpha)\sin\beta'\pi]\psi_3 - (\alpha+\beta+\beta')\psi_4\sin\beta\pi + (\alpha-\gamma)\psi_9\sin\beta'\pi = 0,$$

$$(2, 3, 4, 10)\quad \psi_2\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi + (\beta+\beta')\psi_3\sin(\gamma-\alpha)\pi - (\alpha)\psi_4\sin(\beta+\beta')\pi + (-\beta-\beta')\psi_{10}\sin\beta'\pi = 0,$$

$$(2, 3, 5, 6)\quad \psi_2\sin(\beta'-\alpha)\pi + (\beta')\psi_3\sin(\gamma-\alpha)\pi - (\alpha)\psi_5\sin\beta'\pi - (\alpha-\gamma)\psi_6\sin\beta\pi = 0,$$

$$(2, 3, 5, 8)\quad \psi_2\sin(\beta'-\alpha)\pi + (\beta+\beta')\psi_3\sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi - (\alpha)\psi_5\sin\beta'\pi + (\beta+\beta'+\alpha-\gamma)\psi_8\sin\beta\pi = 0,$$

$(2, 3, 5, 9)\quad (-\alpha)\psi_2 + (\gamma-\alpha)\psi_3 - (\alpha)\psi_5 - (\alpha-\gamma)\psi_9 = 0,$

$$(2, 3, 5, 10)\quad \psi_2\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi + (\beta+\beta')\psi_3\sin(\gamma-\alpha)\pi - (\alpha)\psi_5\sin(\beta+\beta')\pi - \psi_{10}\sin\beta\pi = 0,$$

$$(2, 3, 6, 7)\quad \psi_2\sin\alpha\pi + \psi_3\sin(\alpha-\gamma)\pi + (\alpha-\beta'-\gamma)\psi_6\sin\beta\pi + (\alpha+\beta-\gamma)\psi_7\sin\beta'\pi = 0,$$

$$(2, 3, 6, 9)\quad \psi_2\sin\alpha\pi + (\beta')\psi_3\sin(\alpha+\beta'-\gamma) + (\alpha+\beta'-\gamma)\psi_6\sin\beta\pi - (\alpha+\beta'-\gamma)\psi_9\sin\beta'\pi = 0,$$

$$(2, 3, 6, 10)\quad \psi_2\sin\alpha\pi + \psi_3\sin(\alpha-\gamma)\pi + (\alpha-\gamma)\psi_6\sin(\beta+\beta')\pi - \psi_{10}\sin\beta'\pi = 0,$$

$$(2, 3, 7, 8)\quad \psi_2\sin\alpha\pi + (\beta)\psi_3\sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi + (\alpha+\beta-\gamma)\psi_7\sin\beta'\pi - (\alpha+\beta-\gamma)\psi_8\sin\beta\pi = 0,$$

$(2, 3, 7, 9)\quad 2i\psi_2\sin\alpha\pi - (\gamma-\alpha)\psi_3 + (\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_7 + (\alpha-\gamma)\psi_9 = 0,$

$$(2, 3, 7, 10)\quad \psi_2\sin\alpha\pi + \psi_3\sin(\alpha-\gamma)\pi + (\alpha-\gamma)\psi_7\sin(\beta+\beta')\pi + (-\beta-\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi = 0,$$

$$(2, 3, 8, 9)\quad \psi_2\sin\alpha\pi + (\beta+\beta')\psi_3\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\alpha+\beta+2\beta'-\gamma)\psi_8\sin\beta\pi - (\alpha+\beta'-\gamma)\psi_9\sin\beta'\pi = 0,$$

$$(2, 3, 8, 10)\quad \psi_2\sin\alpha\pi + (\beta+\beta')\psi_3\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_8\sin(\beta+\beta')\pi - \psi_{10}\sin\beta'\pi = 0,$$

$$(2, 3, 9, 10)\quad \psi_2\sin\alpha\pi + (\beta+\beta')\psi_3\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_9\sin(\beta+\beta')\pi + (\beta+\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi = 0,$$

$(2, 4, 5, 6)\quad (-\beta')\psi_2 - (\beta')\psi_4 + 2i\psi_5\sin\beta'\pi + (\beta-\gamma)\psi_6 = 0,$

$$(2, 4, 5, 8)\quad \psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\alpha+\beta')\psi_4\sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi - (\gamma-\beta)\psi_5\sin\beta'\pi + (\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_8\sin(\gamma-\alpha)\pi = 0,$$

$$(2, 4, 5, 9)\quad \psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\gamma+\beta')\psi_4\sin\beta\pi + [(\alpha+\beta+\beta')\sin(\gamma-\alpha)\pi - (\gamma-\beta)\sin\beta'\pi]\psi_5 + (\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_9\sin(\gamma-\alpha)\pi = 0,$$

$(2, 4, 6, 7)\quad \psi_2 - \psi_4 + (\beta-\beta'-\gamma)\psi_6 + 2i(\beta-\gamma)\psi_7\sin\beta'\pi = 0,$

(2, 4, 6, 8) $(-\alpha)\psi_2-(\alpha)\psi_4+(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\psi_6+2i\psi_8\sin(\gamma-\alpha)\pi=0,$

(2, 4, 6, 9) $[(\gamma-\beta')\sin(\gamma-\alpha)\pi-(-\alpha)\sin\beta'\pi]\psi_2-(\gamma)\psi_4\sin(\gamma-\alpha-\beta')\pi$
$+[(\beta)\sin(\gamma-\alpha)\pi-(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\sin\beta'\pi]\psi_6$
$+2i\psi_9\sin\beta'\pi\sin(\alpha-\gamma)\pi=0,$

(2, 4, 6, 10) $\psi_2-\psi_4+(\beta+\beta'-\gamma)\psi_6-2i(-\alpha)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

(2, 4, 7, 8) $\psi_2\sin(\beta-\gamma)\pi+(\alpha)\psi_4\sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi$
$-\psi_7\sin\beta'\pi+(\alpha+\beta-\gamma)\psi_8\sin(\gamma-\alpha)\pi=0,$

(2, 4, 7, 9) $[(-\beta)\sin(\beta-\gamma)\pi+(\alpha)\sin(\gamma-\alpha)\pi]\psi_2-(\gamma-\beta)\psi_4\sin\beta\pi$
$+[(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)\pi-(-\beta)\sin\beta'\pi]\psi_7$
$+(\alpha-\gamma)\psi_9\sin(\gamma-\alpha)\pi=0,$

(2, 4, 7, 10) $\psi_2-\psi_4+(\beta+\beta'-\gamma)\psi_7+(-\alpha-\beta')\psi_{10}=0,$

(2, 4, 8, 9) $(\alpha)\psi_4\sin(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\pi+\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+[(\beta')\sin\beta\pi+(\alpha-\gamma)\sin(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\pi]\psi_8+(-\beta)\psi_9\sin\beta'\pi=0,$

(2, 4, 8, 10) $\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(\alpha)\psi_4\sin(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\pi$
$+(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_8\sin(\gamma-\alpha)\pi+(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

(2, 4, 9, 10) $\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi-(\alpha)\psi_4\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_9\sin(\gamma-\alpha)\pi$
$+[(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\sin\beta'\pi-(\beta)\sin(\gamma-\alpha)\pi]\psi_{10}=0,$

(2, 5, 6, 8) $\psi_2\sin(\beta'-\alpha)\pi-(\alpha)\psi_5\sin\beta'\pi+\psi_6\sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi$
$+(\beta')\psi_8\sin(\gamma-\alpha)\pi=0,$

(2, 5, 6, 9) $\psi_2\sin(\beta'-\gamma)\pi+(\alpha)\psi_5\sin(\gamma-\alpha-\beta')\pi-\psi_6\sin\beta\pi$
$+(\alpha+\beta'-\gamma)\psi_9\sin(\gamma-\alpha)\pi=0,$

(2, 5, 6, 10) $\psi_2-\psi_5+(\beta+\beta'-\gamma)\psi_6-(\beta'-\alpha)\psi_{10}=0,$

(2, 5, 7) $\psi_2-\psi_5+(\beta+\beta'-\gamma)\psi_7=0,$

(2, 5, 8, 9) $\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(\alpha)\psi_5\sin(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\pi$
$+(\beta')\psi_8\sin\beta\pi+(\alpha+\beta'-\gamma)\psi_9\sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi=0,$

(2, 5, 8, 10) $\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(\alpha)\psi_5\sin(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\pi$
$+(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_8\sin(\gamma-\alpha)\pi+\psi_{10}\sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi=0,$

(2, 5, 9, 10) $\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(\alpha)\psi_5\sin(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\pi$
$+(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_9\sin(\gamma-\alpha)\pi-(\gamma-\alpha)\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

(2, 6, 7, 8) $\psi_2\sin\alpha\pi+(-\beta')\psi_6\sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi+(\alpha+\beta-\gamma)\psi_7\sin\beta'\pi$
$+\psi_8\sin(\alpha-\gamma)\pi=0,$

(2, 6, 7, 9) $\psi_2\sin\alpha\pi+(\gamma-\alpha-\beta')\psi_6\sin\beta\pi+(\beta)\psi_7\sin(\alpha+\beta'-\gamma)\pi$
$+\psi_9\sin(\alpha-\gamma)\pi=0,$

(2, 6, 8, 9) $\psi_2\sin\alpha\pi+\psi_6\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi+(\beta')\psi_8\sin(\alpha+\beta'-\gamma)\pi$
$-(\alpha+\beta'-\gamma)\psi_9\sin\beta'\pi=0,$

(2, 6, 8, 10) $\psi_2\sin\alpha\pi+\psi_6\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi+\psi_8\sin(\alpha-\gamma)\pi-\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

$(2,3,4,8)$ $(-\alpha)\psi_2 + (\gamma-\alpha)\psi_3 - (\alpha)\psi_4 - (\alpha-\gamma)\psi_8 = 0,$

$(2,3,4,9)$ $[(\beta+\beta'-\alpha)\sin\beta\pi - (-\beta')\sin\alpha\pi]\psi_2 + [(2\beta+\beta')\sin(\gamma-\alpha)\pi - (\gamma-\alpha)\sin\beta'\pi]\psi_3 - (\alpha+\beta+\beta')\psi_4\sin\beta\pi + (\alpha-\gamma)\psi_9\sin\beta'\pi = 0,$

$(2,3,4,10)$ $\psi_2\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi + (\beta+\beta')\psi_3\sin(\gamma-\alpha)\pi - (\alpha)\psi_4\sin(\beta+\beta')\pi + (-\beta-\beta')\psi_{10}\sin\beta'\pi = 0,$

$(2,3,5,6)$ $\psi_2\sin(\beta'-\alpha)\pi + (\beta')\psi_3\sin(\gamma-\alpha)\pi - (\alpha)\psi_5\sin\beta'\pi - (\alpha-\gamma)\psi_6\sin\beta\pi = 0,$

$(2,3,5,8)$ $\psi_2\sin(\beta'-\alpha)\pi + (\beta+\beta')\psi_3\sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi - (\alpha)\psi_5\sin\beta'\pi + (\beta+\beta'+\alpha-\gamma)\psi_8\sin\beta\pi = 0,$

$(2,3,5,9)$ $(-\alpha)\psi_2 + (\gamma-\alpha)\psi_3 - (\alpha)\psi_5 - (\alpha-\gamma)\psi_9 = 0,$

$(2,3,5,10)$ $\psi_2\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi + (\beta+\beta')\psi_3\sin(\gamma-\alpha)\pi - (\alpha)\psi_5\sin(\beta+\beta')\pi - \psi_{10}\sin\beta\pi = 0,$

$(2,3,6,7)$ $\psi_2\sin\alpha\pi + \psi_3\sin(\alpha-\gamma)\pi + (\alpha-\beta'-\gamma)\psi_6\sin\beta\pi + (\alpha+\beta-\gamma)\psi_7\sin\beta'\pi = 0,$

$(2,3,6,9)$ $\psi_2\sin\alpha\pi + (\beta')\psi_3\sin(\alpha+\beta'-\gamma) + (\alpha+\beta'-\gamma)\psi_6\sin\beta\pi - (\alpha+\beta'-\gamma)\psi_9\sin\beta'\pi = 0,$

$(2,3,6,10)$ $\psi_2\sin\alpha\pi + \psi_3\sin(\alpha-\gamma)\pi + (\alpha-\gamma)\psi_6\sin(\beta+\beta')\pi - \psi_{10}\sin\beta'\pi = 0,$

$(2,3,7,8)$ $\psi_2\sin\alpha\pi + (\beta)\psi_3\sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi + (\alpha+\beta-\gamma)\psi_7\sin\beta'\pi - (\alpha+\beta-\gamma)\psi_8\sin\beta\pi = 0,$

$(2,3,7,9)$ $2i\psi_2\sin\alpha\pi - (\gamma-\alpha)\psi_3 + (\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_7 + (\alpha-\gamma)\psi_9 = 0,$

$(2,3,7,10)$ $\psi_2\sin\alpha\pi + \psi_3\sin(\alpha-\gamma)\pi + (\alpha-\gamma)\psi_7\sin(\beta+\beta')\pi + (-\beta-\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi = 0,$

$(2,3,8,9)$ $\psi_2\sin\alpha\pi + (\beta+\beta')\psi_3\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\alpha+\beta+2\beta'-\gamma)\psi_8\sin\beta\pi - (\alpha+\beta'-\gamma)\psi_9\sin\beta'\pi = 0,$

$(2,3,8,10)$ $\psi_2\sin\alpha\pi + (\beta+\beta')\psi_3\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_8\sin(\beta+\beta')\pi - \psi_{10}\sin\beta'\pi = 0,$

$(2,3,9,10)$ $\psi_2\sin\alpha\pi + (\beta+\beta')\psi_3\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_9\sin(\beta+\beta')\pi + (\beta+\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi = 0,$

$(2,4,5,6)$ $(-\beta')\psi_2 - (\beta')\psi_4 + 2i\psi_5\sin\beta'\pi + (\beta-\gamma)\psi_6 = 0,$

$(2,4,5,8)$ $\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\alpha+\beta')\psi_4\sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi - (\gamma-\beta)\psi_5\sin\beta'\pi + (\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_8\sin(\gamma-\alpha)\pi = 0,$

$(2,4,5,9)$ $\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\gamma+\beta')\psi_4\sin\beta\pi + [(\alpha+\beta+\beta')\sin(\gamma-\alpha)\pi - (\gamma-\beta)\sin\beta'\pi]\psi_5 + (\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_9\sin(\gamma-\alpha)\pi = 0,$

$(2,4,6,7)$ $\psi_2 - \psi_4 + (\beta-\beta'-\gamma)\psi_6 + 2i(\beta-\gamma)\psi_7\sin\beta'\pi = 0,$

(4, 6, 8, 9) $\psi_4 \sin\alpha\pi + (-\alpha)\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+[(-\gamma)\sin\alpha\pi+(\beta'-\alpha)\sin(\beta'-\gamma)\pi]\psi_8-(\beta'-\alpha-\gamma)\psi_9\sin\beta'\pi=0,$

(4, 6, 8, 10) $(\alpha)\psi_4 \sin\alpha\pi + \psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+(\alpha)\psi_8\sin(\alpha-\gamma)\pi-(-\alpha)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

(4, 6, 9, 10) $(\alpha)\psi_4 \sin\alpha\pi + \psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\alpha)\psi_9\sin(\alpha-\gamma)\pi$
$+(-\alpha)[(\gamma-\beta')\sin(\gamma-\alpha)\pi-(-\alpha)\sin\beta'\pi]\psi_{10}=0,$

(4, 7, 8, 9) $(\alpha)\psi_4 \sin\alpha\pi + \psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+[(\alpha-\gamma)\sin\alpha\pi-(\gamma-\beta)\sin\beta\pi]\psi_8+(-\beta)\psi_9\sin(\beta-\gamma)\pi=0,$

(4, 7, 8, 10) $(\alpha)\psi_4 \sin\alpha\pi + \psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+(\alpha)\psi_8\sin(\alpha-\gamma)\pi+(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10}\sin(\beta-\gamma)\pi=0,$

(4, 7, 9, 10) $(\alpha)\psi_4 \sin\alpha\pi + \psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\alpha)\psi_9\sin(\alpha-\gamma)\pi$
$+[(2\gamma-\alpha-\beta-\beta')\sin\beta\pi-(-\beta')\sin\alpha\pi]\psi_{10}=0,$

(5, 6, 7, 8) $\psi_5 \sin\alpha\pi + (-\beta')\psi_6 \sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi$
$+(\beta-\gamma)\psi_7\sin(\beta'-\alpha)\pi+\psi_8\sin(\alpha-\gamma)\pi=0,$

(5, 6, 7, 9) $\psi_5 \sin\alpha\pi + (\gamma-\alpha-\beta')\psi_6 \sin\beta\pi$
$+(\beta-\alpha)\psi_7\sin(\beta'-\gamma)\pi+\psi_9\sin(\alpha-\gamma)\pi=0,$

(5, 6, 8, 9) $\psi_5 \sin\alpha\pi + (-\alpha)\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+(\beta'-\alpha)\psi_8\sin(\beta'-\gamma)\pi+(\beta'-\gamma)\psi_9\sin(\alpha-\beta')\pi=0,$

(5, 6, 8, 10) $(\alpha)\psi_5 \sin\alpha\pi + \psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+(\alpha)\psi_8\sin(\alpha-\gamma)\pi+\psi_{10}\sin(\alpha-\beta')\pi=0,$

(5, 6, 9, 10) $(\alpha)\psi_5 \sin\alpha\pi + \psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+(\alpha)\psi_9\sin(\alpha-\gamma)\pi+(\gamma-\alpha)\psi_{10}\sin(\gamma-\beta')\pi=0,$

(5, 7, 8, 9) $(\alpha)\psi_5 \sin\alpha\pi + \psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-(\gamma-\beta)\psi_8\sin\beta\pi+(\alpha-\beta)\psi_9\sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi=0,$

(5, 7, 8, 10) $(\alpha)\psi_5 \sin\alpha\pi + \psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+(\alpha)\psi_8\sin(\alpha-\gamma)\pi+(\gamma-\beta-\beta')\psi_{10}\sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi=0,$

(5, 7, 9, 10) $(\alpha)\psi_5 \sin\alpha\pi + \psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+(\alpha)\psi_9\sin(\alpha-\gamma)\pi+(2\gamma-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

(6, 7, 8, 9) $(\beta-\beta')\psi_6-(\beta-\beta')\psi_7+\psi_8-\psi_9=0,$

(6, 7, 10) $\psi_6-\psi_7-(\gamma-\alpha-\beta)\psi_{10}=0,$

(8, 9, 10) $\psi_8-\psi_9+(\gamma-\alpha-\beta')\psi_{10}=0.$

Tableau II (*voir* page 68).

(1, 2, 3), (1, 2, 4, 5), (1, 2, 4, 6), (1, 2, 4, 7) (*voir* le Tableau I).

(1, 2, 4, 9) $\psi_1\sin(\gamma-\alpha-\beta')\pi+(-\beta)\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-(\gamma-\beta-\beta')\psi_4\sin\beta\pi+\psi_9\sin\beta'\pi=0,$

(1, 2, 4, 10), (1, 2, 5, 6), (1, 2, 5, 8) (*voir* le Tableau I).

(1, 2, 5, 9) $$(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_1 + 2i\psi_2 \sin(\gamma-\beta-\beta')\pi - (\gamma-\beta-\beta')\psi_5 - (\beta+\beta')\psi_9 = 0,$$

(1, 2, 5, 10), (1, 2, 6, 7), (1, 2, 6, 8) (*voir* le Tableau I),

(1, 2, 6, 9) $$[(-\beta)\sin(\gamma-\alpha)\pi - (\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\sin\beta'\pi]\,\psi_1 + [(\beta+\beta'-\gamma)\sin\beta'\pi - (-\beta)\sin\gamma\pi]\,\psi_2 - (-\beta-\beta')\psi_6\sin\beta\pi + (\beta+\beta')\psi_7\sin\beta'\pi = 0,$$

(1, 2, 6, 10), (1, 2, 7, 8) (*voir* le Tableau I),

(1, 2, 7, 9) $$\psi_1 - (-\alpha)\psi_2 - (\gamma-\alpha-\beta-\beta')\psi_7 - (\gamma-\alpha)\psi_9 = 0,$$

(1, 2, 7, 10) (*voir* le Tableau I),

(1, 2, 8, 9) $$\psi_1\sin(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\pi + \psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (-\beta')\psi_8\sin\beta\pi + (\beta)\psi_9\sin\beta'\pi = 0,$$

(1, 2, 8, 10) (*voir* le Tableau I),

(1, 2, 9, 10) $$\psi_1\sin(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\pi + \psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + \psi_9\sin(\beta+\beta')\pi - (\gamma-\alpha-2\beta-2\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi = 0,$$

(1, 3, 4, 5), (1, 3, 4, 6), (1, 3, 4, 7) (*voir* le Tableau I),

(1, 3, 4, 9) $$\psi_1\sin(\beta-\alpha)\pi - (\beta')\psi_3\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - \psi_4\sin\beta\pi + (\beta+\beta'-\gamma)\psi_9\sin\beta'\pi = 0,$$

(1, 3, 4, 10), (1, 3, 5, 6), (1, 3, 5, 7), (1, 3, 5, 8) (*voir* le Tableau I),

(1, 3, 5, 9) $$\psi_1 + 2i(\beta+\beta'-\alpha)\psi_3\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (-\alpha)\psi_5 - (2\beta+2\beta'-\alpha-\gamma)\psi_9 = 0,$$

(1, 3, 5, 10), (1, 3, 6, 7) (*voir* le Tableau I),

(1, 3, 6, 9) $$(-\beta)\psi_1\sin\alpha\pi + [(\beta')\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (-\gamma)\sin\beta\pi]\psi_3 + (-\gamma-\beta-\beta')\psi_6\sin\beta\pi - (\beta+\beta'-\gamma)\psi_9\sin\beta'\pi = 0,$$

(1, 3, 6, 10), (1, 3, 7, 8), (1, 3, 7, 10) (*voir* le Tableau I),

(1, 3, 8, 9) $$(\gamma-\beta-\beta')\psi_1\sin\alpha\pi + (\gamma)\psi_3\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (-\beta')\psi_8\sin\beta\pi - (\beta)\psi_9\sin\beta'\pi = 0,$$

(1, 3, 8, 10) (*voir* le Tableau I),

(1, 3, 9, 10) $$\psi_1\sin\alpha\pi + (\beta+\beta')\psi_3\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\beta+\beta'-\gamma)\psi_9\sin(\beta+\beta')\pi + (-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi = 0,$$

(1, 4, 5, 6), (1, 4, 5, 7) (*voir* le Tableau I),

(1, 4, 5, 9) $$(\beta)\psi_1 - 2i(\alpha)\psi_4\sin\beta\pi - (\alpha-\beta)\psi_5 - (\alpha+\beta-\gamma)\psi_9 = 0,$$

(1, 4, 6, 7) (*voir* le Tableau I),

(1, 4, 6, 9) $$[(\beta-\alpha)\sin\beta'\pi - (\gamma-\beta-\beta')\sin(\gamma-\alpha)\pi]\psi_1 + [(-\beta')\sin\beta\pi - (\gamma)\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi]\psi_4 + (-\beta-\beta')\psi_6\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\beta-\gamma)\psi_9\sin\beta'\pi = 0,$$

(1, 4, 6, 10) (*voir* le Tableau I),

(1, 4, 7, 9) $\psi_1 \sin(\beta-\alpha)\pi - \psi_4 \sin\beta\pi$
$+(-\beta)\psi_7 \sin(\gamma-\beta-\beta')\pi + \psi_9 \sin(\gamma-\beta)\pi = 0,$

(1, 4, 7, 10), (1, 4, 8) (*voir* le Tableau I),

(1, 4, 9, 10) $\psi_1-(\alpha)\psi_4-(\beta-\gamma)\psi_9+(-2\beta-\beta')\psi_{10}=0,$

(1, 5, 6, 7), (1, 5, 6, 8) (*voir* le Tableau I),

(1, 5, 6, 9) $[(\gamma+\beta'-\alpha)\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi-(\alpha)\sin\beta\pi]\psi_1$
$-[(\gamma+\beta')\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi-\sin\beta\pi]\psi_5$
$-2i\psi_6\sin\beta\pi\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi-(\beta+\beta')\psi_9\sin(\beta'-\gamma)\pi=0,$

(1, 5, 6, 10), (1, 5, 7, 8) (*voir* le Tableau I),

(1, 5, 7, 9) $\psi_1-(-\alpha)\psi_5+2i(-\alpha)\psi_7\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi-(\gamma-\alpha)\psi_9=0,$

(1, 5, 7, 10) (*voir* le Tableau I),

(1, 5, 8, 9) $(-\beta)\psi_1-(\alpha-\beta)\psi_5+2i(\alpha-\gamma)\psi_8\sin\beta\pi-(\alpha+\beta-\gamma)\psi_9=0,$

(1, 5, 8, 10) (*voir* le Tableau I),

(1, 5, 9, 10) $\psi_1-(\alpha)\psi_5-(\alpha-\gamma)\psi_9-2i(-\beta-\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

(1, 6, 7, 8) (*voir* le Tableau I),

(1, 6, 7, 9) $\psi_1\sin\alpha\pi+(-\beta'-\gamma)\psi_6\sin\beta\pi$
$+[(\beta-\gamma)\sin\beta'\pi-(-\beta-\beta')\sin\gamma\pi]\psi_7-\psi_9\sin\gamma\pi=0,$

(1, 6, 8, 9) $(\gamma-\beta-\beta')\psi_1\sin\alpha\pi+(\gamma-\beta-\beta')\psi_6\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+[(\gamma)\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi-(-\beta')\sin\beta\pi]\psi_8-(\beta)\psi_9\sin\beta'\pi=0,$

(1, 6, 8, 10) (*voir* le Tableau I),

(1, 6, 9, 10) $\psi_1\sin\alpha\pi+\psi_6\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi-\psi_9\sin\gamma\pi$
$-(\gamma-\alpha-\beta-\beta')[(\beta+\beta'-\gamma)\sin\beta'\pi-(-\beta)\sin\gamma\pi]\psi_{10}=0,$

(1, 7, 8, 9) $\psi_1\sin\alpha\pi+\psi_7\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi-(\beta-\gamma)\psi_8\sin\beta\pi+(\beta)\psi_9\sin(\beta-\gamma)\pi=0,$

(1, 7, 8, 10) (*voir* le Tableau I),

(1, 7, 9, 10) $\psi_1\sin\alpha\pi+\psi_7\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi-\psi_9\sin\gamma\pi+(-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

(2, 3, 4, 5), (2, 3, 4, 6), (2, 3, 4, 7), (2, 3, 4, 8) (*voir* le Tableau I),

(2, 3, 4, 9) $\psi_2\sin(\beta-\alpha)\pi+(\beta+\beta')\psi_3\sin(\gamma-\alpha-\beta')$
$+(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_9\sin\beta'\pi-(\alpha)\psi_4\sin\beta\pi=0,$

(2, 3, 4, 10), (2, 3, 5, 6), (2, 3, 5, 8) (*voir* le Tableau I),

(2, 3, 5, 9) $\psi_2+(2\beta+2\beta'-\gamma)\psi_3-\psi_5-(2\beta+2\beta'-\gamma)\psi_9=0.$

(2, 3, 5, 10), (2, 3, 6, 7) (*voir* le Tableau I),

(2, 3, 6, 9) $(-\beta)\psi_2\sin\alpha\pi+[(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\sin\beta'\pi-(-\beta)\sin(\gamma-\alpha)\pi]\psi_3$
$+(\alpha-\beta-\beta'-\gamma)\psi_6\sin\beta\pi-(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_9\sin\beta'\pi=0,$

(2, 3, 6, 10), (2, 3, 7, 8), (2, 3, 7, 10) (*voir* le Tableau I),

(2, 3, 8, 9) $\psi_2\sin\alpha\pi+(\beta+\beta')\psi_3\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-(\alpha+\beta-\gamma)\psi_8\sin\beta\pi-(\alpha+2\beta+\beta'-\gamma)\psi_9\sin\beta'\pi=0,$

voir le Tableau I),

$$\psi_2 \sin \alpha\pi + (\beta+\beta')\psi_3 \sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$$
$$-(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_9 \sin(\beta+\beta')\pi + (-\beta-\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi = 0,$$

(2, 4, 5, 8) (*voir* le Tableau I),

$$\gamma \quad \alpha-\beta')\psi_2 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\alpha)\psi_4 \sin\beta\pi$$
$$+(\gamma-\beta-\beta')\psi_5 \sin(\gamma-\alpha-\beta')\pi + (\beta)\psi_9 \sin(\gamma-\alpha)\pi = 0,$$

(2, 4, 6, 8) (*voir* le Tableau I),

$$(\quad \beta)[(\beta-\alpha)\sin\beta\pi - (\gamma-\beta-\beta')\sin(\gamma-\alpha)\pi]\psi_2$$
$$-(\gamma-\beta-\beta')[(\beta+\beta'+\alpha-\gamma)\sin\beta'\pi - (-\beta)\sin(\gamma-\alpha)\pi]\psi_4$$
$$+(-\beta-\beta')\psi_6 \sin(\alpha+\beta'-\gamma)\pi + 2i\psi_9 \sin\beta'\pi\sin(\gamma-\alpha)\pi = 0,$$

10), (2, 4, 7, 8) (*voir* le Tableau I),

7, 9) $\psi_2 \sin(\beta-\alpha)\pi - (\alpha)\psi_4 \sin\beta\pi$
$$+\psi_7 \sin(\gamma-\alpha-\beta')\pi + (\beta)\psi_9 \sin(\gamma-\alpha)\pi = 0,$$

4, 7, 10) (*voir* le Tableau I),

4, 8, 9) $\psi_2 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\alpha)\psi_4 \sin(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\pi$
$$+(\alpha+\beta-\gamma)\psi_8 \sin(\gamma-\alpha-\beta')\pi + (\beta)\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$$

2, 4, 8, 10) (*voir* le Tableau I),

2, 4, 9, 10) $\psi_2 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\alpha)\psi_4 \sin(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\pi$
$$+(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_9 \sin(\gamma-\alpha)\pi + (-\beta-\beta')\psi_{10}\sin(\alpha+\beta'-\gamma)\pi = 0,$$

2, 5, 6, 8) (*voir* le Tableau I),

(2, 5, 6, 9) $[(\beta)\sin(\beta'-\alpha)\pi - (\gamma-\beta-\beta')\sin(\gamma-\alpha)\pi]\psi_2$
$$-[(\alpha+\beta)\sin\beta'\pi + (\gamma-\beta-\beta')\sin(\alpha-\gamma)\pi]\psi_5$$
$$-(\alpha+\beta-\gamma)\psi_6 \sin\beta\pi - (\beta+\beta')\psi_9 \sin(\alpha-\gamma)\pi = 0,$$

(2, 5, 6, 10), (2, 5, 7) (*voir* le Tableau I),

(2, 5, 8, 9) $(\gamma-\alpha)\psi_2 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\gamma)\psi_5 \sin(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\pi$
$$+(\alpha+2\beta+\beta'-\gamma)\psi_8 \sin\beta\pi + (+2\beta+\beta')\psi_9 \sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi = 0,$$

(2, 5, 8, 10) (*voir* le Tableau I),

(2, 5, 9, 10) $(\gamma-\alpha)\psi_2 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\gamma)\psi_5 \sin(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\pi$
$$+(\beta+\beta')\psi_9 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_{10}\sin\beta\pi = 0,$$

(2, 6, 7, 8) (*voir* le Tableau I),

(2, 6, 7, 9) $\psi_2 \sin\alpha\pi + [(\alpha+\beta-\gamma)\sin\beta'\pi + (-\beta-\beta')\sin(\alpha-\gamma)\pi]\psi_7$
$$+(\alpha-\beta'-\gamma)\psi_6 \sin\beta\pi + \psi_9 \sin(\alpha-\gamma)\pi = 0,$$

(2, 6, 8, 9) $\psi_2 \sin\alpha\pi + \psi_6 \sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$$+[(\beta+\beta')\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\alpha+\beta-\gamma)\sin\beta\pi]\psi_8$$
$$-(\alpha+2\beta+\beta'-\gamma)\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$$

(2, 6, 8, 10) (*voir* le Tableau I),

$(2, 6, 9, 10)$ $\psi_2 \sin\alpha\pi + \psi_6 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\pi - \psi_9 \sin(\gamma - \alpha)\pi$
$- [\sin\beta'\pi - (\gamma - \alpha - 2\beta - \beta')\sin(\gamma - \alpha)\pi]\psi_{10} = 0,$

$(2, 7, 8, 9)$ $\psi_2 \sin\alpha\pi + \psi_7 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\pi$
$- (\alpha + \beta - \gamma)\psi_8 \sin\beta\pi + (\beta)\psi_9 \sin(\alpha + \beta - \gamma)\pi = 0,$

$(2, 7, 8, 10)$ (*voir* le Tableau I),

$(2, 7, 9, 10)$ $\psi_2 \sin\alpha\pi + \psi_7 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\pi$
$+ \psi_9 \sin(\alpha - \gamma)\pi + (-\beta - \beta')\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$

$(3, 4, 5, 6)$, $(3, 4, 5, 7)$, $(3, 4, 5, 8)$ (*voir* le Tableau I),

$(3, 4, 5, 9)$ $\psi_3 \sin(\gamma - \beta - \beta')\pi - (2\alpha - 2\beta - \beta')\psi_4 \sin\beta\pi$
$+ (\alpha - 2\beta - \beta')\psi_5 \sin(\beta - \alpha)\pi + (\alpha - \gamma)\psi_9 \sin(\beta + \beta' - \alpha)\pi = 0,$

$(3, 4, 6, 7)$ (*voir* le Tableau I),

$(3, 4, 6, 9)$ $[(\alpha - \gamma)\sin(\alpha - \beta)\pi + (\beta')\sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi]\psi_3$
$+ (\alpha - \beta)\psi_4 \sin\alpha\pi + (\alpha - \beta - \beta' - \gamma)\psi_6 \sin(\beta - \alpha)\pi$
$- (\beta + \beta' - \gamma)\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$

$(3, 4, 6, 10)$, $(3, 4, 7, 8)$, $(3, 4, 7, 10)$ (*voir* le Tableau I),

$(3, 4, 8, 9)$ $\psi_3 \sin(\gamma - \beta - \beta')\pi - (\alpha - \beta - \beta')\psi_4 \sin\alpha\pi$
$+ (\alpha - \beta' - \gamma)\psi_8 \sin(\beta - \alpha)\pi + (\beta - \gamma)\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$

$(3, 4, 8, 10)$ (*voir* le Tableau I),

$(3, 4, 9, 10)$ $\psi_3 \sin(\gamma - \beta - \beta')\pi - (\alpha - \beta - \beta')\psi_4 \sin\alpha\pi$
$+ (\alpha - \gamma)\psi_9 \sin(\beta + \beta' - \alpha)\pi + (-2\beta - 2\beta')\psi_{10} \sin(\alpha - \beta)\pi = 0,$

$(3, 5, 6, 7)$ (*voir* le Tableau I),

$(3, 5, 6, 9)$ $[(2\beta + 2\beta' - \alpha - \gamma)\sin(\alpha - \beta')\pi + (\beta' - \alpha)\sin(\gamma - \alpha)\pi]\psi_3$
$-(\beta' - \alpha)\psi_5 \sin\alpha\pi - (-\gamma)\psi_6 \sin\beta\pi$
$+ (2\beta + 2\beta' - \gamma - \alpha)\psi_9 \sin(\beta' - \alpha)\pi = 0,$

$(3, 5, 6, 10)$, $(3, 5, 7, 8)$, $(3, 5, 7, 10)$ (*voir* le Tableau I),

$(3, 5, 8, 9)$ $\psi_3 \sin(\gamma - \beta - \beta')\pi - (\alpha - \beta - \beta')\psi_5 \sin\alpha\pi$
$+ (2\alpha - \beta' - \gamma)\psi_8 \sin\beta\pi + (\alpha + \beta - \gamma)\psi_9 \sin(\beta' - \alpha)\pi = 0,$

$(3, 5, 8, 10)$ (*voir* le Tableau I),

$(3, 5, 9, 10)$ $\psi_3 \sin(\gamma - \beta - \beta')\pi - (\alpha - \beta - \beta')\psi_5 \sin\alpha\pi$
$+ (\alpha - \gamma)\psi_9 \sin(\beta + \beta' - \alpha)\pi - (\alpha - 2\beta - 2\beta')\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$

$(3, 6, 9, 10)$ $(\beta + \beta')\psi_3 - \psi_6 - (\beta + \beta')\psi_9 + (\gamma - \alpha - \beta)\psi_{10} = 0,$

$(3, 7, 8, 10)$ (*voir* le Tableau I),

$(3, 7, 9)$ $\psi_3 - (-\beta - \beta')\psi_7 - \psi_9 = 0,$

$(4, 5, 6, 7)$, $(4, 5, 6, 8)$ (*voir* le Tableau I),

$(4, 5, 6, 9)$ $[(\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\sin(\beta' - \alpha)\pi - (\alpha - \beta)\sin(\gamma - \alpha)\pi]\psi_4$
$- [(\beta + \beta' - \gamma)\sin\beta'\pi + (\alpha - \beta)\sin(\alpha - \gamma)\pi]\psi_5$
$- (\beta - \gamma)\psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - (\alpha + \beta - \gamma)\psi_9 \sin(\alpha - \gamma)\pi = 0,$

(4, 5, 7, 8) (*voir* le Tableau I),

(4, 5, 7, 9) $(\alpha)\psi_4 \sin\beta\pi + \psi_5 \sin(\alpha-\beta)\pi + (\beta-\alpha)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\beta)\psi_9 \sin(\alpha-\gamma)\pi = 0,$

(4, 5, 8, 9) $\psi_4 - \psi_5 + (2\beta-\gamma)(\psi_8 - \psi_9) = 0,$

(4, 5, 10) (*voir* le Tableau I),

(4, 6, 7, 8) (*voir* le Tableau I),

(4, 6, 7, 9) $(\beta)\psi_4 \sin\alpha\pi + [(-\beta')\sin(\alpha-\gamma)\pi + (2\beta-\gamma-\alpha)\sin\beta'\pi]\psi_7 - (\beta-\beta'-\gamma)\psi_6 \sin(\alpha-\beta)\pi + (\beta)\psi_9 \sin(\alpha-\gamma)\pi = 0,$

(4, 6, 8, 9) $(\alpha-\beta-\beta')\psi_4 \sin\alpha\pi + [\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\alpha-\beta'-\gamma)\sin(\alpha-\beta)\pi]\psi_8 + (-\beta-\beta')\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\beta-\gamma)\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$

(4, 6, 8, 10) (*voir* le Tableau I),

(4, 6, 9, 10) $\psi_4 \sin\alpha\pi + (-\alpha)\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + \psi_9 \sin(\alpha-\gamma)\pi - [(-2\alpha)\sin\beta'\pi + (\gamma-\alpha-2\beta-\beta')\sin(\alpha-\gamma)\pi]\psi_{10} = 0,$

(4, 7, 8, 9) $(\alpha)\psi_4 \sin\alpha\pi + \psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\alpha+\beta-\gamma)\psi_8 \sin(\alpha-\beta)\pi + (\beta)\psi_9 \sin(\beta-\gamma)\pi = 0,$

(4, 7, 8, 10) (*voir* le Tableau I),

(4, 7, 9, 10) $(\alpha)\psi_4 \sin\alpha\pi + \psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\alpha)\psi_9 \sin(\alpha-\gamma)\pi + (-\beta-\beta')\psi_{10} \sin(\beta-\alpha)\pi = 0,$

(5, 6, 7, 8) (*voir* le Tableau I),

(5, 6, 7, 9) $\psi_5 \sin\alpha\pi + (\alpha-\beta'-\gamma)\psi_6 \sin\beta\pi + [(\beta-\gamma)\sin(\beta'-\alpha)\pi - (-\beta-\beta')\sin(\gamma-\alpha)\pi]\psi_7 + \psi_9 \sin(\alpha-\gamma)\pi = 0,$

(5, 6, 8, 9) $\psi_5 \sin\alpha\pi + (-\alpha)\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + [(2\beta+\beta'-\gamma)\sin(\beta'-\alpha)\pi - \sin(\gamma-\alpha)\pi]\psi_8 + (2\beta+\beta'-\gamma)\psi_9 \sin(\alpha-\beta')\pi = 0,$

(5, 6, 8, 10) (*voir* le Tableau I),

(5, 6, 9, 10) $\psi_5 \sin\alpha\pi + (-\alpha)\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + \psi_9 \sin(\alpha-\gamma)\pi + [(\gamma-\alpha-2\beta-\beta')\sin(\gamma-\alpha)\pi + (-\alpha)\sin(\alpha-\beta')\pi]\psi_{10} = 0,$

(5, 7, 8, 9) $\psi_5 \sin\alpha\pi + (-\alpha)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\alpha+\beta-\gamma)\psi_8 \sin\beta\pi + (\beta)\psi_9 \sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi = 0,$

(5, 7, 8, 10) (*voir* le Tableau I).

(5, 7, 9, 10) $\psi_5 \sin\alpha\pi + (-\alpha)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + \psi_9 \sin(\alpha-\gamma)\pi + (-\beta-\beta')\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$

(6, 7, 8, 9) $\psi_6 - \psi_7 + (\beta+\beta')\psi_8 - (\beta+\beta')\psi_9 = 0,$

(6, 7, 10) (*voir* le Tableau I), (8, 9, 10) $\psi_8 - \psi_9 + (\gamma-\alpha-2\beta-\beta')\psi_{10} = 0.$

Tableaux III et IV (*voir* p. 69, 70).

Les formules correspondantes se déduisent respectivement des formules des Tableaux I et II par la règle suivante : 1° On permutera β et β'; 2° ψ_1, ψ_2, ψ_3 restent inaltérés; 3° on permutera ψ_4 avec ψ_5, ψ_6 avec ψ_7, ψ_8 avec ψ_9 4° ψ_{10} se change en $-(\beta+\beta')\psi_{10}$.

Exemples :

(1, 2, 3) même formule qu'au Tableau I.

(1, 2, 4, 5) $$(\beta+\beta')\psi_1\sin(\gamma-\alpha)\pi+\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi \\ -(\gamma-\beta')\psi_4\sin\beta\pi-(\gamma+\beta)\psi_5\sin\beta'\pi=0,$$

(1, 2, 4, 10) $$(\beta+\beta')\psi_1\sin(\gamma-\alpha)\pi+\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi \\ -(\gamma)\psi_4\sin(\beta+\beta')\pi+(\gamma-\alpha+\beta+\beta')\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$$

....

(Ces formules se rapportent au Tableau III).

Tableau V (*voir* p. 71).

(1, 2, 3, 4) $(\beta)\psi_1-(\alpha-\beta)\psi_2-(\alpha+\beta-\gamma)\psi_3-2i(\alpha)\psi_4\sin\beta\pi=0,$

(1, 2, 3, 5) $(-\beta')\psi_1-(\beta'-\alpha)\psi_2-(\gamma-\alpha-\beta')\psi_3+2i(-\alpha)\psi_5\sin\beta'\pi=0,$

(1, 2, 3, 6) $\psi_1-(\alpha)\psi_2-(\alpha-\gamma)\psi_3-2i(\alpha-\beta'-\gamma)\psi_6\sin\beta\pi=0,$

(1, 2, 3, 7) $\psi_1-(-\alpha)\psi_2-(\gamma-\alpha)\psi_3+2i(\beta+\gamma-\alpha)\psi_7\sin\beta'\pi=0,$

(1, 2, 3, 8) $(-\beta)\psi_1-(\alpha-\beta)\psi_2-(\alpha+\beta-\gamma)\psi_3+2i(\alpha-\gamma)\psi_8\sin\beta\pi=0,$

(1, 2, 3, 9) $(\beta')\psi_1-(\beta'-\alpha)\psi_2-(\gamma-\alpha-\beta')\psi_3-2i(\gamma-\alpha)\psi_9\sin\beta'\pi=0,$

(1, 2, 3, 10) $$[(\alpha+\beta')\sin\beta\pi+(\beta-\alpha)\sin\beta'\pi]\psi_1-\psi_2\sin(\beta+\beta') \\ +[(\gamma-\beta')\sin\beta+(\beta-\gamma)\sin\beta']\psi_3 \\ -2i(-\alpha-\beta')\psi_{10}\sin\beta\sin\beta'=0,$$

(1, 2, 4, 5) $$(\beta-\beta')\psi_1\sin(\gamma-\alpha)\pi+\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi-(\gamma-\beta')\psi_4\sin\beta\pi \\ -(\beta-\gamma)\psi_5\sin\beta'\pi=0,$$

(1, 2, 4, 7) $$\psi_1\sin(\gamma-\alpha)\pi+(-\beta)\psi_2\sin(\beta-\gamma)\pi-(\gamma-\beta)\psi_4\sin\beta\pi \\ -(\beta)\psi_7\sin\beta'\pi=0,$$

(1, 2, 4, 9) $$(\beta)\psi_1\sin(\gamma-\alpha-\beta')\pi+\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi \\ -(\gamma-\beta')\psi_4\sin\beta\pi+(\beta)\psi_9\sin\beta'\pi=0,$$

(1, 2, 4, 10) $$(\beta-\beta')\psi_1\sin(\gamma-\alpha)\pi+\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi \\ -[(\beta-\beta')\sin\gamma\pi+\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi]\psi_4 \\ +(\beta-\beta'-\alpha-\gamma)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$$

(1, 2, 5, 6) $\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi + (\beta')\psi_2 \sin(\beta' - \gamma)\pi - (\beta' - \gamma)\psi_5 \sin\beta'\pi$
$- (-\beta')\psi_6 \sin\beta\pi = 0,$

(1, 2, 5, 8) $(-\beta')\psi_1 \sin(\gamma - \alpha - \beta)\pi + \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
$- (\beta - \gamma)\psi_5 \sin\beta'\pi + (-\beta')\psi_8 \sin\beta\pi = 0,$

(1, 2, 5, 10) $(\beta - \beta')\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi + \psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
$- [(\beta - \beta') \sin\gamma\pi + \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi]\psi_5$
$- (\gamma - \alpha - 2\beta')\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$

(1, 2, 6, 7) $\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi - \psi_2 \sin\gamma\pi - (-\beta')\psi_6 \sin\beta\pi - (\beta)\psi_7 \sin\beta'\pi = 0,$

(1, 2, 6, 8) $\psi_1 - (\alpha)\psi_2 - (\alpha + \beta - \beta' - \gamma)\psi_6 - (\alpha - \gamma)\psi_8 = 0,$

(1, 2, 6, 9) $\psi_1 \sin(\alpha + \beta' - \gamma)\pi + \psi_2 \sin(\gamma - \beta')\pi$
$+ (-2\beta')\psi_6 \sin\beta\pi - \psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$

(1, 2, 6, 10) $\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi - \psi_2 \sin\gamma\pi$
$- (-\gamma)[(\beta - \beta') \sin\gamma\pi + \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi]\psi_6$
$+ (-\alpha - \gamma)\psi_{10} \sin\beta'\pi = 0,$

(1, 2, 7, 8) $\psi_1 \sin(\alpha + \beta - \gamma)\pi + \psi_2 \sin(\gamma - \beta)\pi + (2\beta)\psi_7 \sin\beta'\pi - \psi_8 \sin\beta\pi = 0,$

(1, 2, 7, 9) $\psi_1 - (-\alpha)\psi_2 - (\beta - \beta' + \gamma - \alpha)\psi_7 - (\gamma - \alpha)\psi_9 = 0,$

(1, 2, 7, 10) $\psi_1 \sin(\gamma - \alpha)\pi - \psi_2 \sin\gamma\pi$
$- (\gamma)[(\beta - \beta') \sin\gamma\pi + \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi]\psi_7$
$- (\gamma - \alpha - \beta - \beta')\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$

(1, 2, 8, 9) $\psi_1 \sin(\alpha + \beta + \beta' - \gamma)\pi + \psi_2 \sin(\gamma - \beta - \beta')\pi$
$- (-\beta')\psi_8 \sin\beta\pi - (\beta)\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$

(1, 2, 8, 10) $[(\beta' - \beta) \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (\alpha - \gamma) \sin\alpha\pi]\psi_1$
$- (\alpha + \beta' - \beta)\psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
$- (\alpha - \gamma)[(\gamma - \beta) \sin\beta\pi + (\beta' - \gamma) \sin\beta'\pi]\psi_8$
$- (-\gamma)\psi_{10} \sin\beta'\pi = 0,$

(1, 2, 9, 10) $[(\beta' - \beta) \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi + (\gamma - \alpha) \sin\alpha\pi]\psi_1$
$- (\beta' - \beta - \alpha)\psi_2 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
$- (\gamma - \alpha)[(\gamma - \beta) \sin\beta\pi + (\beta' - \gamma) \sin\beta'\pi]\psi_9$
$+ (\gamma - 2\alpha - \beta - \beta')\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$

(1, 3, 4, 5) $\psi_1 \sin(\beta + \beta' - \alpha)\pi + \psi_3 \sin(\gamma - \beta - \beta')\pi$
$- (\beta')\psi_4 \sin\beta\pi - (-\beta)\psi_5 \sin\beta'\pi = 0,$

(1, 3, 4, 6) $\psi_1 - (\alpha - \gamma)\psi_3 - (\alpha)\psi_4 + (\alpha - \beta - \beta' - \gamma)\psi_6 = 0,$

(1, 3, 4, 7) $\psi_1 \sin(\alpha - \beta)\pi + \psi_3 \sin(\beta - \gamma)\pi + \psi_4 \sin\beta\pi + (\gamma)\psi_7 \sin\beta'\pi = 0,$

(1, 3, 4, 9) $\psi_1 \sin(\alpha - \beta)\pi + (-\beta')\psi_3 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
$+ \psi_4 \sin\beta\pi - (\gamma - \beta - \beta')\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$

(1, 3, 4, 10) $\psi_1 \sin(\beta + \beta' - \alpha)\pi - \psi_3 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi - \psi_4 \sin(\beta + \beta')\pi$
$+ (-\alpha - \beta - \beta')\psi_{10} \sin\beta'\pi = 0,$

(1, 3, 5, 6) $\psi_1 \sin(\alpha-\beta')\pi + \psi_3 \sin(\beta'-\gamma)\pi + \psi_5 \sin\beta'\pi + (-\gamma)\psi_6 \sin\beta\pi = 0,$

(1, 3, 5, 7) $\psi_1 - (\gamma-\alpha)\psi_3 - (-\alpha)\psi_5 + (\beta+\beta'+\gamma-\alpha)\psi_7 = 0,$

(1, 3, 5, 8) $\psi_1 \sin(\alpha-\beta')\pi + (\beta)\psi_3 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+ \psi_5 \sin\beta'\pi - (\beta+\beta'-\gamma)\psi_8 \sin\beta\pi = 0,$

(1, 3, 5, 10) $\psi_1 \sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi - \psi_3 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$- \psi_5 \sin(\beta+\beta')\pi - (-\alpha)\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$

(1, 3, 6, 7) $\psi_1 \sin\alpha\pi - \psi_3 \sin\gamma\pi + (-\beta'-\gamma)\psi_6 \sin\beta\pi + (\beta+\gamma)\psi_7 \sin\beta'\pi = 0.$

(1, 3, 6, 9) $\psi_1 \sin\alpha\pi + (-\beta')\psi_3 \sin(\beta'-\gamma)\pi + (-\beta'-\gamma)\psi_6 \sin\beta\pi$
$- (\gamma-\beta')\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$

(1, 3, 6, 10) $\psi_1 \sin\alpha\pi - \psi_3 \sin\gamma\pi + (-\gamma)\psi_6 \sin(\beta+\beta')\pi - (-\alpha)\psi_{10} \sin\beta'\pi = 0,$

(1, 3, 7, 8) $\psi_1 \sin\alpha\pi + (\beta)\psi_3 \sin(\beta-\gamma)\pi + (\beta+\gamma)\psi_7 \sin\beta'\pi$
$- (\beta-\gamma)\psi_8 \sin\beta\pi = 0,$

(1, 3, 7 10) $\psi_1 \sin\alpha\pi - \psi_3 \sin\gamma\pi + (\gamma)\psi_7 \sin(\beta+\beta')\pi$
$+ (-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$

(1, 3, 8, 9) $(\beta'-\beta)\psi_1 \sin\alpha\pi + \psi_3 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$- (\beta'-\gamma)\psi_8 \sin\beta\pi - (\gamma-\beta)\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$

(1, 3, 8, 10) $\psi_1 \sin\alpha\pi + (\beta+\beta')\psi_3 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$- (\beta+\beta'-\gamma)\psi_8 \sin(\beta+\beta')\pi - (-\alpha)\psi_{10} \sin\beta'\pi = 0,$

(1, 3, 9, 10) $\psi_1 \sin\alpha\pi + (-\beta-\beta')\psi_3 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$- (\gamma-\beta-\beta')\psi_9 \sin(\beta+\beta')\pi + (-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$

(1, 4, 5, 6) $\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi + (\beta')\psi_4 \sin(\beta'-\gamma)\pi$
$- (\beta'-\gamma)\psi_5 \sin\beta'\pi - (-\gamma)\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi = 0,$

(1, 4, 5, 7) $\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi - (\gamma-\beta)\psi_4 \sin\beta\pi + (-\beta)\psi_5 \sin(\beta-\gamma)\pi$
$- (\gamma)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi = 0,$

(1, 4, 6, 7) $\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_4 \sin\gamma\pi - (-\beta'-\gamma)\psi_6 \sin(\beta-\gamma)\pi$
$- (\beta)\psi_7 \sin\beta'\pi = 0,$

(1, 4, 6, 9) $\psi_1 \sin(\gamma-\alpha-\beta')\pi + \psi_4 \sin(\beta'-\gamma)\pi$
$- (-\beta'-\gamma)\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + \psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$

(1, 4, 6, 10) $\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_4 \sin\gamma\pi - (-\gamma)\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+ (-\alpha-\gamma)\psi_{10} \sin\beta'\pi = 0,$

(1, 4, 7, 9) $\psi_1 \sin(\alpha-\beta)\pi + \psi_4 \sin\beta\pi + (\beta)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+ \psi_9 \sin(\beta-\gamma)\pi = 0,$

(1, 4, 7, 10) $\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_4 \sin\gamma\pi - (\gamma)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+ (-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10} \sin(\gamma-\beta)\pi = 0,$

(1, 4, 8) $\psi_1 - (\alpha)\psi_4 - (\alpha-\gamma)\psi_8 = 0,$

(1, 4, 9, 10) $(\alpha)\psi_1 - \psi_4 - (\gamma)\psi_9 + (\beta'-\alpha)\psi_{10} = 0,$

(1, 5, 6, 7) $\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_5 \sin\gamma\pi - (-\beta')\psi_6 \sin\beta\pi$
$- (\beta+\gamma)\psi_7 \sin(\beta'-\gamma)\pi = 0,$

(1, 5, 6, 8) $\psi_1 \sin(\alpha-\beta')\pi + \psi_5 \sin\beta'\pi + (-\beta)\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+ \psi_8 \sin(\beta'-\gamma)\pi = 0,$

(1, 5, 6, 10) $\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_5 \sin\gamma\pi - (-\gamma)\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$- (-\alpha)\psi_{10} \sin(\gamma-\beta')\pi = 0,$

(1, 5, 7, 8) $\psi_1 \sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi + \psi_5 \sin(\beta-\gamma)\pi$
$- (\beta+\gamma)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + \psi_8 \sin\beta\pi = 0,$

(1, 5, 7, 10) $\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_5 \sin\gamma\pi - (\gamma)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$- (\gamma-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$

(1, 5, 8, 10) $(-\alpha)\psi_1 - \psi_5 - (-\gamma)\psi_8 - (-\alpha-\beta')\psi_{10} = 0,$

(1, 5, 9) $\psi_1 - (-\alpha)\psi_5 - (\gamma-\alpha)\psi_9 = 0,$

(1, 6, 7, 8) $\psi_1 \sin\alpha\pi + (-\beta')\psi_6 \sin(\beta-\gamma)\pi + (\beta+\gamma)\psi_7 \sin\beta'\pi - \psi_8 \sin\gamma\pi = 0,$

(1, 6, 7, 9) $\psi_1 \sin\alpha\pi + (-\beta'-\gamma)\psi_6 \sin\beta\pi + (\beta)\psi_7 \sin(\beta'-\gamma)\pi - \psi_9 \sin\gamma\pi = 0,$

(1, 6, 8, 9) $(\beta')\psi_1 \sin\alpha\pi + (-\beta')\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + \psi_8 \sin(\beta'-\gamma)\pi$
$- (\gamma)\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$

(1, 6, 8, 10) $\psi_1 \sin\alpha\pi + \psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - \psi_8 \sin\gamma\pi - (-\alpha)\psi_{10} \sin\beta'\pi = 0,$

(1, 6, 9, 10) $(\gamma)\psi_1 \sin\alpha\pi + (-\gamma)\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\gamma)\psi_9 \sin\gamma\pi$
$+ (-\alpha)\psi_{10} \sin(\gamma-\beta')\pi = 0,$

(1, 7, 8, 9) $(-\beta)\psi_1 \sin\alpha\pi + (\beta)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$- (-\gamma)\psi_8 \sin\beta\pi + \psi_9 \sin(\beta-\gamma)\pi = 0,$

(1, 7, 8, 10) $(-\gamma)\psi_1 \sin\alpha\pi + (\gamma)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (-\gamma)\psi_8 \sin\gamma\pi$
$- (-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10} \sin(\gamma-\beta)\pi = 0,$

(1, 7, 9, 10) $\psi_1 \sin\alpha\pi + \psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - \psi_9 \sin\gamma\pi$
$+ (-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$

(1, 8, 9, 10) $2i\psi_1 \sin\alpha\pi + (-\gamma)\psi_8 - (\gamma)\psi_9 + (-\alpha-\beta')\psi_{10} = 0,$

(2, 3, 4, 5) $(\beta'-\beta)\psi_2 \sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi + \psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi - (\alpha-\beta)\psi_4 \sin\beta\pi$
$- (\beta'-\alpha)\psi_5 \sin\beta'\pi = 0,$

(2, 3, 4, 7) $(-\beta)\psi_2 \sin(\beta-\alpha)\pi + \psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi - (\alpha-\beta)\psi_4 \sin\beta\pi$
$- (\beta+\gamma-\alpha)\psi_7 \sin\beta'\pi = 0,$

(2, 3, 4, 8) $(-\beta)\psi_2 + (\beta-\gamma)\psi_3 - (-\beta)\psi_4 - (\beta-\gamma)\psi_8 = 0,$

(2, 3, 4, 9) $(-\beta)\psi_2 \sin(\beta-\alpha)\pi + (-\beta')\psi_3 \sin(\gamma-\alpha-\beta')\pi$
$- (\alpha-\beta)\psi_4 \sin\beta\pi + (\gamma-\alpha-\beta')\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$

(2, 3, 4, 10) $\psi_2 \sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi + (\beta-\beta')\psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi$
$- [(\beta-\beta') \sin\alpha\pi + \sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi]\psi_4$
$+ (\beta-\beta'-2\alpha)\psi_{10} \sin\beta'\pi = 0,$

$(2, 3, 5, 6)\quad (\beta')\psi_2 \sin(\beta'-\alpha)\pi + \psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi - (\beta'-\alpha)\psi_5 \sin\beta'\pi$
$\qquad - (\alpha-\beta'-\gamma)\psi_6 \sin\beta\pi = 0,$

$(2, 3, 5, 8)\quad (\beta')\psi_2 \sin(\beta'-\alpha)\pi + (\beta)\psi_3 \sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi$
$\qquad - (\beta'-\alpha)\psi_5 \sin\beta'\pi + (\alpha+\beta-\gamma)\psi_8 \sin\beta\pi = 0,$

$(2, 3, 5, 9)\quad (\beta')\psi_2 + (\gamma-\beta')\psi_3 - (\beta')\psi_5 - (\gamma-\beta')\psi_9 = 0,$

$(2, 3, 5, 10)\quad \psi_2 \sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi + (\beta-\beta')\psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi$
$\qquad - [(\beta-\beta')\sin\alpha\pi + \sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi]\psi_5 - (-2\beta')\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$

$(2, 3, 6, 7)\quad \psi_2 \sin\alpha\pi + \psi_3 \sin(\alpha-\gamma)\pi + (\alpha-\beta'-\gamma)\psi_6 \sin\beta\pi$
$\qquad + (\beta+\gamma-\alpha)\psi_7 \sin\beta'\pi = 0,$

$(2, 3, 6, 9)\quad \psi_2 \sin\alpha\pi + (-\beta')\psi_3 \sin(\alpha+\beta'-\gamma)\pi + (\alpha-\beta'-\gamma)\psi_6 \sin\beta\pi$
$\qquad - (\gamma-\alpha-\beta')\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$

$(2, 3, 6, 10)\quad \psi_2 \sin\alpha\pi + \psi_3 \sin(\alpha-\gamma)\pi$
$\qquad + (-\gamma)[(\beta-\beta')\sin\alpha\pi + \sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi]\psi_6 - (-2\alpha)\psi_{10} \sin\beta'\pi = 0,$

$(2, 3, 7, 8)\quad \psi_2 \sin\alpha\pi + (\beta)\psi_3 \sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi + (\beta+\gamma-\alpha)\psi_7 \sin\beta'\pi$
$\qquad - (\alpha+\beta-\gamma)\psi_8 \sin\beta\pi = 0,$

$(2, 3, 7, 10)\quad \psi_2 \sin\alpha\pi + \psi_3 \sin(\alpha-\gamma)\pi$
$\qquad + (\gamma)[(\beta-\beta')\sin\alpha\pi + \sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi]\psi_7$
$\qquad + (-\beta-\beta')\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$

$(2, 3, 8, 9)\quad \psi_2 \sin\alpha\pi + (\beta-\beta')\psi_3 \sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$\qquad - (\alpha+\beta-\gamma)\psi_8 \sin\beta\pi - (\gamma-\alpha-\beta')\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$

$(2, 3, 8, 10)\quad (\alpha-\beta)\psi_2 \sin\alpha\pi + [(\alpha+\beta-\gamma)\sin\alpha\pi + (\beta')\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi]\psi_3$
$\qquad - (-\gamma)[(\beta+\beta')\sin\beta'\pi + (2\alpha)\sin\beta\pi]\psi_8 - (-\alpha-\beta)\psi_{10} \sin\beta'\pi = 0,$

$(2, 3, 9, 10)\quad (\beta'-\alpha)\psi_2 \sin\alpha\pi + [(\gamma-\alpha-\beta')\sin\alpha\pi + (-\beta)\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi]\psi_3$
$\qquad - (\gamma)[(-\beta-\beta')\sin\beta\pi + (-2\alpha)\sin\beta'\pi]\psi_9$
$\qquad + (-\alpha-\beta-2\beta')\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$

$(2, 4, 5, 8)\quad \psi_2 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\alpha-\beta')\psi_4 \sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi$
$\qquad - (\beta-\gamma)\psi_5 \sin\beta'\pi + (\alpha+\beta-\beta'-\gamma)\psi_8 \sin(\gamma-\alpha)\pi = 0,$

$(2, 4, 5, 9)\quad \psi_2 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\gamma-\beta')\psi_4 \sin\beta\pi$
$\qquad - (\beta-\alpha)\psi_5 \sin(\alpha+\beta'-\gamma)\pi + (\gamma+\beta-\beta'-\alpha)\psi_9 \sin(\gamma-\alpha)\pi = 0,$

$(2, 4, 6)\quad \psi_2 - \psi_4 + (\beta-\beta'-\gamma)\psi_6 = 0,$

$(2, 4, 7, 8)\quad (-\beta)\psi_2 \sin(\beta-\gamma)\pi - (\alpha-\beta)\psi_4 \sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi$
$\qquad - (\beta)\psi_7 \sin\beta'\pi + (\alpha-\gamma)\psi_8 \sin(\gamma-\alpha)\pi = 0,$

$(2, 4, 7, 9)\quad (-\beta)\psi_2 \sin(\beta-\alpha)\pi - (\alpha-\beta)\psi_4 \sin\beta\pi$
$\qquad + (\beta)\psi_7 \sin(\gamma-\alpha-\beta')\pi + \psi_9 \sin(\gamma-\alpha)\pi = 0,$

$(2, 4, 7, 10)\quad \psi_2 - \psi_4 + (\beta-\beta'+\gamma)\psi_7 + (-\alpha-\beta')\psi_{10} = 0,$

$(2, 4, 8, 9)\quad \psi_2 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\alpha)\psi_4 \sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$\qquad + (\alpha+\beta-\gamma)\psi_8 \sin(\gamma-\alpha-\beta')\pi + (\beta)\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$

$(2, 4, 8, 10)\quad (-\alpha)\psi_2 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$- [(-\alpha)\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\beta-\beta'-\gamma)\sin\alpha\pi]\psi_4$
$- (\beta-\beta'-\gamma)\psi_8 \sin(\alpha-\gamma)\pi + (\beta-\beta'-\gamma-2\alpha)\psi_{10}\sin\beta'\pi = 0,$

$(2, 4, 9, 10)\quad \psi_2 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + [(\beta-\alpha)\sin(\gamma-\alpha-\beta')\pi - (\gamma-\beta')\sin\beta\pi]\psi_4$
$+ (\gamma-\alpha+\beta-\beta')\psi_9 \sin(\gamma-\alpha)\pi$
$- (\beta-\beta'-2\alpha)\psi_{10}\sin(\gamma-\alpha-\beta')\pi = 0,$

$(2, 5, 6, 8)\quad (\beta')\psi_2 \sin(\beta'-\alpha)\pi - (\beta'-\alpha)\psi_5 \sin\beta'\pi$
$+ (-\beta')\psi_6 \sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi + \psi_8 \sin(\gamma-\alpha)\pi = 0,$

$(2, 5, 6, 9)\quad (\beta')\psi_2 \sin(\beta'-\gamma)\pi - (\beta'-\alpha)\psi_5 \sin(\alpha+\beta'-\gamma)\pi$
$- (-\beta')\psi_6 \sin\beta\pi + (\gamma-\alpha)\psi_9 \sin(\gamma-\alpha)\pi = 0,$

$(2, 5, 6, 10)\quad \psi_2 - \psi_5 + (\beta-\beta'-\gamma)\psi_6 - (-\alpha-\beta')\psi_{10} = 0,$

$(2, 5, 7)\quad \psi_2 - \psi_5 + (\beta-\beta'+\gamma)\psi_7 = 0,$

$(2, 5, 8, 9)\quad \psi_2 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (-\alpha)\psi_5 \sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+ (-\beta')\psi_8 \sin\beta\pi + (\gamma-\alpha-\beta')\psi_9 \sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi = 0,$

$(2, 5, 8, 10)\quad \psi_2 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$- [(\alpha-\beta')\sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi + (\beta-\gamma)\sin\beta'\pi]\psi_5$
$+ (\alpha+\beta-\beta'-\gamma)\psi_8 \sin(\gamma-\alpha)\pi + (-2\beta')\psi_{10}\sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi = 0,$

$(2, 5, 9, 10)\quad (\alpha)\psi_2 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$- [(\alpha)\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\beta-\beta'+\gamma)\sin\alpha\pi]\psi_5$
$- (\beta-\beta'+\gamma)\psi_9 \sin(\alpha-\gamma)\pi - (-2\alpha+\gamma-2\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi = 0,$

$(2, 6, 7, 8)\quad \psi_2 \sin\alpha\pi + (-\beta')\psi_6 \sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi$
$+ (\gamma-\alpha+\beta)\psi_7 \sin\beta'\pi + \psi_8 \sin(\alpha-\gamma)\pi = 0,$

$(2, 6, 7, 9)\quad \psi_2 \sin\alpha\pi + (\alpha-\beta'-\gamma)\psi_6 \sin\beta\pi + (\beta)\psi_7 \sin(\alpha+\beta'-\gamma)\pi$
$+ \psi_9 \sin(\alpha-\gamma)\pi = 0,$

$(2, 6, 8, 9)\quad (\beta')\psi_2 \sin\alpha\pi + (-\beta')\psi_6 \sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+ \psi_8 \sin(\alpha+\beta'-\gamma)\pi - (\gamma-\alpha)\psi_9 \sin\beta'\pi = 0,$

$(2, 6, 8, 10)\quad \psi_2 \sin\alpha\pi + [(\beta-\beta'-\gamma)\sin\alpha\pi + (-\alpha)\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi]\psi_6$
$+ \psi_8 \sin(\alpha-\gamma)\pi - (-2\alpha)\psi_{10}\sin\beta'\pi = 0,$

$(2, 6, 9, 10)\quad (\gamma)\psi_2 \sin\alpha\pi + [(\alpha-\gamma)\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\beta-\beta')\sin\alpha\pi]\psi_6$
$+ (\gamma)\psi_9 \sin(\alpha-\gamma)\pi - (-\alpha)\psi_{10}\sin(\alpha+\beta'-\gamma)\pi = 0,$

$(2, 7, 8, 9)\quad (-\beta)\psi_2 \sin\alpha\pi + (\beta)\psi_7 \sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$- (\alpha-\gamma)\psi_8 \sin\beta\pi + \psi_9 \sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi = 0,$

$(2, 7, 8, 10)\quad (-\gamma)\psi_2 \sin\alpha\pi + [(\gamma-\alpha)\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\beta-\beta')\sin\alpha\pi]\psi_7$
$+ (-\gamma)\psi_8 \sin(\alpha-\gamma)\pi - (-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10}\sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi = 0,$

$(2, 7, 9, 10)\quad \psi_2 \sin\alpha\pi + [(\beta-\beta'+\gamma)\sin\alpha\pi + (\alpha)\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi]\psi_7$
$+ \psi_9 \sin(\alpha-\gamma)\pi + (-2\alpha-\beta-\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi = 0,$

$$(2, 8, 9, 10) \quad 2i\psi_2 \sin\alpha\pi \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$$
$$- [(\alpha-\gamma)\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\beta-\beta')\sin\alpha\pi]\psi_8$$
$$- [(\gamma-\alpha)\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\beta-\beta')\sin\alpha\pi]\psi_9$$
$$+ (\alpha-\beta')\psi_{10}\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi = 0,$$

$$(3, 4, 5, 6) \quad \psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi + (\beta')\psi_4\sin(\beta'-\alpha)\pi - (\beta'-\alpha)\psi_5\sin\beta'\pi$$
$$- (-\gamma)\psi_6\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi = 0,$$

$$(3, 4, 5, 7) \quad \psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi - (\alpha-\beta)\psi_4\sin\beta\pi + (-\beta)\psi_5\sin(\beta-\alpha)\pi$$
$$- (\gamma)\psi_7\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi = 0,$$

$$(3, 4, 5, 8) \quad \psi_3 \sin(\gamma-\beta-\beta')\pi + (\alpha-\beta)\psi_4\sin(\beta'-\alpha)\pi$$
$$- (-\beta)\psi_5\sin\beta'\pi + (\alpha-\gamma)\psi_8\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi = 0,$$

$$(3, 4, 5, 9) \quad \psi_3 \sin(\gamma-\beta-\beta')\pi - (\beta')\psi_4\sin\beta\pi + (\beta'-\alpha)\psi_5\sin(\beta-\alpha)\pi$$
$$+ (\gamma-\alpha)\psi_9\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi = 0,$$

$$(3, 4, 6, 7) \quad \psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_4\sin\alpha\pi + (-\beta'-\gamma)\psi_6\sin(\alpha-\beta)\pi$$
$$- (\beta+\gamma-\alpha)\psi_7\sin\beta'\pi = 0,$$

$$(3, 4, 6, 9) \quad \psi_3 \sin(\gamma-\alpha-\beta')\pi - (\beta')\psi_4\sin\alpha\pi$$
$$- (-\gamma)\psi_6\sin(\beta-\alpha)\pi + (\gamma-\alpha)\psi_9\sin\beta'\pi = 0,$$

$$(3, 4, 6, 10) \quad \psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_4\sin\alpha\pi - (-\gamma)\psi_6\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi$$
$$+ (-2\alpha)\psi_{10}\sin\beta'\pi = 0,$$

$$(3, 4, 7, 8) \quad \psi_3 \sin(\gamma-\beta)\pi - (\alpha-\beta)\psi_4\sin\alpha\pi$$
$$- (\gamma)\psi_7\sin\beta'\pi + (\alpha-\gamma)\psi_8\sin(\beta-\alpha)\pi = 0,$$

$$(3, 4, 7, 10) \quad \psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_4\sin\alpha\pi - (\gamma)\psi_7\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi$$
$$+ (-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10}\sin(\alpha-\beta)\pi = 0,$$

$$(3, 4, 8, 9) \quad \psi_3 \sin(\gamma-\beta-\beta')\pi - (\alpha+\beta'-\beta)\psi_4\sin\alpha\pi$$
$$- (\alpha+\beta'-\gamma)\psi_8\sin(\alpha-\beta)\pi + (\gamma-\beta)\psi_9\sin\beta'\pi = 0,$$

$$(3, 4, 8, 10) \quad \psi_3 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\alpha-\beta-\beta')\sin\alpha\pi$$
$$- (\alpha-\gamma)\psi_8\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi - (-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10}\sin\beta'\pi = 0,$$

$$(3, 4, 9, 10) \quad \psi_3 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\beta+\beta'-\alpha)\psi_4\sin\alpha\pi$$
$$- (\gamma-\alpha)\psi_9\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi + (-2\alpha)\psi_{10}\sin(\beta-\alpha)\pi = 0,$$

$$(3, 5, 6, 7) \quad \psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_5\sin\alpha\pi - (\alpha-\beta'-\gamma)\psi_6\sin\beta\pi$$
$$+ (\beta+\gamma)\psi_7\sin(\alpha-\beta')\pi = 0,$$

$$(3, 5, 6, 9) \quad \psi_3 \sin(\gamma-\beta)\pi - (\beta'-\alpha)\psi_5\sin\alpha\pi - (-\gamma)\psi_6\sin\beta\pi$$
$$+ (\gamma-\alpha)\psi_9\sin(\beta'-\alpha)\pi = 0,$$

$$(3, 5, 6, 10) \quad \psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_5\sin\alpha\pi - (-\gamma)\psi_6\sin(\beta-\beta'-\alpha)\pi$$
$$- (-\alpha)\psi_{10}\sin(\alpha-\beta')\pi = 0,$$

$$(3, 5, 7, 8) \quad \psi_3 \sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi - (\ \ -\beta)\psi_5\sin\alpha\pi - (\gamma)\psi_7\sin(\beta'-\alpha)\pi$$
$$+ (\alpha-\gamma)\psi_8\sin\beta\pi = 0,$$

$$(3, 5, 7, 10) \quad \psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_5\sin\alpha\pi - (\gamma)\psi_7\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi$$
$$- (-\beta-\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi = 0,$$

(4, 7, 9, 10) $\psi_4 \sin\alpha\pi + (\alpha)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+ \psi_9 \sin(\alpha-\gamma)\pi + (-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10}\sin(\beta-\alpha)\pi = 0,$

(4, 8, 9, 10) $2i\psi_4 \sin\alpha\pi + (\alpha-\gamma)\psi_8 - (\gamma-\alpha)\psi_9 + (-2\alpha-\beta')\psi_{10} = 0,$

(5, 6, 7, 8) $\psi_5 \sin\alpha\pi + (-\beta')\psi_6 \sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi$
$+ (\beta+\gamma)\psi_7 \sin(\beta'-\alpha)\pi + \psi_8 \sin(\alpha-\gamma)\pi = 0,$

(5, 6, 7, 9) $\psi_5 \sin\alpha\pi + (\alpha-\beta'-\gamma)\psi_6 \sin\beta\pi$
$+ (\alpha+\beta)\psi_7 \sin(\beta'-\gamma)\pi + \psi_9 \sin(\alpha-\gamma)\pi = 0,$

(5, 6, 8, 9) $(\beta')\psi_5 \sin\alpha\pi + (\alpha-\beta')\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+ (\alpha)\psi_8 \sin(\beta'-\gamma)\pi + (\gamma)\psi_9 \sin(\alpha-\beta')\pi = 0,$

(5, 6, 8, 10) $\psi_5 \sin\alpha\pi + (-\alpha)\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+ \psi_8 \sin(\alpha-\gamma)\pi - (-\alpha)\psi_{10} \sin(\beta'-\alpha)\pi = 0,$

(5, 6, 9 10) $(\gamma)\psi_5 \sin\alpha\pi + (\alpha-\gamma)\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+ (\gamma)\psi_9 \sin(\alpha-\gamma)\pi - \psi_{10} \sin(\beta'-\gamma)\pi = 0,$

(5, 7, 8, 9) $(-\beta)\psi_5 \sin\alpha\pi + (\alpha+\beta)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$- (\alpha-\gamma)\psi_8 \sin\beta\pi + \psi_9 \sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi = 0,$

(5, 7, 8, 10) $(-\gamma)\psi_5 \sin\alpha\pi + (\gamma-\alpha)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+ (-\gamma)\psi_8 \sin(\alpha-\gamma)\pi + (-\alpha-\beta-\beta')\psi_{10} \sin(\alpha+\beta-\gamma)\pi = 0,$

(5, 7, 9, 10) $\psi_5 \sin\alpha\pi + (\alpha)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + \psi_9 \sin(\alpha-\gamma)\pi$
$+ (-\beta-\beta')\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$

(5, 8, 9, 10) $2i\psi_5 \sin\alpha\pi + (\alpha-\gamma)\psi_8 - (\gamma-\alpha)\psi_9 + (-\beta')\psi_{10} = 0,$

(6, 7, 8, 9) $(-\beta-\beta')\psi_6 - (\beta+\beta')\psi_7 + \psi_8 - \psi_9 = 0,$

(6, 7, 10) $(-\gamma)\psi_6 - (\gamma)\psi_7 - (-\alpha-\beta)\psi_{10} = 0,$

(6, 8, 9, 10) $2i\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\gamma)\psi_8 + (\gamma)\psi_9 - (\beta'-\alpha)\psi_{10} = 0,$

(7, 8, 9, 10) $2i\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (-\gamma)\psi_8 + (-\gamma)\psi_9 - (-\alpha-2\beta-\beta')\psi_{10} = 0.$

Remarque. — A chaque formule de ce Tableau en correspond une autre du même Tableau, que l'on peut déduire de la première par les règles suivantes :

1° Dans les coefficients de ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4, ψ_5, ψ_6, ψ_7, ψ_8, ψ_9 on change i en $-i$ en laissant α, β, β', γ invariables, puis on permute β et β', ψ_4 et ψ_5, ψ_6 et ψ_7, ψ_8 et ψ_9;

2° On multiplie le coefficient de ψ_{10} par $-(2\alpha+\beta+\beta')$, puis on change i en $-i$, en laissant α, β, β', γ invariables; puis enfin on permute β et β'.

$(-\alpha-\beta)$ devient par exemple $-(-\alpha-\beta)$; $(-\alpha-\beta')$ devient $-(-\alpha-\beta')$.

$(-\alpha-\beta-\beta')$ devient $-(-\alpha)$, lequel devient $+(-\alpha-\beta-\beta')$, etc., etc.

Certaines formules se correspondent à elles-mêmes.

TABLEAU VI (*voir* p. 72).

Remarque I. — Les formules de ce Tableau, qui ne contiennent ni ψ_6, ni ψ_7, ni ψ_{10}, sont les mêmes que dans le Tableau V.

Remarque II. — Dans les formules qui contiennent ψ_6, ou ψ_7, ou ψ_6 et ψ_7, sans contenir ψ_{10}, il suffira d'ajouter $2\beta'$ à la quantité entre parenthèses dans le coefficient de ψ_6, et de retrancher 2β à la quantité entre parenthèses dans le coefficient de ψ_7. Cela tient à ce que le point $\frac{y}{x}$ passe de la partie inférieure du plan dans la partie supérieure.

Exemple. — La relation

$$\psi_1-(\alpha)\psi_2-(\alpha-\gamma)\psi_3-2i(\alpha-\beta'-\gamma)\psi_6\sin\beta\pi=0$$

du Tableau V devient dans le Tableau VI

$$\psi_1-(\alpha)\psi_2-(\alpha-\gamma)\psi_3-2i(\alpha+\beta'-\gamma)\psi_6\sin\beta\pi=0.$$

Cela posé, voici les relations du Tableau VI :

(1, 2, 3, 4), (1, 2, 3, 5) (*voir* le Tableau V),

(1, 2, 3, 6), (1, 2, 3, 7) ([1]),

(1, 2, 3, 8), (1, 2, 3, 9) (*voir* le Tableau V),

(1, 2, 3, 10) $\psi_1\sin(\beta+\beta')\pi-[(\beta'-\alpha)\sin\beta\pi+(\alpha-\beta)\sin\beta'\pi]\psi_2$
$-[(\gamma-\alpha-\beta')\sin\beta\pi+(\alpha+\beta-\gamma)\sin\beta'\pi]\psi_3$
$-2i(\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi\sin\beta'\pi=0,$

(1, 2, 4, 5) (*voir* le Tableau V), (1, 2, 4, 7) ([1]), (1, 2, 4, 9) (*voir* le Tableau V),

(1, 2, 4, 10) $\psi_1\sin(\gamma-\alpha)\pi+(\beta'-\beta)\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-[(\gamma-\beta)\sin\beta\pi+(2\alpha+\beta'-\gamma)\sin\beta'\pi]\psi_4$
$+(\alpha+2\beta'-\gamma)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

(1, 2, 5, 6) ([1]), (1, 2, 5, 8) (*voir* le Tableau V),

(1, 2, 5, 10) $(\beta-\beta')\psi_1\sin(\gamma-\alpha)\pi+\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-(-\alpha)[(\gamma-\alpha-\beta')\sin\beta\pi+(\alpha+\beta-\gamma)\sin\beta'\pi]\psi_5-(\gamma-\alpha)\psi_{10}=0,$

([1]) *Voir* la remarque II, p. 101.

(1, 2, 6, 7), (1, 2, 6, 8), (1, 2, 6, 9) ([1]),

(1, 2, 6, 10) $(-\beta')\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi$
$-[(\alpha-\beta')\sin(\gamma-\alpha)\pi+(\alpha+\beta'-\gamma)\sin\alpha\pi]\psi_2$
$-[\sin\beta\pi+(2\alpha+\beta+\beta'-2\gamma)\sin\beta'\pi]\psi_6+(\alpha+\beta'-\gamma)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

(1, 2, 7, 8), (1, 2, 7, 9) ([1]),

(1, 2, 7, 10) $(-\beta)\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)$
$-[(\beta-\alpha)\sin(\gamma-\alpha)\pi+(\gamma-\alpha-\beta)\sin\alpha\pi]\psi_2$
$+[\sin\beta'\pi+(2\gamma-2\alpha-\beta-\beta')\sin\beta\pi]\psi_7-(\gamma-\alpha-\beta')\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

(1, 2, 8, 9) (*voir* le Tableau V),

(1, 2, 8, 10) $\psi_1\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi-\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-[(-\beta')\sin\beta\pi+(2\alpha-2\gamma+\beta)\sin\beta'\pi]\psi_8$
$-(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

(1, 2, 9, 10) $\psi_1\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi-\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-[(\beta)\sin\beta'\pi+(2\gamma-2\alpha-\beta')\sin\beta\pi]\psi_9+(\gamma-\alpha)\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

(1, 3, 4, 5) (*voir* le Tableau V), (1, 3, 4, 6), (1, 3, 4, 7) ([1]),

(1, 3, 4, 9) (*voir* le Tableau V),

(1, 3, 4, 10) $\psi_1\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi-\psi_3\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-[(2\alpha-\beta)\sin\beta'\pi+(\beta')\sin\beta\pi]\psi_4+(\alpha+\beta'-\beta)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

(1, 3, 5, 6), (1, 3, 5, 7) ([1]), (1, 3, 5, 8) (*voir* le Tableau V),

(1, 3, 5, 10) $\psi_1\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi-\psi_3\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-[(-\beta)\sin\beta'\pi+(\beta'-2\alpha)\sin\beta\pi]\psi_5-(2\beta'-\alpha)\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

(1, 3, 6, 7), (1, 3, 6, 9) ([1]),

(1, 3, 6, 10) $\psi_1\sin\alpha\pi-[(\alpha-\gamma)\sin\alpha\pi+(\alpha-2\beta')\sin(\gamma-\alpha)\pi]\psi_3$
$+[(2\alpha-\beta-\gamma)\sin\beta'\pi+(\beta'-\gamma)\sin\beta\pi]\psi_6-(\alpha)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

(1, 3, 7, 8) ([1]),

(1, 3, 7, 10) $\psi_1\sin\alpha\pi-[(\gamma-\alpha)\sin\alpha\pi+(2\beta-\alpha)\sin(\gamma-\alpha)\pi]\psi_3$
$+[(\gamma-2\alpha+\beta')\sin\beta\pi+(\gamma-\beta)\sin\beta'\pi]\psi_7+(\beta+\beta'-\alpha)\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

(1, 3, 8, 9) (*voir* le Tableau V),

(1, 3, 8, 10) $\psi_1\sin\alpha\pi+(\beta-\beta')\psi_3\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-[(\beta-\gamma)\sin\beta\pi+(2\alpha-\beta'-\gamma)\sin\beta'\pi]\psi_8-(\alpha)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

(1, 3, 9, 10) $\psi_1\sin\alpha\pi+(\beta-\beta')\psi_3\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-[(\gamma-\beta')\sin\beta'\pi+(\gamma+\beta-2\alpha)\sin\beta\pi]\psi_9$
$+(\beta+\beta'-\alpha)\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

(1, 4, 5, 6), (1, 4, 5, 7), (1, 4, 6, 7) (1, 4, 6, 9) ([1]),

([1]) *Voir* la remarque II, p. 101.

(1, 4, 6, 10) $(-\alpha-\beta')\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi$
$+[(-\beta')\sin(\alpha-\gamma)\pi-(\beta'-\gamma)\sin\alpha\pi]\psi_4$
$-(\beta'-\alpha-\gamma)\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(\beta'-\gamma)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

(1, 4, 7, 9) ([1]),

(1, 4, 7, 10) $(\beta-\alpha)\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi+[(\alpha)\sin(\beta-\gamma)\pi-(\gamma-\alpha)\sin\beta\pi]\psi_4$
$-(\gamma-\alpha-\beta)\psi_7\sin(\beta+\beta'-\gamma)-(\beta')\psi_{10}\sin(\beta-\gamma)\pi=0,$

(1, 4, 8) (*voir* le Tableau V),

(1, 4, 9, 10) $\psi_1-(\alpha)\psi_4-(\gamma-\alpha)\psi_9+(\beta')\psi_{10}=0,$

(1, 5, 6, 7), **(1, 5, 6, 8)** ([1]),

(1, 5, 6, 10) $(\alpha-\beta')\psi_1\sin(\gamma-\alpha)\pi$
$+[(-\alpha)\sin(\beta'-\gamma)\pi-(\alpha-\gamma)\sin\beta'\pi]\psi_5$
$-(\alpha+\beta'-\gamma)\psi_6\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(\beta')\psi_{10}\sin(\beta'-\gamma)\pi=0,$

(1, 5, 7, 8) ([1]),

(1, 5, 7, 10) $(\alpha+\beta)\psi_1\sin(\gamma-\alpha)\pi+[(\beta)\sin(\alpha-\gamma)\pi-(\gamma-\beta)\sin\alpha\pi]\psi_5$
$-(\gamma-\alpha-\beta)\psi_7\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi-(\beta'+\gamma)\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

(1, 5, 8, 10) $\psi_1-(-\alpha)\psi_5-(\alpha-\gamma)\psi_8-(\beta')\psi_{10}=0,$

(1, 5, 9) (*voir* le Tableau V), **(1, 6, 7, 8)**, **(1, 6, 7, 9)** ([1]),

(1, 6, 7, 10) $2i\psi_1\sin\alpha\pi\sin(\gamma-\alpha)\pi$
$+[(\beta+\beta'-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)\pi+(\beta'-\beta)\sin\alpha\pi]\psi_6$
$+[(\gamma-\beta-\beta')\sin(\gamma-\alpha)\pi+(\beta'-\beta)\sin\alpha\pi]\psi_7-(\beta')\psi_{10}\sin\gamma\pi=0,$

(1, 6, 8, 9) ([1]),

(1, 6, 8, 10) $\psi_1\sin\alpha\pi+\psi_6\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-[(\alpha-2\beta')\sin(\gamma-\alpha)\pi+(\alpha-\gamma)\sin\alpha\pi]\psi_8-(\alpha)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

(1, 6, 9, 10) $\psi_1\sin\alpha\pi+\psi_6\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-[(2\gamma-\alpha-2\beta')\sin(\gamma-\alpha)\pi+(\gamma-\alpha)\sin\alpha\pi]\psi_9$
$+(\gamma-\alpha)\psi_{10}\sin(\gamma-\beta')\pi=0,$

(1, 7, 8, 9) ([1]),

(1, 7, 8, 10) $\psi_1\sin\alpha\pi+\psi_7\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-[(\alpha+2\beta-2\gamma)\sin(\gamma-\alpha)\pi+(\alpha-\gamma)\sin\alpha\pi]\psi_8$
$-(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_{10}\sin(\gamma-\beta)\pi=0,$

(1, 7, 9, 10) $\psi_1\sin\alpha\pi+\psi_7\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-[(2\beta-\alpha)\sin(\gamma-\alpha)\pi+(\gamma-\alpha)\sin\alpha\pi]\psi_9$
$+(\beta+\beta'-\alpha)\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

(2, 3, 4, 5) (*voir* le Tableau V), **(2, 3, 4, 7)** ([1]),

(2, 3, 4, 8), **(2, 3, 4, 9)** (*voir* le Tableau V),

([1]) *Voir* la remarque II, p. 101.

(1, 2, 6, 7), (1, 2, 6, 8), (1, 2, 6, 9) (¹),

(1, 2, 6, 10) $(-\beta')\psi_1 \sin(\gamma-\alpha)\pi$
$-[(\alpha-\beta')\sin(\gamma-\alpha)\pi+(\alpha+\beta'-\gamma)\sin\alpha\pi]\psi_2$
$-[\sin\beta\pi+(2\alpha+\beta+\beta'-2\gamma)\sin\beta'\pi]\psi_6+(\alpha+\beta'-\gamma)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

(1, 2, 7, 8), (1, 2, 7, 9) (¹),

(1, 2, 7, 10) $(-\beta)\psi_1\sin(\gamma-\alpha)$
$-[(\beta-\alpha)\sin(\gamma-\alpha)\pi+(\gamma-\alpha-\beta)\sin\alpha\pi]\psi_2$
$+[\sin\beta'\pi+(2\gamma-2\alpha-\beta-\beta')\sin\beta\pi]\psi_7-(\gamma-\alpha-\beta')\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

(1, 2, 8, 9) (*voir* le Tableau V),

(1, 2, 8, 10) $\psi_1\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi-\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-[(-\beta')\sin\beta\pi+(2\alpha-2\gamma+\beta)\sin\beta'\pi]\psi_8$
$-(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

(1, 2, 9, 10) $\psi_1\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi-\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-[(\beta)\sin\beta'\pi+(2\gamma-2\alpha-\beta')\sin\beta\pi]\psi_9+(\gamma-\alpha)\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

(1, 3, 4, 5) (*voir* le Tableau V), **(1, 3, 4, 6), (1, 3, 4, 7)** (¹),

(1, 3, 4, 9) (*voir* le Tableau V),

(1, 3, 4, 10) $\psi_1\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi-\psi_3\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-[(2\alpha-\beta)\sin\beta'\pi+(\beta')\sin\beta\pi]\psi_4+(\alpha+\beta'-\beta)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

(1, 3, 5, 6), (1, 3, 5, 7) (¹), **(1, 3, 5, 8)** (*voir* le Tableau V),

(1, 3, 5, 10) $\psi_1\sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi-\psi_3\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-[(-\beta)\sin\beta'\pi+(\beta'-2\alpha)\sin\beta\pi]\psi_5-(2\beta'-\alpha)\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

(1, 3, 6, 7), (1, 3, 6, 9) (¹),

(1, 3, 6, 10) $\psi_1\sin\alpha\pi-[(\alpha-\gamma)\sin\alpha\pi+(\alpha-2\beta')\sin(\gamma-\alpha)\pi]\psi_3$
$+[(2\alpha-\beta-\gamma)\sin\beta'\pi+(\beta'-\gamma)\sin\beta\pi]\psi_6-(\alpha)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

(1, 3, 7, 8) (¹),

(1, 3, 7, 10) $\psi_1\sin\alpha\pi-[(\gamma-\alpha)\sin\alpha\pi+(2\beta-\alpha)\sin(\gamma-\alpha)\pi]\psi_3$
$+[(\gamma-2\alpha+\beta')\sin\beta\pi+(\gamma-\beta)\sin\beta'\pi]\psi_7+(\beta+\beta'-\alpha)\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

(1, 3, 8, 9) (*voir* le Tableau V),

(1, 3, 8, 10) $\psi_1\sin\alpha\pi+(\beta-\beta')\psi_3\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-[(\beta-\gamma)\sin\beta\pi+(2\alpha-\beta'-\gamma)\sin\beta'\pi]\psi_8-(\alpha)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

(1, 3, 9, 10) $\psi_1\sin\alpha\pi+(\beta-\beta')\psi_3\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-[(\gamma-\beta')\sin\beta'\pi+(\gamma+\beta-2\alpha)\sin\beta\pi]\psi_9$
$+(\beta+\beta'-\alpha)\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

(1, 4, 5, 6), (1, 4, 5, 7), (1, 4, 6, 7) (1, 4, 6, 9) (¹),

(¹) *Voir* la remarque II, p. 101.

(2, 6, 9, 10) $\psi_2 \sin\alpha\pi + \psi_6 \sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-(2\gamma-2\alpha-2\beta')\psi_9 \sin(\gamma-\alpha)\pi + (\gamma-\alpha)\psi_{10}\sin(\gamma-\alpha-\beta')\pi = 0,$

(2, 7, 8, 9) ([1]),

(2, 7, 8, 10) $\psi_2 \sin\alpha\pi + \psi_7 \sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-(2\alpha+2\beta-2\gamma)\psi_8 \sin(\gamma-\alpha)\pi$
$-(\alpha-\gamma+\beta+\beta')\psi_{10}\sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi = 0,$

(2, 7, 9, 10) $\psi_2 \sin\alpha\pi + \psi_7 \sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-(2\beta)\psi_9 \sin(\gamma-\alpha)\pi + (\beta+\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi = 0,$

(3, 4, 5, 6), (3, 4, 5, 7) ([1]), (3, 4, 5, 8), (3, 4, 5, 9) (*voir* le Tableau V),

(3, 4, 6, 7), (3, 4, 6, 9) ([1]),

(3, 4, 6, 10) $(-\beta')\psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi - (\beta')\psi_4 \sin\alpha\pi$
$-(\beta'-\gamma)\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\alpha) + (\beta')\psi_{10}\sin\beta'\pi = 0,$

(3, 4, 7, 8) ([1]),

(3, 4, 7, 10) $(\beta-\alpha)\psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi - (\alpha-\beta)\psi_4 \sin\alpha\pi$
$-(\gamma-\alpha-\beta)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi + (\beta')\psi_{10}\sin(\alpha-\beta)\pi = 0,$

(3, 4, 8, 9) (*voir* le Tableau V),

(3, 4, 8, 10) $(\beta-\beta')\psi_3 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\alpha)\psi_4 \sin\alpha\pi$
$-(\alpha-\gamma+\beta-\beta')\psi_8 \sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi - (\alpha)\psi_{10}\sin\beta'\pi = 0,$

(3, 4, 9, 10) $(\beta-\beta')\psi_3 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\alpha)\psi_4 \sin\alpha\pi$
$-(\gamma-\alpha+\beta-\beta')\psi_9 \sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi - (\beta+\beta')\psi_{10}\sin(\alpha-\beta)\pi = 0,$

(3, 5, 6, 7), (3, 5, 6, 9) ([1]),

(3, 5, 6, 10) $(\alpha-\beta')\psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi - (\beta'-\alpha)\psi_5 \sin\alpha\pi$
$-(\alpha+\beta'-\gamma)\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi - (\beta')\psi_{10}\sin(\alpha-\beta')\pi = 0,$

(3, 5, 7, 8) ([1]),

(3, 5, 7, 10) $(\beta)\psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi - (-\beta)\psi_5 \sin\alpha\pi$
$-(\gamma-\beta)\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi - (\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi = 0,$

(3, 5, 8, 9) (*voir* le Tableau V),

(3, 5, 8, 10) $(\beta-\beta')\psi_3 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (-\alpha)\psi_5 \sin\alpha\pi$
$-(\alpha-\gamma+\beta-\beta')\psi_8 \sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi + \psi_{10}\sin(\alpha-\beta')\pi = 0,$

(3, 5, 9, 10) $(\beta-\beta')\psi_3 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (-\alpha)\psi_5 \sin\alpha\pi$
$-(\gamma-\alpha+\beta-\beta')\psi_9 \sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi + (\beta+\beta'-\alpha)\psi_{10}\sin\beta\pi = 0,$

(3, 6, 7, 10) $2i(\beta-\beta')\psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi + (\alpha-\gamma)\psi_6 - (\gamma-\alpha)\psi_7 - (\beta)\psi_{10} = 0,$

(3, 6, 8) ([1]),

([1]) *Voir* la remarque II, p. 101.

(2, 3, 4, 10) $\psi_2 \sin(\beta+\beta'-\alpha)\pi + (\beta-\beta')\psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi$
$- (\alpha)\psi_4 \sin(\beta+\beta')\pi + (\beta+\beta')\psi_{10}$ sin

(2, 3, 5, 6) ([1]), (2, 3, 5, 8), (2, 3, 5, 9) (*voir* le Tableau V),

(2, 3, 5, 10) $\psi_2 \sin((\beta+\beta'-\alpha)\pi + (\beta-\beta')\psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi$
$- (-\alpha)\psi_5 \sin(\beta+\beta')\pi - \psi_{10}$

(2, 3, 6, 7), (2, 3, 6, 9) ([1]),

(2, 3, 6, 10) $\psi_2 \sin\alpha\pi - (-2\beta')\psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi$
$+ (\alpha-\gamma)\psi_6 \sin(\beta+\beta')\pi - \psi_1$

(2, 3, 7, 8) ([1]),

(2, 3, 7, 10) $\psi_2 \sin\alpha\pi - (2\beta)\psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi$
$+ (\gamma-\alpha)\psi_7 \sin(\beta+\beta')\pi + (\beta+\beta')\psi$

(2, 3, 8, 9) (*voir* le Tableau V),

(2, 3, 8, 10) $\psi_2 \sin\alpha\pi + (\beta-\beta')\psi_3 \sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$- (\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_8 \sin(\beta+\beta')\pi \cdot \psi_1$

(2, 3, 9, 10) $\psi_2 \sin\alpha\pi + (\beta-\beta')\psi_3 \sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$- (\gamma-\alpha-\beta-\beta')\psi_9 \sin(\beta+\beta')\pi + (\beta+\beta')\psi_{10}$

(2, 4, 5, 8), (2, 4, 5, 9) (*voir* le Tableau V), (2, 4, 6), (2, 4, 7, 8), (2, 4

(2, 4, 7, 10) $(-\alpha)\psi_2 - (\alpha)\psi_4 + (\gamma-\alpha-\beta-\beta')\psi_7 + (\beta')\psi_{10} = 0$,

(2, 4, 8, 9) (*voir* le Tableau V),

(2, 4, 8, 10) $\psi_2 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\alpha)\psi_4 \sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+ (\alpha-\gamma+\beta-\beta')\psi_8 \sin(\gamma-\alpha)\pi + (\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_1$

(2, 4, 9, 10) $\psi_2 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (\alpha)\psi_4 \sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+ (\gamma-\alpha+\beta-\beta')\psi_9 \sin(\gamma-\alpha)\pi + (\beta+\beta')\psi_{10} \sin(\alpha + \beta$

(2, 5, 6, 8), (2, 5, 6, 9) ([1]),

(2, 5, 6, 10) $(\alpha)\psi_2 - (-\alpha)\psi_5 + (\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_6 - (\beta')\psi_{10} = 0$,

(2, 5, 7) ([1]), (2, 5, 8, 9) (*voir* le Tableau V),

(2, 5, 8, 10) $\psi_2 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (-\alpha)\psi_5 \sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+ (\alpha-\gamma+\beta-\beta')\psi_8 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_{10} \sin(\alpha+\beta$

(2, 5, 9, 10) $\psi_2 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (-\alpha)\psi_5 \sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+ (\gamma-\alpha+\beta-\beta')\psi_9 \sin(\gamma-\alpha)\pi - (\gamma-\alpha)\psi_{10}$ sin

(2, 6, 7, 8), (2, 6, 7, 9) ([1]),

(2, 6, 7, 10) $2i\psi_2 \sin\alpha\pi + (\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_6 - (\gamma-\alpha-\beta-\beta')\psi_7 - (\beta$

(2, 6, 8, 9) ([1]),

(2, 6, 8, 10) $\psi_2 \sin\alpha\pi + \psi_6 \sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$- (-2\beta')\psi_8 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_{10}$ si

([1]) *Voir* la remarque II, p. 101.

TABLEAU VII.

(1, 2, 3, 4), (1, 2, 3, 5), (1, 2, 3, 6) (1, 2, 3, 7), (1, 2, 3, 8), 1, 2, 3, 9) (*voir* le Tableau VI).

(1, 2, 3, 10) $[(\gamma-\alpha-\beta)\sin\beta'\pi+(\alpha+\beta'-\gamma)\sin\beta\pi]\psi_1$
$-[(\gamma-\beta)\sin\beta'\pi+(\beta'-\gamma)\sin\beta\pi]\psi_2$
$-\psi_3\sin(\beta+\beta')\pi-2i(\gamma-\alpha+\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi\sin\beta'\pi=0,$

(1, 2, 4, 5), (1, 2, 4, 7), (1, 2, 4, 9) (*voir* le Tableau VI),

(1, 2, 4, 10) $\psi_1\sin(\gamma-\alpha)\pi+(-\beta-\beta')\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-(\gamma-\beta-\beta')\psi_4\sin(\beta+\beta')\pi+(\gamma-\alpha)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

(1, 2, 5, 6), (1, 2, 5, 8) (*voir* le Tableau VI),

(1, 2, 5, 10) $\psi_1\sin(\gamma-\alpha)\pi+(\beta+\beta')\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-(\beta+\beta'-\gamma)\psi_5\sin(\beta+\beta')\pi-(\gamma-\alpha+\beta+\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

(1, 2, 6, 7), (1, 2, 6, 8), (1, 2, 6, 9) (*voir* le Tableau VI),

(1, 2, 6, 10) $\psi_1\sin(\gamma-\alpha)\pi-\psi_2\sin\gamma\pi-\psi_6\sin(\beta+\beta')\pi+(\gamma-\alpha)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

(1, 2, 7, 8), (1, 2, 7, 9) (*voir* le Tableau VI),

(1, 2, 7, 10) $\psi_1\sin(\gamma-\alpha)\pi-\psi_2\sin\gamma\pi-\psi_7\sin(\beta+\beta')\pi$
$-(\gamma-\alpha+\beta+\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

(1, 2, 8, 9) (*voir* le Tableau VI),

(1, 2, 8, 10 $\psi_1\sin(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\pi-\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+\psi_8\sin(\beta+\beta')\pi+(\gamma-\alpha+\beta+\beta')\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

(1, 2, 9, 10) $\psi_1\sin(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\pi+\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+\psi_9\sin(\beta+\beta')\pi-(\gamma-\alpha)\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

(1, 3, 4, 5), (1, 3, 4, 6), (1, 3, 4, 7), (1, 3, 4, 9) (*voir* le Tableau VI),

(1, 3, 4, 10) $[(\beta-\beta'-\alpha)\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+\sin(\gamma-\alpha)\pi]\psi_1$
$-(\beta-\beta'-\gamma)\psi_3\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-[(\gamma-\beta')\sin\beta'\pi+(\beta-\gamma)\sin\beta\pi]\psi_4+(\gamma-\alpha)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

(1, 3, 5, 6), (1, 3, 5, 7), (1, 3, 5, 8) (*voir* le Tableau VI),

(1, 3, 5, 10) $[(\alpha+\beta-\beta')\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+\sin(\gamma-\alpha)\pi]\psi_1$
$-(\gamma+\beta-\beta')\psi_3\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-[(\beta-\gamma)\sin\beta\pi+(\gamma-\beta')\sin\beta'\pi]\psi_5$
$-(\gamma-\alpha+\beta+\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

(1, 3, 6, 7), (1, 3, 6, 9) (*voir* le Tableau VI),

(1, 3, 6, 10) $\psi_1\sin\alpha\pi-\psi_3\sin\gamma\pi+[(\beta'-\gamma)\sin\beta\pi+(\gamma-\beta)\sin\beta'\pi)\psi_6$
$-(2\gamma-\alpha)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

(1, 3, 7, 8) (*voir* le Tableau VI),

(3, 6, 9, 10) $(\alpha-\gamma)\psi_3-(\alpha-\gamma+\beta'-\beta)\psi_6-(\gamma-\alpha)\psi_9+(\beta')\psi_{10}=0$,

(3, 7, 8, 10) $(\gamma-\alpha)\psi_3-(\gamma-\alpha+\beta'-\beta)\psi_7-(\alpha-\gamma)\psi_8-(\beta')\psi_{10}=0$,

(3, 7, 9), (4, 5, 6, 7), (4, 5, 6, 8), (4, 5, 6, 9), (4, 5, 7, 8), (4, 5, 7, 9) [1],

(4, 5, 8, 9) (*voir* le Tableau V),

(4, 5, 10) $(\alpha)\psi_4-(-\alpha)\psi_5-(\beta')\psi_{10}=0$,

(4, 6, 7, 8), (4, 6, 7, 9) [1],

(4, 6, 7, 10) $2i\psi_4\sin\alpha\pi+(\beta+\beta'-\alpha-\gamma)\psi_6-(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\psi_7-(\beta')\psi_{10}=0$,

(4, 6, 8, 9) [1],

(4, 6, 8, 10) $\psi_4\sin\alpha\pi+(-\alpha)\psi_6\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+(-2\beta')\psi_8\sin(\alpha-\gamma)\pi-\psi_{10}\sin\beta'\pi=0$,

(4, 6, 9, 10) $\psi_4\sin\alpha\pi+(-\alpha)\psi_6\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+(2\gamma-2\alpha-2\beta')\psi_9\sin(\alpha-\gamma)\pi+(\gamma-\alpha)\psi_{10}\sin(\gamma-\alpha-\beta')\pi=0$,

(4, 7, 8, 9) (*voir* le Tableau V),

(4, 7, 8, 10) $(\gamma-\beta)\psi_4\sin\alpha\pi+(\gamma-\alpha-\beta)\psi_7\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+(\beta-\gamma)\psi_8\sin(\alpha-\gamma)\pi+(\beta')\psi_{10}\sin(\beta-\gamma)\pi=0$,

(4, 7, 9, 10) $(\alpha-\beta)\psi_4\sin\alpha\pi+(-\beta)\psi_7\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+(\beta-\alpha)\psi_9\sin(\alpha-\gamma)\pi-(\beta')\psi_{10}\sin(\alpha-\beta)\pi=0$,

(5, 6, 7, 8), (5, 6, 7, 9) [1],

(5, 6, 7, 10) $2i\psi_5\sin\alpha\pi+(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_6-(\alpha+\gamma-\beta-\beta')\psi_7-(\beta')\psi_{10}=0$,

(5, 6, 8, 9) [1],

(5, 6, 8, 10) $(\beta'-\alpha)\psi_5\sin\alpha\pi+(\beta')\psi_6\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+(\alpha-\beta')\psi_8\sin(\alpha-\gamma)\pi+(\beta')\psi_{10}\sin(\alpha-\beta')\pi=0$,

(5, 6, 9, 10) $(\beta'-\gamma)\psi_5\sin\alpha\pi+(\alpha+\beta'-\gamma)\psi_6\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+(\gamma-\beta')\psi_9\sin(\alpha-\gamma)\pi-(\beta')\psi_{10}\sin(\beta'-\gamma)\pi=0$,

(5, 7, 8, 9) [1],

(5, 7, 8, 10) $\psi_5\sin\alpha\pi+(\alpha)\psi_7\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+(2\alpha+2\beta-2\gamma)\psi_8\sin(\alpha-\gamma)\pi$
$-(\alpha-\gamma+\beta+\beta')\psi_{10}\sin(\gamma-\alpha-\beta)\pi=0$,

(5, 7, 9, 10) $\psi_5\sin\alpha\pi+(\alpha)\psi_7\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(2\beta)\psi_9\sin(\alpha-\gamma)\pi$
$+(\beta+\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi=0$,

(6, 7, 8, 10) $(\gamma-\alpha)\psi_6-(\gamma-\alpha)\psi_7+2i(\beta-\beta')\psi_8\sin(\gamma-\alpha)\pi-(\beta)\psi_{10}=0$,

(6, 7, 9, 10) $(\alpha-\gamma)\psi_6-(\alpha-\gamma)\psi_7+2i(\beta-\beta')\psi_9\sin(\gamma-\alpha)\pi-(\beta)\psi_{10}=0$,

(8, 9, 10) $(\alpha-\gamma)\psi_8-(\gamma-\alpha)\psi_9+(\beta')\psi_{10}=0$.

---

[1] *Voir* la remarque II, p. 101.

(2, 3, 4, 10) $[(-\beta')\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(\alpha-\beta)\sin(\gamma-\alpha)\pi]\psi_2$
$+(\alpha+\beta-\gamma)\psi_3\sin(\gamma-\alpha)\pi$
$-[(2\alpha-\gamma)\sin\beta\pi+(\gamma-\beta-\beta')\sin\beta'\pi]\psi_4$
$+(\gamma-\alpha+\beta)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

(2, 3, 5, 6), (2, 3, 5, 8), (2, 3, 5, 9) (*voir* le Tableau VI),

(2, 3, 5, 10) $[(\beta)\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(\beta'-\alpha)\sin(\gamma-\alpha)\pi]\psi_2$
$+(\gamma-\alpha-\beta')\psi_3\sin(\gamma-\alpha)\pi$
$-[(\gamma-2\alpha)\sin\beta'\pi+(\beta+\beta'-\gamma)\sin\beta\pi]\psi_5$
$-(\gamma-\alpha+\beta)\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

(2, 3, 6, 7), (2, 3, 6, 9) (*voir* le Tableau VI),

(2, 3, 6, 10) $\psi_2\sin\alpha\pi+\psi_3\sin(\alpha-\gamma)\pi$
$+[(\alpha+\beta'-\gamma)\sin\beta\pi+(\gamma-\alpha-\beta)\sin\beta'\pi]\psi_6$
$-(2\gamma-2\alpha)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

(2, 3, 7, 8) (*voir* le Tableau VI),

(2, 3, 7, 10) $\psi_2\sin\alpha\pi+\psi_3\sin(\alpha-\gamma)\pi$
$+[(\gamma-\alpha-\beta)\sin\beta'\pi+(\alpha+\beta'-\gamma)\sin\beta\pi]\psi_7$
$+(\beta+\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

(2, 3, 8, 9) (*voir* le Tableau VI),

(2, 3, 8, 10) $(\beta'-\beta)\psi_2\sin\alpha\pi+\psi_3\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-[(\alpha+\beta'-\gamma)\sin\beta\pi+(\gamma-\alpha-\beta)\sin\beta'\pi]\psi_8$
$-(2\gamma-2\alpha+\beta'-\beta)\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

(2, 3, 9, 10) $(\beta'-\beta)\psi_2\sin\alpha\pi+\psi_3\sin(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$-[(\alpha+\beta'-\gamma)\sin\beta\pi+(\gamma-\alpha-\beta)\sin\beta'\pi]\psi_9$
$+(2\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi=0,$

(2. 4, 5, 8) (2, 4, 5, 9) (*voir* le Tableau VI),

(2, 4, 5, 10) $2i\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+(\gamma-\beta-\beta')\psi_4-(\beta+\beta'-\gamma)\psi_5-(\gamma-\alpha+\beta)\psi_{10}=0,$

(2, 4, 6), (2, 4, 7, 8), (2, 4, 7, 9) (*voir* le Tableau VI),

(2, 4, 7, 10) $\psi_2-\psi_4+(\beta+\beta'-\gamma)\psi_7+(2\beta+\beta'-\alpha)\psi_{10}=0,$

(2, 4, 8, 9) (*voir* le Tableau VI),

(2, 4, 8, 10) $\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(\alpha)\psi_4\sin(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\pi$
$+(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_8\sin(\gamma-\alpha)\pi$
$+(\gamma-\alpha+\beta+\beta')\psi_{10}\sin\beta'\pi=0,$

(2, 4, 9, 10) $\psi_2\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi+(\alpha)\psi_4\sin(\gamma-\alpha-\beta-\beta')\pi$
$+(\alpha+\beta+\beta'-\gamma)\psi_9\sin(\gamma-\alpha)\pi$
$-(\beta+\beta')\psi_{10}\sin(\gamma-\alpha-\beta')\pi=0,$

(2, 5, 6, 8), (2, 5, 6, 9) (*voir* le Tableau VI),

(2, 5, 6, 10) $\psi_2-\psi_5+(\gamma-\beta-\beta')\psi_6-(2\gamma-\alpha-\beta')\psi_{10}=0,$

(2, 5, 7), (2, 5, 8, 9) (*voir* le Tableau VI),

[illegible]

(3, 4, 5, 6), (3, 4, 5, 7), (3, 4, 5, 9), [illegible] (voir le Tableau [illegible]).

(3, 4, 5, 10) [illegible] $= 0.$

(3, 4, 6, 7), (3, 4, 6, 9) (voir le Tableau VI).

(3, 4, 6, 10) $\psi_1 \sin (x - y)$ [illegible] $- [(1 - x) \sin$ [illegible] $\sin$ [illegible] $- \; 3y - 3x)\psi_{10} \sin 3x = 0.$

(3, 4, 7, 8) (*voir* le Tableau VI).

(3, 4, 7, 10) $\psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_4 \sin\alpha\pi$
$- [(\beta'-\gamma)\sin(\beta-\alpha)\pi + (\gamma-\alpha-\beta)\sin\beta'\pi]\psi_7$
$- (\beta+\beta'-\alpha)\psi_{10}\sin(\beta-\alpha)\pi = 0,$

(3, 4, 8, 9) (*voir* le Tableau VI),

(3, 4, 8, 10) $\psi_3 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\alpha+\beta'-\beta)\psi_4 \sin\alpha\pi$
$- [(\alpha+\beta'-\beta)\sin(\gamma-\alpha)\pi + \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi]\psi_8$
$- (2\gamma-\alpha+\beta'-\beta)\psi_{10}\sin\beta'\pi = 0,$

(3, 4, 9, 10) $\psi_3 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\alpha+\beta'-\beta)\psi_4 \sin\alpha\pi$
$+ [(\alpha+\beta'-\gamma)\sin(\alpha-\beta)\pi - (\gamma-\beta)\sin\beta'\pi]\psi_9$
$- (2\beta')\psi_{10}\sin(\alpha-\beta)\pi = 0,$

(3, 5, 6, 7), (3, 5, 6, 9) (*voir* le Tableau VI),

(3, 5, 6, 10) $\psi_3 \sin(\gamma-\alpha)\pi - \psi_5 \sin\alpha\pi$
$- [(\gamma-\beta)\sin(\beta'-\alpha)\pi + (\alpha+\beta'-\gamma)\sin\beta\pi]\psi_6$
$+ (2\gamma-\alpha)\psi_{10}\sin(\beta'-\alpha)\pi = 0,$

(3, 5, 7, 8) (*voir* le Tableau VI),

(3, 5, 7, 10) $\psi_3 \sin(\alpha-\gamma)\pi + \psi_5 \sin\alpha\pi$
$+ [(\alpha)\sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\beta'-\beta)\sin(\gamma-\alpha)\pi]\psi_7$
$+ (\beta+\beta')\psi_{10}\sin\beta\pi = 0,$

(3, 5, 8, 9) (*voir* le Tableau VI),

(3, 5, 8, 10) $\psi_3 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\beta'-\beta-\alpha)\psi_5 \sin\alpha\pi$
$+ [(\gamma-\alpha-\beta)\sin(\alpha-\beta')\pi - (\beta'-\gamma)\sin\beta\pi]\psi_8$
$+ (2\gamma-2\alpha+\beta'-\beta)\psi_{10}\sin(\alpha-\beta')\pi = 0,$

(3, 5, 9, 10) $\psi_3 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi + (\beta'-\beta-\alpha)\psi_5 \sin\alpha\pi$
$- [(\beta'-\beta-\alpha)\sin(\gamma-\alpha)\pi + \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi]\psi_9$
$+ (2\beta'-\alpha)\psi_{10}\sin\beta\pi = 0,$

(3, 6, 8) (*voir* le Tableau VI),

(3, 6, 9, 10) $\psi_3 - (\beta'-\beta)\psi_6 - \psi_9 + (\gamma-\alpha+\beta')\psi_{10} = 0,$

(3, 7, 8, 10) $\psi_3 - (\beta'-\beta)\psi_7 - \psi_8 - (\gamma-\alpha+\beta')\psi_{10} = 0,$

(3, 7, 9), (4, 5, 6, 7), (4, 5, 6, 8), (4, 5, 6, 9) (*voir* le Tableau VI),

(4, 5, 6, 10) $\psi_4 - \psi_5 - 2i\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (2\gamma-\alpha-\beta')\psi_{10} = 0,$

(4, 5, 7, 8), (4, 5, 7, 9) (*voir* le Tableau VI),

(4, 5, 7, 10) $\psi_4 - \psi_5 - 2i\psi_7 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi - (2\beta+\beta'-\alpha)\psi_{10} = 0,$

(4, 5, 8, 9) (*voir* le Tableau VI),

(4, 5, 8, 10) $(\alpha)\psi_4 - (-\alpha)\psi_5 - 2i\psi_8 \sin(\gamma-\alpha)\pi - (2\gamma-2\alpha+\beta')\psi_{10} = 0,$

(4, 5, 9, 10) $(\alpha)\psi_4 - (-\alpha)\psi_5 - 2i\psi_9 \sin(\gamma-\alpha)\pi - (\beta')\psi_{10} = 0,$

(4, 6, 7, 8), (4, 6, 7, 9), (4, 6, 8, 9) (*voir* le Tableau VI),

(4, 6, 8, 10) $\psi_4 \sin\alpha\pi + (-\alpha)\psi_6 \sin(\beta+\beta'-\gamma)\pi$
$+ \psi_8 \sin(\alpha-\gamma)\pi - (2\gamma-2\alpha)\psi_{10}\sin\beta'\pi = 0,$

(4, 6, 9, 10) $\psi_4 \sin\alpha\pi + (-\alpha)\psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
$+ \psi_9 \sin(\alpha - \gamma)\pi - (\gamma - \alpha)\psi_{10} \sin(\alpha + \beta' - \gamma)\pi = 0,$

(4, 7, 8, 9) (*voir* le Tableau VI),

(4, 7, 8, 10) $\psi_4 \sin\alpha\pi + (-\alpha)\psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
$+ \psi_8 \sin(\alpha - \gamma)\pi + (\gamma - 2\alpha + \beta + \beta')\psi_{10} \sin(\beta - \gamma)\pi = 0,$

(4, 7, 9, 10) $\psi_4 \sin\alpha\pi + (-\alpha)\psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
$+ \psi_9 \sin(\alpha - \gamma)\pi - (\beta + \beta' - \alpha)\psi_{10} \sin(\alpha - \beta)\pi = 0,$

(5, 6, 7, 8), (5, 6, 7, 9), (5, 6, 8, 9) (*voir* le Tableau VI),

(5, 6, 8, 10) $\psi_5 \sin\alpha\pi + (\alpha)\psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
$+ \psi_8 \sin(\alpha - \gamma)\pi + (2\gamma - \alpha)\psi_{10} \sin(\alpha - \beta')\pi = 0,$

(5, 6, 9, 10) $\psi_5 \sin\alpha\pi + (\alpha)\psi_6 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
$- \psi_9 \sin(\alpha - \gamma)\pi - (\gamma)\psi_{10} \sin(\beta' - \gamma)\pi = 0,$

(5, 7, 8, 9) (*voir* le Tableau VI),

(5, 7, 8, 10) $\psi_5 \sin\alpha\pi + (\alpha)\psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
$+ \psi_8 \sin(\alpha - \gamma)\pi + (\gamma - \alpha + \beta + \beta')\psi_{10} \sin(\alpha + \beta - \gamma)\pi = 0,$

(5, 7, 9, 10) $\psi_5 \sin\alpha\pi + (\alpha)\psi_7 \sin(\beta + \beta' - \gamma)\pi$
$+ \psi_9 \sin(\alpha - \gamma)\pi + (\beta + \beta')\psi_{10} \sin\beta\pi = 0,$

(6, 7, 10) $\psi_6 - \psi_7 - (\gamma - \alpha + \beta)\psi_{10} = 0,$

(8, 9, 10) $\psi_8 - \psi_9 + (\gamma - \alpha + \beta')\psi_{10} = 0,$

Remarque I. — Les formules de ce Tableau s'associent deux à deux, ou à elles-mêmes comme il a déjà été dit (*voir* p. 100). Il n'y a de changement que pour le coefficient de ψ_{10}. Étant donnée une formule du Tableau, contenant ψ_{10}, pour avoir le coefficient de ψ_{10} dans la formule associée, il faut effectuer les opérations suivantes : 1° multiplier le coefficient de ψ_{10} dans la formule donnée par $-(2\alpha - 2\gamma - \beta - \beta')$; 2° dans la parenthèse, permuter β et β'; 3° changer tous les signes des termes de cette parenthèse.

Remarque II. — Étant données deux aires symétriques par rapport à X, tandis que u parcourt le contour de l'une, le point imaginaire conjugué u_0 parcourt le contour de l'autre. Les deux formules correspondantes se déduiront l'une de l'autre comme il suit : dans le coefficient de chaque terme de l'une, on changera les signes de tous les termes entre parenthèses. Un terme de la forme $e^{i\pi\lambda}\psi_p = (\lambda)\psi_p$ devient ainsi $e^{-i\pi\lambda}\psi_p = (-\lambda)\psi_p$. Les arguments des sinus restent inaltérés.

Cette remarque permet de déduire les Tableaux VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV des précédents.

CHAPITRE IV.

25. Si l'on pose

$$U = u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}(1-uy)^{-\beta'}$$

et

$$V = v^{\beta+\beta'-\gamma}(v-1)^{\gamma-\alpha-1}(v-x)^{-\beta}(v-y)^{-\beta'},$$

on aura

$$\int_0^{+1} U\,du = \int_{+1}^{\infty} V\,dv, \qquad \int_0^{-\infty} U\,du = \int_0^{-\infty} V\,dv, \qquad \int_{+1}^{\infty} U\,du = \int_0^{1} V\,dv,$$

$$\int_0^{\frac{1}{x}} U\,du = \int_x^{\infty} V\,dv, \qquad \int_0^{\frac{1}{y}} U\,du = \int_y^{\infty} V\,dv,$$

$$\int_1^{\frac{1}{x}} U\,du = \int_x^{1} V\,dv, \qquad \int_1^{\frac{1}{y}} U\,du = \int_y^{1} V\,dv,$$

$$\int_{\frac{1}{x}}^{\infty} U\,du = \int_0^{x} V\,dv, \qquad \int_{\frac{1}{y}}^{\infty} U\,du = \int_0^{y} V\,dv, \qquad \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{y}} U\,du = \int_y^{x} V\,dv.$$

Les intégrales des seconds membres sont prises soit le long de segments rectilignes, soit le long d'arcs de circonférences qu'il est aisé de déterminer.

Choisissons les trois intégrales suivantes

$$\omega_1 = \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} U\,du = \int_0^{x} V\,dv,$$

$$\omega_2 = \int_{\frac{1}{y}}^{\infty} U\,du = \int_0^{y} V\,dv,$$

$$\omega_3 = \int_1^{\infty} U\,du = \int_0^{1} V\,dv,$$

et soit

$$\frac{\omega_1}{\omega_3} = \xi, \qquad \frac{\omega_2}{\omega_3} = \eta.$$

On peut se demander à quelles conditions x et y, considérées comme fonctions de ξ et de η, seront des fonctions uniformes de ξ et de η.

Soient

$$a = 1 + \beta + \beta' - \gamma, \quad b = \gamma - \alpha, \quad \lambda = 1 - \beta, \quad \mu = 1 - \beta'.$$

M. Picard a démontré ([1]) que les dix conditions suivantes étaient tout d'abord nécessaires : les dix nombres $a + b - 1$, $a + \lambda - 1$, $a + \mu - 1$, $b + \lambda - 1$, $b + \mu - 1$, $\lambda + \mu - 1$, $2 - b - \lambda - \mu$, $2 - \lambda - \mu - a$, $2 - \mu - a - b$, $2 - a - b - \lambda$ doivent être les inverses d'un nombre entier, positif ou négatif ([2]).

Nous nous proposons, dans le présent Chapitre, de trouver tous les groupes de quatre nombres, a, b, c, d, tels que l'on ait

$$\begin{aligned}
&a + b = 1 + \frac{1}{n_{ab}}, && \\
&a + c = 1 + \frac{1}{n_{ac}}, && 2 - (b + c + d) = \frac{1}{n_a}, \\
&a + d = 1 + \frac{1}{n_{ad}}, && 2 - (c + d + a) = \frac{1}{n_b}, \\
&b + c = 1 + \frac{1}{n_{bc}}, && 2 - (d + a + b) = \frac{1}{n_c}, \\
&b + d = 1 + \frac{1}{n_{bd}}, && 2 - (a + b + c) = \frac{1}{n_d}, \\
&c + d = 1 + \frac{1}{n_{cd}}, &&
\end{aligned}$$

où les n sont des nombres entiers.

Les quatre dernières équations, ajoutées membre à membre nous donnent

$$8 - 3(a + b + c + d) = \frac{1}{n_a} + \frac{1}{n_b} + \frac{1}{n_c} + \frac{1}{n_d} = \sigma$$

ou

$$a + b + c + d = \frac{8 - \sigma}{3},$$

([1]) E. Picard, *Sur les fonctions hyperfuchsiennes provenant des séries hypergéométriques de deux variables* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. **II**, p. 381; année 1885.

([2]) E. Picard, *Sur les fonctions hyperfuchsiennes provenant des séries hypergéométriques de deux variables* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. **XV**, p. 148; année 1886-1887.

d'où je conclus

$$a = \frac{2-\sigma}{3} + \frac{1}{n_a},$$

$$b = \frac{2-\sigma}{3} + \frac{1}{n_b},$$

$$c = \frac{2-\sigma}{3} + \frac{1}{n_c},$$

$$d = \frac{2-\sigma}{3} + \frac{1}{n_d}.$$

On en déduit

$$\frac{1}{n_{ij}} = \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} + \frac{1-2\sigma}{3},$$

i et j désignant deux quelconques des quatre lettres a, b, c, d; si k et l désignent les deux autres, on peut mettre cette équation sous la forme

$$\frac{2}{n_k} + \frac{2}{n_l} - \frac{1}{n_i} - \frac{1}{n_j} + \frac{3}{n_{ij}} = 1.$$

Donc, en posant $n_a = x$, $n_b = y$, $n_c = z$, $n_d = t$,

$$n_{cd} = u, \quad n_{bd} = v, \quad n_{bc} = w, \quad n_{ad} = p, \quad n_{ac} = q, \quad n_{ab} = r,$$

on est ramené à résoudre en nombres entiers le système des six équations qui suivent

$$\frac{2}{x} + \frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{u} = 1,$$

$$\frac{2}{x} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t} - \frac{1}{y} + \frac{3}{v} = 1,$$

$$\frac{2}{x} + \frac{2}{t} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} + \frac{3}{w} = 1,$$

$$\frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{x} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = 1,$$

$$\frac{2}{y} + \frac{2}{t} - \frac{1}{x} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = 1,$$

$$\frac{2}{z} + \frac{2}{t} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{3}{r} = 1.$$

26. Si l'on considère la première de ces équations, si l'on a simultanément

$$|x| > 10, \quad |y| > 10, \quad |z| > 5, \quad |t| > 5, \quad |u| > 15,$$

On peut se demander à quelles conditions x et y, considérées comme fonctions de ξ et de η, seront des fonctions uniformes de ξ et de η.

Soient

$$a = 1 + \beta + \beta' - \gamma, \quad b = \gamma - \alpha, \quad \lambda = 1 - \beta, \quad \mu = 1 - \beta'.$$

M. Picard a démontré ([1]) que les dix conditions suivantes étaient tout d'abord nécessaires : les dix nombres $a + b - 1$, $a + \lambda - 1$, $a + \mu - 1$, $b + \lambda - 1$, $b + \mu - 1$, $\lambda + \mu - 1$, $2 - b - \lambda - \mu$, $2 - \lambda - \mu - a$, $2 - \mu - a - b$, $2 - a - b - \lambda$ doivent être les inverses d'un nombre entier, positif ou négatif ([2]).

Nous nous proposons, dans le présent Chapitre, de trouver tous les groupes de quatre nombres, a, b, c, d, tels que l'on ait

$$\begin{aligned}
a + b &= 1 + \frac{1}{n_{ab}}, \\
a + c &= 1 + \frac{1}{n_{ac}}, & 2 - (b + c + d) &= \frac{1}{n_a}, \\
a + d &= 1 + \frac{1}{n_{ad}}, & 2 - (c + d + a) &= \frac{1}{n_b}, \\
b + c &= 1 + \frac{1}{n_{bc}}, & 2 - (d + a + b) &= \frac{1}{n_c}, \\
b + d &= 1 + \frac{1}{n_{bd}}, & 2 - (a + b + c) &= \frac{1}{n_d}, \\
c + d &= 1 + \frac{1}{n_{cd}},
\end{aligned}$$

où les n sont des nombres entiers.

Les quatre dernières équations, ajoutées membre à membre nous donnent

$$8 - 3(a + b + c + d) = \frac{1}{n_a} + \frac{1}{n_b} + \frac{1}{n_c} + \frac{1}{n_d} = \sigma$$

ou

$$a + b + c + d = \frac{8 - \sigma}{3},$$

([1]) E. PICARD, *Sur les fonctions hyperfuchsiennes provenant des séries hypergéométriques de deux variables* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. II, p. 381; année 1885.

([2]) E. PICARD, *Sur les fonctions hyperfuchsiennes provenant des séries hypergéométriques de deux variables* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XV p. 148; année 1886-1887.

Je considère en particulier l'équation

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{5}{2}.$$

Si l'on a simultanément

$$\left|\frac{2}{z}\right| < \frac{5}{6}, \quad \left|\frac{1}{t}\right| < \frac{5}{6}, \quad \left|\frac{3}{p}\right| < \frac{5}{6}$$

ou bien

$$|z| > 2, \quad |t| > 1, \quad |p| > 3,$$

il n'y a pas de solutions.

29. Soient $t = 1$, $\frac{2}{z} + \frac{3}{p} = \frac{7}{2}$, $z = \frac{4p}{7p-6}$.

Soient $7p - 6 = p'$, $z = \frac{4}{7} + \frac{24}{7p'}$. On doit donc avoir

$$4 + \frac{24}{p'} \equiv 0 \pmod 7,$$

p' étant un diviseur de 24.

Donc

$$p' = 1, 8, \qquad p = 1, 2, \qquad z = 4, 1;$$

mais, pour $t = 1$, $\frac{3}{u} = 2 + \frac{1}{z}$ élimine $z = 4$.

Reste la solution $t = z = 1$, qui convient.

Soient donc $x = 2$, $y = -2$, $z = t = 1$. On a

$$\sigma = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = 2, \qquad \frac{2-\sigma}{3} = 0, \qquad a = b = 1, \qquad c = \frac{1}{2}, \qquad d = -\frac{1}{2}.$$

Nous avons ainsi une première solution. Elle est comprise dans une solution plus générale, que nous trouverons plus tard.

30. Soient $t = -1$, $\frac{2}{z} + \frac{3}{p} = \frac{3}{2}$, $z = \frac{4p}{3(p-2)}$.

Posons $p - 2 = p'$, $z = \frac{4}{3} + \frac{8}{3p'}$. On a

$$4 + \frac{8}{p'} \equiv 0 \pmod{3},$$

d'où

$$p' = -8, -2, 1, 4,$$
$$p = -6, 3, 6, 2,$$
$$z = \quad 1, 4, 2, \infty.$$

La formule $v = -\frac{3z+4}{2z}$ élimine $z = 1, 4, 2$.

D'ailleurs l'équation $\frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = \frac{5}{2}$ élimine $t = -1$, $z = \infty$.

31. Soient maintenant $z = -2$, $p = \frac{6t}{7t+2}$; soit $7t + 2 = t'$,

$$p = \frac{6}{7} - \frac{12}{7t'}, \qquad 6 - \frac{12}{t'} \equiv 0 \pmod{7},$$

$$t' = -12, \qquad t = -2,$$

$x = 2$, $y = z = t = -2$ est une solution.

1re *solution :* $x = 2$, $y = z = t = -2$; $a = b = c = \frac{1}{2}$, $d = \frac{3}{2}$.

32. Soit $z = -1$, on a

$$\frac{3}{p} - \frac{1}{t} = \frac{9}{2}.$$

Or on a

$$\left|\frac{3}{p} - \frac{1}{t}\right| \leqq 4;$$

donc, pas de solutions.

33. Soit $z = +1$, on a

$$p = \frac{6t}{t+2}, \qquad t + 2 = t', \qquad p = 6 - \frac{12}{t'},$$

$$t' = -12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12, \infty,$$

$$t = -14, -8, -6, -5, -4, -3, -1, 1, 2, 4, 10, \infty, -2.$$

D'ailleurs la formule $q = \frac{6t}{7t-4}$ élimine

$$t = -14, -8, -6, -5, -4, -3, -1, 2, 10, \infty, -2.$$

Reste

$$t = 1, 4;$$

$t = 1$ a déjà été essayé (29).

$\frac{3}{u} = 2 + \frac{1}{t}$ élimine $t = 4$.

34. Soit $z = +2$, on a

$$p = \frac{6t}{3t+2}, \qquad 3t+2 = t', \qquad p = 2 - \frac{4}{t'}.$$

$$t' = -4,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 4,\ \infty,$$
$$3t = -6,\ -4,\ -3,\ -1,\ 2,\ \infty,$$

$$t = -2,\ -1,\ \infty.$$

La formule $v = \frac{6t}{2-3t}$ élimine $t = -2, -1$.

$x = 2$, $y = -2$, $z = 2$, $t = \infty$ est une solution.

2e *solution :* $x = y = 2, \quad z = -2, \quad t = \infty, \quad a = b = 1, \quad c = 0, \quad d = \frac{1}{2}.$

35. Revenons au nº **28**. Soit $|p| \leqq 3$. On peut supposer

$$|z| > 2, \qquad |t| > 2, \qquad \text{d'où} \qquad \max.\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = 1.$$

On doit donc avoir $\left|\frac{5}{2} - \frac{3}{p}\right| \leqq 1$;

$$\frac{5}{2} - \frac{3}{p} \leqq 1 \quad \text{donne} \quad p \leqq 2,$$

en supposant $p > 0$. Or

$$\frac{3}{p} - \frac{5}{2} \leqq 1 \quad \text{donne} \quad p > 0,$$

donc

$$p = 1,\ 2,$$

$p = 1$:

$$\frac{1}{t} - \frac{2}{z} = \frac{1}{2}, \qquad t = \frac{2z}{z+4}; \qquad z + 4 = z' \qquad t = 2 - \frac{8}{z'},$$

$$z' = -8,\ -4,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ \infty,$$

$$z = -12,\ -8,\ -6,\ -5,\ -3,\ -2,\ 4,\ \infty,\ -4,$$
$$t = 3,\ 4,\ 6,\ 10,\ -6,\ -2,\ 1,\ 2,\ \infty.$$

J'écarte les solutions pour lesquelles on n'a pas $|z| > 2$, $|t| > 2$.

La formule $u = \frac{2z}{z+2}$ élimine $z = -12, -8, -5$. Reste

$$z = -6,\ -3,\ -4.$$
$$t = 6,\ -6,\ \infty.$$

$2r + z = 0$ élimine $z = -3$; $q = \frac{2z}{z-2}$ élimine $z = -6, -4$.

La formule $v = -\frac{3z+4}{2z}$ élimine $z = 1, 4, 2$.

D'ailleurs l'équation $\frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = \frac{5}{2}$ élimine $t = -1$, $z = \infty$.

31. Soient maintenant $z = -2$, $p = \frac{6t}{7t+2}$; soit $7t + 2 = t'$,

$$p = \frac{6}{7} - \frac{12}{7t'}, \qquad 6 - \frac{12}{t'} \equiv 0 \pmod{7},$$

$$t' = -12, \qquad t = -2,$$

$x = 2$, $y = z = t = -2$ est une solution.

1re *solution :* $x = 2$,	$y = z = t = -2$;	$a = b = c = \frac{1}{2}$,	$d = \frac{3}{2}$.

32. Soit $z = -1$, on a

$$\frac{3}{p} - \frac{1}{t} = \frac{9}{2}.$$

Or on a

$$\left|\frac{3}{p} - \frac{1}{t}\right| \leq 4;$$

donc, pas de solutions.

33. Soit $z = +1$, on a

$$p = \frac{6t}{t+2}, \qquad t + 2 = t', \qquad p = 6 - \frac{12}{t'},$$

$$t' = -12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12, \infty,$$
$$t = -14, -8, -6, -5, -4, -3, -1, 1, 2, 4, 10, \infty, -2.$$

D'ailleurs la formule $q = \frac{6t}{7t-4}$ élimine

$$t = -14, -8, -6, -5, -4, -3, -1, 2, 10, \infty, -2.$$

Reste

$$t = 1, 4;$$

$t = 1$ a déjà été essayé (29).

$\frac{3}{u} = 2 + \frac{1}{t}$ élimine $t = 4$.

34. Soit $z = +2$, on a

$$p = \frac{6t}{3t+2}, \qquad 3t+2 = t', \qquad p = 2 - \frac{4}{t'}.$$

$$t' = -4, -2, -1, 1, 2, 4, \infty,$$
$$3t = -6, -4, -3, -1, 2, \infty,$$
$$t = -2, -1, \infty.$$

La formule $v = \frac{6t}{2-3t}$ élimine $t = -2, -1$.

$x = 2$, $y = -2$, $z = 2$, $t = \infty$ est une solution.

2ᵉ *solution :* $x = y = 2$, $z = -2$, $t = \infty$, $a = b = 1$, $c = 0$, $d = \frac{1}{2}$.

35. Revenons au nº 28. Soit $|p| \leqq 3$. On peut supposer

$$|z| > 2, \qquad |t| > 2, \qquad \text{d'où} \qquad \max.\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = 1.$$

On doit donc avoir $\left|\frac{5}{2} - \frac{3}{p}\right| \leqq 1$;

$$\frac{5}{2} - \frac{3}{p} \leqq 1 \quad \text{donne} \quad p \leqq 2,$$

en supposant $p > 0$. Or

$$\frac{3}{p} - \frac{5}{2} \leqq 1 \quad \text{donne} \quad p > 0,$$

donc

$$p = 1, 2,$$

$p = 1$:

$$\frac{1}{t} - \frac{2}{z} = \frac{1}{2}, \qquad t = \frac{2z}{z+4}; \qquad z+4 = z' \qquad t = 2 - \frac{8}{z'},$$

$$z' = -8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8, \infty,$$

$$z = -12, -8, -6, -5, -3, -2, 4, \infty, -4,$$
$$t = 3, 4, 6, 10, -6, -2, 1, 2, \infty.$$

J'écarte les solutions pour lesquelles on n'a pas $|z| > 2$, $|t| > 2$.

La formule $u = \frac{2z}{z+2}$ élimine $z = -12, -8, -5$. Reste

$$z = -6, -3, -4.$$
$$t = 6, -6, \infty.$$

$2r + z = 0$ élimine $z = -3$; $q = \frac{2z}{z-2}$ élimine $z = -6, -4$.

36. $p = 2$:

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = 1, \qquad z = \frac{2t}{t+1}, \qquad t+1 = t', \qquad z = 2 - \frac{2}{t'},$$

$$t' = -2, -1, 1, 2, \infty,$$
$$t = -3, -2, 1, \infty, -1,$$
$$z = 3, \quad 2.$$

La seule solution à essayer est $t = -3$; $z = 3$ or elle donne q

37. Reportons-nous au n° 27 et faisons $y = -1$.
Le système à résoudre est le suivant :

$$\frac{3}{u} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = 2, \qquad \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{7}{2},$$
$$\frac{1}{t} - \frac{2}{z} - \frac{3}{v} = 1, \qquad \frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{z} - \frac{2}{t} - \frac{3}{w} = 1, \qquad \frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = \frac{7}{2}.$$

Prenons la dernière de ces équations. Si l'on a simultané

$$\left|\frac{2}{t}\right| < \frac{7}{6}, \quad \left|\frac{1}{z}\right| < \frac{7}{6}, \quad \left|\frac{3}{q}\right| < \frac{7}{6}, \quad \text{ou bien} \quad |t| > 1, \quad |z$$

il n'y a pas de solutions.

38. Soit donc $t = -1$; $\frac{3}{q} - \frac{1}{z} = \frac{11}{2}$ n'admet pas de so

39. Soit $t = +1$,

$$\frac{3}{q} - \frac{1}{z} = \frac{3}{2}, \qquad z = \frac{2q}{3(2-q)},$$
$$2 - q = q', \qquad z = \frac{4}{3q'} - \frac{2}{3}, \qquad \frac{4}{q'} - 2 \equiv 0$$
$$q' = -4, -1,$$
$$q = 6, \quad 3, 2,$$
$$z = -1, -2, \infty.$$

$u = \frac{3z}{3z+1}$ élimine $z = -1, -2$; reste la solution t

$w = -\frac{5}{6}$.

40. On peut maintenant supposer

$$|z| > 1, \qquad |t| > 1, \qquad \max\left(\frac{2}{t} - \frac{1}{z}\right) = \frac{3}{2}, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{7}{2} - \frac{3}{q}\right| \leqq \frac{3}{2};$$

$$\frac{7}{2} - \frac{3}{q} \leqq \frac{3}{2} \quad \text{donne} \quad q \leqq 1,$$

$$\frac{3}{q} - \frac{7}{2} \leqq \frac{3}{2} \quad \text{donne} \quad q > 0,$$

donc

$$q = 1,$$

$$\frac{2}{t} - \frac{1}{z} = \frac{1}{2}, \qquad z = \frac{2t}{4-t}, \qquad 4 - t = t', \qquad z = \frac{8}{t'} - 2,$$

$$t' = -8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8, \infty,$$

$$t = 12, 8, 6, 5, 3, 2, -4, \infty, 4,$$
$$z = -3, -4, -6, -10, 6, 2, -1, -2, \infty.$$

J'écarte immédiatement la solution

$$\begin{matrix} t = -4 \\ z = -1 \end{matrix} \quad \text{où} \quad |z| = 1.$$

$u = \dfrac{2t}{t+2}$ élimine $t = 12, 8, 6, 5, 3, 4$; reste

$$t = 2, \ \infty,$$
$$z = 2, \ -2.$$

$t = \infty$, $z = -2$ donnent $p = \frac{2}{3}$; $x = 2$, $y = -1$, $z = t = 2$ donnent une solution,

$$a = b = c = 1, \qquad d = -\tfrac{1}{2};$$

mais cette solution rentre dans une solution plus générale que nous trouverons plus tard.

41. Reportons-nous au n° 27, et faisons $y = 1$.

Le système à résoudre est le suivant

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} - \frac{3}{u} = 2, \qquad \frac{1}{t} - \frac{2}{z} - \frac{3}{p} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = 1, \qquad \frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{5}{2},$$

$$\frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{w} = 1, \qquad \frac{1}{z} - \frac{2}{t} - \frac{3}{q} = \frac{1}{2}.$$

Considérons [illegible] de ces équations. Pour

[illegible]

Il n'y a donc pas de solutions.

12. Soit $z = 1$, on a

$$t = \frac{u}{4u - 3}, \quad 4u - 3 = u', \quad t = \frac{1}{4} + \frac{3}{4u'}, \quad \ldots \equiv 0 \pmod 3.$$

$u = 1$, $t = 1$ est la seule solution; elle donne

$$p = [illegible].$$

13. $z = 1$, on a

$$t = \frac{u}{u + 3}, \quad u + 3 = u', \quad t = 1 - \frac{3}{u'},$$

$$u' = 3, \ 1, \ 1, \ 3,$$

$$u = 6, \ 4, \ 2, 2, \ 3,$$
$$t = 2, \ 4, \ 2, 1, 2.$$

[illegible] élimine $t = 2, 4, 2$.

$t = 2$ donne une solution qui rentre dans une solution plus générale que nous trouverons plus tard.

Solution : [illegible] $d = 0$.

14. Revenons au n° 11. On peut supposer

$$|s| \geq 1, \quad |t| \geq 1, \quad \max\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{t}\right) \leq 1,$$

d'où

$$\left|\frac{3}{u} + 1\right| \leq 1,$$

$\frac{3}{u} [illegible]$ donne

$$\frac{1}{u} [illegible].$$

$\frac{3}{u} + 2 \leqq 1$ donne

$$\frac{1}{u} \leqq -\frac{1}{3},$$

d'où

$$u = -1,\ -2,\ -3.$$

Soit $u = -3$,

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = 1 \qquad z = \frac{t}{t-1},$$

$$t = 2,\ \infty,\ 1,$$

$$z = 2,\ 1,\ \infty.$$

$t = \infty$, $z = 1$ donnent

$$w = \tfrac{3}{2}.$$

4e *solution :* $x = y = z = 2, \quad t = 1, \quad a = b = c = \frac{1}{3}, \quad d = \frac{5}{6}.$

45. Soit $u = -2$,

$$z = \frac{2t}{t-2},$$

$$t = -2,\quad 1,\ 3,\ 4,\ 6,\ \infty,\ 2,$$
$$z = \quad 1,\ -2,\ 6,\ 4,\ 3,\ 2,\ \infty.$$

Nous écartons les solutions où l'on n'a pas $|z| > 1$, $|t| > 1$.

5e *solution :* $x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3, \quad t = 6, \quad a = 1, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{3}, \quad d = \frac{1}{6}.$
6e *solution :* $x = y = 4, \quad z = 1, \quad t = 2, \quad a = b = \frac{1}{4}, \quad c = 1, \quad d = \frac{1}{2}.$
7^e *solution :* $x = y = 2, \quad z = 1, \quad t = \infty, \quad a = b = \frac{1}{2}, \quad c = 1, \quad d = 0.$

46. $u = -1$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = -1,$$

$$t = -2,\quad \infty,\ -1,$$

$$z = -2,\ -1,\quad \infty.$$

$t = z = -2$ donne

$$r = \tfrac{2}{3}.$$

47. Reportons-nous au n° 27.

Soit $y = 2$. Les équations à résoudre sont

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} - \frac{3}{u} = 1, \qquad \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = 2,$$

$$\frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{w} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = \frac{1}{2}.$$

Prenons l'équation $\frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = 2$.

Si l'on a

$$\left|\frac{2}{z}\right| < \frac{2}{3}, \quad \left|\frac{2}{t}\right| < \frac{2}{3}, \quad \left|\frac{3}{r}\right| < \frac{2}{3}, \quad \text{ou} \quad |z| > 3, \quad t| > 3, \quad |r| > 4,$$

il n'y a pas de solutions.

48. Soit $z = 3$,

$$\frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{4}{3},$$

$$t = -12, 6, 2.$$

8° *solution :*	$x = y = 2$,	$z = 3$,	$t = -12$,	$a = b = \frac{3}{4}$,	$c = \frac{7}{12}$,	$d = \frac{1}{6}$.
9° *solution :*	$x = y = 2$,	$z = 3$,	$t = 6$,	$a = b = \frac{2}{3}$,	$c = \frac{1}{2}$,	$d = \frac{1}{3}$.
10° *solution :*	$x = y = z = 2$,		$t = 3$,	$a = b = c = \frac{5}{9}$,		$d = \frac{7}{18}$.

49. $z = 2$ donne

$$\frac{2}{t} + \frac{3}{r} = 1,$$

$$r = -3, \quad 1, \quad 2, 4, 5, 6, 9, \infty, 3,$$
$$t = \quad 1, -1, -4, 8, 5, 4, 3, 2, \infty;$$

les valeurs $t = 1, -1$ sont écartées, puisqu'on a déjà fait $y = 1, y = -1$.

11ᵉ *solution :*	$x = y = z = 2,$	$t = -4,$	$a = b = c = \frac{3}{4},$	$d = 0.$
12ᵉ *solution :*	$x = y = z = 2,$	$t = 8,$	$a = b = c = \frac{5}{8},$	$d = \frac{1}{4}.$
13ᵉ *solution :*	$x = y = z = 2,$	$t = 5,$	$a = b = c = \frac{3}{5},$	$d = \frac{3}{10}.$
14ᵉ *solution :*	$x = y = z = 2,$	$t = 4,$	$a = b = c = \frac{7}{12},$	$d = \frac{1}{3}.$

15ᵉ *solution :*	$x = y = z = 2,$	$t = 3,$	$a = b = c = \frac{5}{9},$	$d = \frac{7}{18}.$
16ᵉ *solution :*	$x = y = z = t = 2,$		$a = b = c = d = \frac{1}{2}.$	
17ᵉ *solution :*	$x = y = z = 2,$	$t = \infty,$	$a = b = c = \frac{2}{3},$	$d = \frac{1}{6}.$

50. Il est inutile de faire $z = 1, -1, -2$, puisque nous avons déjà donné ces valeurs à y.

Soit $z = -3$, on a

$$\frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{8}{3},$$

$$r = 1,$$
$$t = -6.$$

18ᵉ *solution :*	$x = y = 2,$	$z = -3,$	$t = -6,$	$a = b = 1,$	$c = \frac{1}{6},$	$d = \frac{1}{3}.$

51. Revenons au nº 47. On peut supposer

$$|z| > 3, \qquad |t| > 3, \qquad \max\left(\frac{2}{z} + \frac{2}{t}\right) = 1,$$

d'où

$$\left|2 - \frac{3}{r}\right| \leqq 1.$$

$2 - \frac{3}{r} \leqq 1$ donne

$$\frac{3}{r} \geqq 1 \qquad \text{donc} \qquad r > 0 \quad \text{et} \quad r \leqq 3,$$

$\frac{3}{r} - 2 \leq 1$ donne

$$r \geq 1 \qquad \text{donc} \qquad r = 1, 2, 3.$$

$r = 1$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = -\frac{1}{2},$$

$$t = -6, -4, -3, -1, \quad 2, \quad \infty, -2,$$
$$z = -3, -4, -6, \quad 2, -1, -2, \quad \infty.$$

Si nous écartons les solutions pour lesquelles on n'a pas $|z| > 3, |t| > 3$, reste

$$t = z = -4.$$

19ᵉ *solution :* $x = y = 2, \quad z = t = -4, \quad a = b = 1, \quad c = d = \frac{1}{4}.$

52. $r = 2$ donne

$$\frac{2}{z} + \frac{2}{t} = \frac{1}{2},$$

$$t = -12, -4, \quad 2, \quad 3, \; 5, \; 6, 8, 12, 20, \infty, 4,$$
$$z = \quad 3, \quad 2, -4, -12, 20, 12, 8, \; 6, \; 5, \; 4, \infty.$$

20ᵉ *solution :* $x = y = 2, \quad z = 5, \quad t = 20, \quad a = b = \frac{3}{4}, \quad c = \frac{9}{20}, \quad d = \frac{3}{10}.$
21ᵉ *solution :* $x = y = 2, \quad z = 6, \quad t = 12, \quad a = b = \frac{3}{4}, \quad c = \frac{5}{12}, \quad d = \frac{1}{3}.$
22ᵉ *solution :* $x = y = 2, \quad z = t = 8, \quad a = b = \frac{3}{4}, \quad c = d = \frac{3}{8}.$
23ᵉ *solution :* $x = y = 2, \quad z = 4, \quad t = \infty, \quad a = b = \frac{3}{4}, \quad c = \frac{1}{2}, \quad d = \frac{1}{4},$

53. $r = 3$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{2},$$

$$t = -2, \quad 1, 3, 4, 6, \infty, \; 2,$$
$$z = \quad 1, -2, 6, 4, 3, \; 2, \infty.$$

24ᵉ *solution :* $x = y = 2, \quad z = t = 4, \quad b = b = \frac{2}{3}, \quad c = d = \frac{5}{12}.$

54. Reportons-nous au n° 27 et faisons $y = -3$.
Les équations à résoudre sont

$$\frac{3}{u} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = \frac{2}{3}, \qquad \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{13}{6},$$

$$\frac{1}{t} - \frac{2}{z} - \frac{3}{v} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{7}{6},$$

$$\frac{1}{z} - \frac{2}{t} - \frac{3}{w} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = \frac{13}{6}.$$

Prenons l'équation

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{13}{6}.$$

Si l'on a simultanément

$$\left|\frac{2}{z}\right| < \frac{13}{18}, \quad \left|\frac{1}{t}\right| < \frac{13}{18}, \quad \left|\frac{3}{p}\right| < \frac{13}{18},$$

ou bien

$$|z| > 2, \quad |t| > 1, \quad |p| > 4,$$

il n'y a pas de solutions; or on peut supposer

$$|z| > 2, \quad |t| > 2, \qquad \text{d'où} \qquad \max.\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = 1.$$

Donc

$$\left|\frac{13}{6} - \frac{2}{p}\right| \leqq 1, \qquad \text{d'où} \qquad p = 1,\ 2.$$

55. Soit $p = 1$, on a

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = -\frac{5}{6},$$

$$z = -6,\ -4,\ -3,\ -2,\ 12,$$
$$t = 2,\ 3,\ 6,\ -6,\ 1.$$

$z = -4$, $t = 3$ donne

$$w = -\tfrac{12}{5}.$$

25ᵉ *solution :* $x = y = -3, \quad z = 2, \quad t = 6, \quad a = b = \frac{1}{3}, \quad c = \frac{7}{6}, \quad d = \frac{5}{6}.$

56. Soit $p = 2$,

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{2}{3},$$

$$\begin{array}{lllllll} z = & -6, & 2, & 4, & 6, & 12, & 3, \\ t = & 1, & -3, & 6, & 3, & 2, & \infty. \end{array}$$

$q = \frac{6z}{7z-6}$ élimine $z = 4,\ 3$; reste

$$z = 6,$$
$$t = 3,$$

qui donne

$$u = \tfrac{18}{7}.$$

57. Reportons-nous au n° 27 et faisons $y = 3$, on a

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} - \frac{3}{u} = \frac{2}{3}, \qquad \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{5}{6},$$

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{11}{6},$$

$$\frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{w} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = \frac{5}{6}.$$

Considérons l'équation

$$\frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{11}{6}.$$

Si l'on a simultanément

$$\left|\frac{2}{z}\right| < \frac{11}{18}, \quad \left|\frac{2}{t}\right| < \frac{11}{18}, \quad \left|\frac{3}{r}\right| < \frac{11}{18},$$

ou bien

$$|z| > 3, \quad |t| > 3, \quad |r| > 4,$$

il n'y a pas de solutions. Or on peut supposer

$$|z| > 2, \quad |t| > 2.$$

58. Soit $z = 3$, on a

$$\frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{7}{6}.$$

Pour $|t| > 3$, $|r| > 5$, il n'y a pas de solutions; soit $t = 3$ (alors $r = 6$), on trouve ensuite

$$t = -6,\ 12.$$

$x = y = z = 3$, $t = 2$ est une solution.

26ᵉ *solution* :	$x = y = z = 3$,		$t = 2$,	$a = b = c = \frac{1}{2}$,		$d = \frac{2}{3}$.
27ᵉ *solution* :	$x = y = 3$,	$z = 2$,	$t = -6$,	$a = b = \frac{2}{3}$,	$c = \frac{5}{6}$,	$d = \frac{1}{6}$.
28ᵉ *solution* :	$x = y = 3$,	$z = 2$,	$t = 12$,	$a = b = \frac{7}{12}$,	$c = \frac{3}{4}$,	$d = \frac{1}{3}$.

59. On a

$$\max.\left(\frac{2}{z} + \frac{2}{t}\right) = 1, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{11}{6} - \frac{3}{r}\right| \leqq 1,$$

ce qui donne

$$r = 2,\ 3,$$

soit $r = 2$,

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{6},$$

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrrrrrr} t = & -30, & -12, & -6, & -3, & 2, & 3, & 4, & 5, & 7, & 8, & 9, & 10, & 12, & 15, & 18, & 24, \\ z = & 5, & 4, & 3, & 2, & -3, & -6, & -12, & -30, & 42, & 24, & 18, & 15, & 12, & 10, & 9, & 8, \end{array}$$

$$\begin{array}{lrrr} t = & 42, & \infty, & 6, \\ z = & 7, & 6, & \infty. \end{array}$$

$p = \dfrac{6t}{t+6}$ élimine $t = -30, 7, 8, 9, 10$; reste

$$\begin{array}{lrrr} t = & -12, & 12, & \infty, \\ z = & 4, & 12, & 6. \end{array}$$

$q = \dfrac{6z}{z+6}$ élimine $z = 4$.

29ᵉ *solution* :	$x = 2$,	$y = 3$,	$z = 12$,	$t = +12$,	$a = b = \frac{5}{12}$,		$c = \frac{5}{6}$,	$d = \frac{2}{3}$.
30ᵉ *solution* :	$x = 2$,	$y = 3$,	$z = 6$,	$t = \infty$,	$a = \frac{5}{6}$,	$b = \frac{2}{3}$,	$c = \frac{1}{2}$,	$d = \frac{1}{3}$.

60. $r = 3$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{5}{12},$$

pour $|z| > 4$, $|t| > 4$, pas de solutions,

$$\begin{array}{lrr} t = & 3, & 4, \\ z = & 12, & 6. \end{array}$$

la première solution a déjà été trouvée (58).

| 31ᵉ *solution :* $x = 2$, $y = 3$, $z = 4$, $t = 6$, $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{7}{12}$, $c = \frac{1}{2}$, $d = \frac{5}{12}$.

61. Reportons-nous maintenant au n° 27 et soit $y = -4$. Le système à résoudre est

$$\frac{3}{u} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = 2,$$

$$\frac{1}{t} - \frac{2}{z} - \frac{3}{v} = \frac{1}{4}, \qquad \frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{5}{4},$$

$$\frac{1}{z} - \frac{2}{t} - \frac{3}{w} = \frac{1}{4}, \qquad \frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = 2.$$

L'équation $\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = 2$ n'aura pas de solution si l'on prend simultanément

$$\left|\frac{2}{z}\right| < \frac{2}{3}, \quad \left|\frac{1}{t}\right| < \frac{2}{3}, \quad \left|\frac{3}{p}\right| < \frac{2}{3},$$

ou

$$|z| > 3, \quad |t| > 1, \quad |p| > 4.$$

Or on peut supposer

$$|z| > 3, \quad |t| > 3;$$

donc

$$\max.\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{3}{4};$$

ceci donne la condition

$$\left|2 - \frac{3}{p}\right| \leqq \frac{3}{4}, \qquad \text{d'où} \qquad p = 2.$$

62. Soit donc $p = 2$,

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{1}{2},$$

$$\begin{array}{llllllllll} z = & 12, & 8, & 6, & 5, & 3, & 2, & -4, & \infty, & 4, \\ t = & -3, & -4, & -6, & -10, & 6, & 2, & -1, & -2, & \infty, \end{array}$$

$r = \frac{4z}{3z-8}$ élimine $z = 6, 5$; $q = \frac{z-1}{z}$ élimine $z = 8, 4$.

63. Revenons au n° 27 et soit $y = 4$. Le système à résoudre est

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} - \frac{3}{u} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = 1,$$

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = \frac{1}{4}, \qquad \frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{7}{4},$$

$$\frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{w} = \frac{1}{4}, \qquad \frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = 1.$$

L'équation

$$\frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{7}{4}$$

n'aura pas de solutions si l'on prend simultanément

$$\left|\frac{2}{z}\right| < \frac{7}{12}, \quad \left|\frac{2}{t}\right| < \frac{7}{12}, \quad \left|\frac{3}{r}\right| < \frac{7}{12},$$

ou bien

$$|z| > 3, \quad |t| > 3, \quad |r| > 5.$$

On peut supposer

$$|z| > 3, \quad |t| > 3, \qquad \text{d'où} \qquad \max.\left(\frac{2}{z} + \frac{2}{t}\right) = 1.$$

Donc

$$\left|\frac{7}{4} - \frac{3}{r}\right| \leqq 1, \qquad \text{d'où} \qquad r = 2, 3, 4.$$

64. Soit $r = 2$,

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{8},$$

$z =$	-56,	-24,	-8,	4,	6,	7,	9,	10,	12,	16,	24,	40,	72, ∞,	8,
$t =$	7,	6,	4,	-8,	-24,	-56,	72,	40,	24,	16,	12,	10,	9, 8,	∞.

$p = \dfrac{4t}{t+4}$ élimine $t = 7, 6, 72, 40, 24, 16, 8$. Reste

$$z = -8,$$
$$t = 4.$$

32e *solution :* $x = y = 4$, $z = 2$, $t = -8$, $a = b = \frac{5}{8}$, $c = \frac{7}{8}$, $d = \frac{1}{4}$

65. $r = 3$ donne

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{t} = \frac{3}{8};$$

pour $|z| > 5$, $|t| > 5$, il n'y a pas de solutions.

$$t = 4, \quad z = 8$$

donne

$$q = \tfrac{24}{5}.$$

66. $r = 4$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{2};$$

$$z = -2, \quad 1,\ 3,\ 4,\ 6,\ \infty,\ 2,$$
$$t = \ \ 1, \ -2,\ 6,\ 4,\ 3,\ 2,\ \infty.$$

33ᵉ *solution :* $x = y = z = 4$,	$t = 2$,	$a = b = c = \frac{1}{2}$,	$d = \frac{3}{4}$

67. Revenons au n° 27, soit $y = -5$.

On a à résoudre le système suivant :

$$\frac{3}{u} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = \frac{2}{5}, \qquad \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{19}{10},$$
$$\frac{1}{t} - \frac{2}{z} - \frac{3}{v} = \frac{1}{5}, \qquad \frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{13}{10},$$
$$\frac{1}{z} - \frac{2}{t} - \frac{3}{w} = \frac{1}{5}, \qquad \frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = \frac{19}{10}.$$

Considérons l'équation

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{19}{10}.$$

Il n'y aura pas de solutions si l'on a simultanément

$$\left|\frac{2}{z}\right| < \frac{19}{30}, \quad \left|\frac{1}{t}\right| < \frac{19}{30}, \quad \left|\frac{3}{p}\right| < \frac{19}{30} \qquad \text{ou} \qquad |z| > 3, \quad |t| > 1, \quad |p| > 4.$$

Or on peut supposer $|z| > 4$, $|t| > 4$; donc

$$\max.\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{t}\right) = \frac{3}{5}, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{19}{10} - \frac{3}{p}\right| \leqq \frac{3}{5};$$

d'où

$$p = 2.$$

68. $p = 2$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{2}{5};$$

$$\begin{array}{llllll} z = & 30, & 10, & 6, & 4, & -20, & 5, \\ t = & -3, & -5, & -15, & 10, & -2, & \infty. \end{array}$$

$r = \dfrac{10z}{7z - 20}$ élimine $z = 6, 5$. Reste

$$z = 10,$$
$$t = -5,$$

qui donne

$$q = \tfrac{5}{4}.$$

69. Revenons au n° 27, soit $y = 5$. Le système à résoudre est

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} - \frac{3}{u} = \frac{2}{5}, \qquad \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{11}{10},$$

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = \frac{1}{5}, \qquad \frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{17}{10},$$

$$\frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{w} = \frac{1}{5}, \qquad \frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = \frac{11}{10}.$$

Prenons l'équation

$$\frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{17}{10}.$$

Elle n'aura pas de solutions, si l'on a simultanément

$$\left|\frac{2}{z}\right| < \frac{17}{30}, \quad \left|\frac{2}{t}\right| < \frac{17}{30}, \quad \left|\frac{3}{r}\right| < \frac{17}{30} \quad \text{ou bien} \quad |z| > 3, \quad |t| > 3, \quad |r| > 5.$$

Or on peut supposer $|z| > 4$, $|t| > 4$, donc

$$\text{max.}\left(\frac{2}{z} + \frac{2}{t}\right) = \frac{4}{5}, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{17}{10} - \frac{3}{r}\right| \leqq \frac{4}{5};$$

donc

$$r = 2, 3.$$

70. Soit $r = 2$,

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{10},$$

$$\begin{array}{l} z = -90, -40, -15, -10, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 20, 30, 35, 60, 110, \\ t = 9, 8, 6, 5, -10, -15, -40, -90, 110, 60, 35, 30, 20, 15, 14, 12, 11, \end{array}$$

$$z = \infty, 10,$$
$$t = 10, \infty.$$

$p = \dfrac{10t}{3t+10}$ élimine $t = 9, 8, 6, 110, 60, 35, 20, 10$. Reste

$$z = -10,\ 15,$$
$$t = \quad 5,\ 30.$$

$q = \dfrac{10z}{3z+10}$ élimine $z = 15$.

34ᵉ *solution :* $x = y = 5,\quad z = 2,\quad t = -10,\quad a = b = \frac{3}{5},\quad c = \frac{9}{10},\quad d = \frac{3}{10}$

71. Soit $r = 3$,

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{7}{20}.$$

Pour $|z| > 5$, $|t| > 5$, il n'y a pas de solutions; or $z = 5$ donne

$$t = \tfrac{20}{3}.$$

72. Revenons au nº 27. On peut supposer $|y| > 5$, $|z| > 5$, $|t| > 5$. Donc

$$\max.\left(\frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{5}{6}, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{3}{2} - \frac{3}{p}\right| \leq \frac{5}{6};$$

donc

$$p = 2,\ 3,\ 4.$$

De même,

$$q = 2,\ 3,\ 4, \qquad r = 2,\ 3,\ 4.$$

D'ailleurs, en ajoutant les équations du second groupe, on trouve

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{3}{2};$$

de là on tire

$$y = \frac{6pqr}{3pqr + 2pq - 4r(p+q)},$$
$$z = \frac{6pqr}{3pqr + 2pr - 4q(p+r)},$$
$$t = \frac{6pqr}{3pqr + 2rq - 4p(q+r)};$$

puis

$$u = \frac{3pqr}{r(p+q) - 2pq}, \qquad v = \frac{3pqr}{q(p+r) - 2pr}, \qquad w = \frac{3pqr}{p(q+r) - 2qr}.$$

73. Soit $p = q = 2$, $r = 2, 3, 4$.

35e *solution :* $x = y = z = \infty$, $t = 2$, $a = b = c = \frac{1}{2}$, $d = 1$
36e *solution :* $x = y = 9$, $t = 2$, $z = -18$, $a = b = \frac{5}{9}$, $c = \frac{17}{18}$, $d = \frac{7}{18}$
37e *solution :* $x = y = 6$, $t = 2$, $z = -12$, $a = b = \frac{7}{12}$, $c = \frac{11}{12}$, $d = \frac{1}{3}$

74. $p = 2$, $q = 3$, $r = 3, 4$; $w = \frac{9r}{3 - 2r}$ élimine $r = 4$; $p = 2$, $q = r = 3$ donnent

$$t = \tfrac{9}{2}.$$

75. $p = 2$, $q = r = 4$ donne

$$x = 2, \qquad y = 3, \qquad z = t = 12,$$

solution déjà trouvée (n° 59).

76. $p = q = 3$, $r = 3, 4$; $p = q = 3$, $r = 4$ donne

$$z = t = \tfrac{9}{2}.$$

38e *solution :* $x = y = z = 6$, $t = 2$, $a = b = c = \frac{1}{2}$, $d = \frac{5}{6}$

77. $p = 3$, $q = r = 4$ donne

$$t = \tfrac{18}{5}.$$

78. $p = q = r = 4$ donne la 33e solution.

79. Revenons aux nos 26 et 25, et faisons $x = -1$.
On a à résoudre le système suivant :

$$\frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{u} = 3, \qquad \frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = 0,$$

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} - \frac{1}{y} + \frac{3}{v} = 3, \qquad \frac{2}{t} + \frac{2}{y} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = 0,$$

$$\frac{2}{t} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} + \frac{3}{w} = 3, \qquad \frac{2}{z} + \frac{2}{t} - \frac{1}{y} + \frac{3}{r} = 0.$$

La première équation n'aura pas de solutions, si l'on suppose simultanément

$$\left|\frac{2}{y}\right| < \frac{3}{4}, \quad \left|\frac{1}{z}\right| < \frac{3}{4}, \quad \left|\frac{1}{t}\right| < \frac{3}{4}, \quad \left|\frac{3}{u}\right| < \frac{3}{4}$$

ou

$$|y| > 2, \quad |z| > 1, \quad |t| > 1, \quad |u| > 4.$$

Remarquons que nous avons trouvé *toutes* les solutions où l'un des nombres x, y, z, t est égal à 2. Nous essayerons donc $y = -2, -1, +1$.

80. Soit $y = 1$. Le système à résoudre devient

$$\frac{3}{u} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = 1, \qquad \frac{1}{t} - \frac{2}{z} - \frac{3}{p} = 2,$$

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = 4, \qquad \frac{1}{z} - \frac{2}{t} - \frac{3}{q} = 2,$$

$$\frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{w} = 4, \qquad \frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = 1.$$

L'équation $\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = 4$ n'aura pas de solutions si l'on prend simultanément

$$\left|\frac{2}{z}\right| < \frac{4}{3}, \quad \left|\frac{1}{t}\right| < \frac{4}{3}, \quad \left|\frac{3}{v}\right| < \frac{4}{3} \quad \text{ou} \quad |z| > 1, \quad |v| > 2.$$

81. $z = -1$ donne

$$\frac{3}{v} - \frac{1}{t} = 6,$$

qui n'a pas de solutions, car

$$\max.\left(\frac{3}{v} - \frac{1}{t}\right) = 4.$$

82. $z = +1$ donne

$$\frac{3}{v} - \frac{1}{t} = 2, \qquad t = -2, -1, 1.$$

$w = \frac{3t}{5t-2}$ élimine $-2, -1$.

$x = y = z = 1$, $t = -1$ donne

$$a = b = c = 1, \qquad d = -1;$$

cette solution rentre dans une solution plus générale, que nous trouverons plus tard (86).

83. Revenons au n° 80; on peut supposer

$$|z| > 1, \qquad |t| > 1, \qquad \text{d'où} \qquad \max.\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{3}{2}.$$

Donc

$$\left|4 - \frac{3}{v}\right| \leqq \frac{3}{2}, \qquad \text{et, par suite,} \qquad v = 1.$$

$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = 1$. On a

$$\begin{aligned} t &= -3, \; -2, \; 1, \; \infty, \; -1, \\ z &= 3, \; 4, \; 1, \; 2, \; \infty. \end{aligned}$$

$w = \frac{z}{2z-1}$ élimine 3, 4, ∞.

84. Revenons au n° 79 et faisons $y = -1$. Le système à résoudre est

$$\begin{aligned} &\frac{3}{u} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = 5, &\qquad &\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = 2, \\ &\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = 2, & &\frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = 2, \\ &\frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{w} = 2, & &\frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = -1. \end{aligned}$$

Or, si nous considérons la première équation, le maximum du premier membre est précisément 5; il est atteint pour $z = t = -1$. La solution ainsi trouvée $(a = b = c = d = 1)$ rentre dans une solution plus générale que nous trouverons plus tard (86).

85. Revenons au n° 79, et faisons $y = -2$.

La première équation devient $\frac{3}{u} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = 4$. Il n'y aura pas de solutions si l'on a simultanément

$$\left|\frac{3}{u}\right| < \frac{4}{3}, \qquad \left|\frac{1}{z}\right| < \frac{4}{3}, \qquad |t| < \frac{4}{3}, \qquad \text{ou} \qquad |u| > 2.$$

Comme on a

$$\max.\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right) = 1,$$

on en conclut

$$\left|\frac{3}{u} - 4\right| \leqq 1, \qquad u = 1.$$

$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=-1$. On a

$$z=-2,\ \infty,\ -1,$$
$$t=-2,\ -1,\ \infty.$$

La solution ainsi trouvée $x=y=z=-2$; $t=-1$ rentre toujours dans la même solution générale que nous allons trouver à l'instant (86).

86. Revenons au n° 79; on suppose $|y|>2$, $|z|>2$, $|t|>2$. Donc

$$\max.\left(\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}\right)=\frac{4}{3},\qquad \text{d'où}\qquad \left|\left(3-\frac{3}{u}\right)\right|\leqq\frac{4}{3},$$

donc

$$u=1,\qquad \text{et, de même,}\qquad v=w=1.$$

Donc

$$\frac{2}{y}=\frac{1}{z}+\frac{1}{t},$$
$$\frac{2}{z}=\frac{1}{t}+\frac{1}{y},$$
$$\frac{2}{t}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z},$$

donc

$$\frac{3}{y}=\frac{3}{z}=\frac{3}{t}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t},$$

ainsi

$$y=z=t=n$$

(n étant un entier quelconque positif ou négatif).

39e *solution :* $x=y=z=-n$, $t=-1$, $a=b=c=1$, $d=\frac{1}{n}$,
n étant un nombre entier arbitraire, positif ou négatif.

87. Revenons au n° 26 et faisons $x=-5$. Le système à résoudre sera

$$\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{u}=\frac{7}{5},\qquad \frac{2}{y}+\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{p}=\frac{4}{5},$$
$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}-\frac{1}{y}+\frac{3}{v}=\frac{7}{5},\qquad \frac{2}{z}+\frac{2}{t}-\frac{1}{y}+\frac{3}{r}=\frac{4}{5},$$
$$\frac{2}{t}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}+\frac{3}{w}=\frac{7}{5},\qquad \frac{2}{t}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}+\frac{3}{q}=\frac{4}{5}.$$

La première équation n'aura pas de solutions si l'on a simultanément

$$\left|\frac{2}{y}\right| < \frac{7}{20}, \qquad \left|\frac{1}{z}\right| < \frac{7}{20}, \qquad \left|\frac{1}{t}\right| < \frac{7}{20}, \qquad \left|\frac{3}{u}\right| < \frac{7}{20},$$

ou bien

$$|y| > 5, \qquad |z| > 2, \qquad |t| > 2, \qquad |u| > 8.$$

Nous allons faire varier y dans l'intervalle $(-5, +5)$, en omettant les valeurs $y = 2, -1$, qui ne pourraient donner que des solutions déjà trouvées.

88. Soit $y = 1$; $\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = \frac{12}{5}$ n'aura pas de solutions si l'on suppose

$$\left|\frac{2}{z}\right| < \frac{4}{5}, \qquad \left|\frac{1}{t}\right| < \frac{4}{5}, \qquad \left|\frac{3}{v}\right| < \frac{4}{5} \qquad \text{ou} \qquad |z| > 2, \qquad |t| > 1, \qquad |v| > 3,$$

$t = 1$ donne

$$\frac{2}{z} + \frac{3}{v} = \frac{17}{5}, \qquad z = 5.$$

La solution correspondante ($a = b = 1$, $c = \frac{1}{5}$, $d = -\frac{1}{5}$) rentre dans une solution plus générale (146).

89. $z = -2$ donne

$$\frac{3}{v} - \frac{1}{t} = \frac{17}{5},$$

qui n'a pas de solutions.

90. $z = 1$ donne

$$\frac{3}{v} - \frac{1}{t} = \frac{2}{5} \qquad \text{et} \qquad \frac{2}{t} + \frac{3}{w} = \frac{17}{5},$$

dont la seule solution est $t = 5$ (déjà trouvée).

91. On peut supposer $|z| > 2$, $|t| > 2$,

$$\max.\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = 1, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{12}{5} - \frac{3}{v}\right| \leq 1,$$

d'où

$$v = 1, 2.$$

$v = 1$ donne

$$\frac{1}{t} - \frac{2}{z} = \frac{3}{5},$$

$$\begin{aligned} z &= -20, \ -5, \ -4, \ -3, \ 5, \\ t &= \ \ \ \ 2, \ \ \ \ 5, \ \ \ 10, \ -15, \ 1. \end{aligned}$$

$w = \dfrac{5z}{2z-5}$ élimine $z = -5, -4, -3$.

92. $v = 2$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{9}{10};$$

or on trouve

$$p = -\tfrac{7}{10}.$$

93. Revenons au n° 87 et faisons $y = -2$. On a d'abord

$$\frac{3}{u} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = \frac{12}{5},$$

équation qui n'a pas de solutions si l'on a simultanément

$$\left|\frac{3}{u}\right| < \frac{4}{5}, \qquad \left|\frac{1}{z}\right| < \frac{4}{5}, \qquad \left|\frac{1}{t}\right| < \frac{4}{5} \qquad \text{ou} \qquad |z| > 1, \qquad |t| > 1, \qquad |u| > 3.$$

D'ailleurs on a

$$\max.\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right) = 1, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{3}{u} - \frac{12}{5}\right| \leqq 1, \qquad u = 1, 2.$$

94. $u = 1$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{3}{5};$$

$$\begin{aligned} t &= 2, \ 10, \\ z &= 10, \ 2 \end{aligned}$$

ne peut donner qu'une solution déjà trouvée.

95. $u = 2$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = -\frac{9}{10};$$

$$\begin{aligned} t &= -1, \ 10, \\ z &= 10, \ \ 1 \end{aligned}$$

ne peut donner qu'une solution déjà trouvée.

96. Revenons au n° 87, et soit $y = -3$. La première équation devient

$$\frac{3}{u} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = \frac{31}{15};$$

elle n'admettra pas de solutions si l'on a simultanément

$$\left|\frac{3}{u}\right| < \frac{31}{45}, \qquad \left|\frac{1}{z}\right| < \frac{31}{45}, \qquad \left|\frac{1}{t}\right| < \frac{31}{45}, \qquad \text{ou} \qquad |u| > 4, \qquad |z| > 1, \qquad |t| > 1.$$

On a

$$\max.\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right) = \frac{2}{3}, \qquad \left|\frac{31}{15} - \frac{3}{u}\right| \leqq \frac{2}{3};$$

cette inégalité ne peut être vérifiée.

97. Revenons au n° 87 et soit $y = 3$. La deuxième équation donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = \frac{26}{15},$$

laquelle n'aura pas de solutions si l'on a simultanément

$$\left|\frac{2}{z}\right| < \frac{26}{45}, \qquad \left|\frac{1}{t}\right| < \frac{26}{45}, \qquad \left|\frac{3}{v}\right| < \frac{26}{45} \qquad \text{ou bien} \qquad |z| > 3, \qquad |t| > 1, \qquad |v| > 5.$$

98. Soit $z = 3$, l'équation devient

$$\frac{3}{v} - \frac{1}{t} = \frac{16}{15}.$$

$t = -15$ est la seule solution; elle donne

$$v = \frac{15}{11}.$$

99. Soit $|z| > 3$, $|t| > 3$,

$$\max.\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{3}{4}, \qquad \left|\frac{26}{15} - \frac{3}{v}\right| \leqq \frac{3}{4},$$

d'où

$$v = 1, 2, 3.$$

$v = 1$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = -\frac{19}{15};$$

pour $|z| > 3$, $|t| > 1$ pas de solutions. Or, $z = 3$ donne

$$t = \frac{15}{29}.$$

100. $v = 2$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{7}{30};$$

on en déduit

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{z} - \frac{1}{6},$$

qui est plus simple à résoudre; elle donne

$$z = -42, -24, -18, -15, -12, -10, -9, -8, -7, -5, -4, -3, -2, 3, 6, 12, 30, -6;$$

j'en conclus

$$z = 6, \quad 12, \quad 30,$$
$$t = 10, -15, -6,$$

comme solutions communes.

D'ailleurs $w = \dfrac{15z}{11z - 15}$ élimine $z = 6$, 12 et 30.

101. $v = 3$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{11}{15},$$

qui admet pour solution $z = 3$, $t = -15$; mais, pour $z = 3$, $t = -15$, on a

$$w = \tfrac{15}{11}.$$

102. Revenons au n° 87 et soit $y = -4$. La première équation donne

$$\frac{3}{u} = \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = \frac{19}{10};$$

il n'y aura pas de solutions si l'on a simultanément

$$|u| > 4, \qquad |z| > 1, \qquad |t| > 1.$$

Comme on peut supposer $|z| > 3$, $|t| > 3$, on a

$$\text{max.}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right) = \frac{1}{2}, \qquad \text{et, par suite,} \qquad \left|\frac{3}{u} - \frac{19}{10}\right| \leq \frac{1}{2},$$

d'où

$$u = 2.$$

$u = 2$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = -\frac{2}{5},$$

d'où

$$t = -15, -5, -3, -2, 10,$$
$$z = -3, -5, -15, 10, -2,$$

et $t = z = -5$ donne

$$v = \frac{20}{9}.$$

103. Revenons au nº 87, et faisons $y = +4$. La seconde équation devient

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = \frac{33}{20}.$$

Il n'y aura pas de solutions si l'on a simultanément

$$|z| > 3, \quad |t| > 1, \quad |v| > 5.$$

D'ailleurs

$$\max.\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{3}{4},$$

donc

$$\left|\frac{33}{20} - \frac{3}{v}\right| \leqq \frac{3}{4},$$

donc

$$v = 2, 3.$$

$v = 2$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{3}{20},$$

d'où l'on conclut

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{z} + \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{w} + \frac{1}{z} = \frac{13}{20}, \quad \frac{1}{u} + \frac{1}{w} = \frac{19}{20},$$

dont les solutions sont

$$u = 1, -20,$$
$$w = -20, 1,$$

donc, pas de solutions.

104. $v = 3$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{13}{20}, \quad \text{d'où} \quad p = -\frac{60}{7}.$$

105. Revenons au nº 87, et soit $y = -5$. On a

$$\frac{3}{u} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = \frac{9}{5},$$

qui, pour $|u| > 5$, $|z| > 1$, $|t| > 1$, n'aura pas de solutions. On a

$$\max.\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{2}{5}, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{9}{5} - \frac{3}{u}\right| \leqq \frac{2}{5},$$

et, par suite, $u = 2$, qui donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = -\frac{3}{10}, \qquad \text{d'où} \qquad r = \frac{5}{2}.$$

106. Revenons au n° 87 et soit $y = +5$. On a

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = \frac{8}{5},$$

qui n'aura pas de solutions si l'on a simultanément $|z| > 3$, $|t| > 1$, $|v| > 5$; on a

$$\max.\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{3}{5}, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{3}{v} - \frac{8}{5}\right| \leqq \frac{3}{5},$$

et, par suite,

$$v = 2, 3.$$

$v = 2$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{1}{10}, \qquad \frac{1}{u} = \frac{1}{z} + \frac{3}{10}, \qquad \frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{3}{5}, \qquad \frac{1}{u} + \frac{1}{w} = \frac{9}{10},$$

$$w = \quad 1, \; -10,$$
$$u = -10, \quad 1;$$

donc pas de solutions.

107. $v = 3$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{3}{5}, \qquad \frac{1}{u} = \frac{1}{z} + \frac{2}{15}, \qquad \frac{1}{w} + \frac{1}{z} = \frac{14}{15}, \qquad \frac{1}{u} + \frac{1}{w} = \frac{16}{15},$$

$$u = 1, \qquad u = 15,$$
$$w = 15, \qquad w = 1.$$

On trouve

$$z = -15, \qquad t = -\tfrac{15}{11};$$

donc pas de solution.

108. Revenons au n° 87. On a

$$\max.\left(\frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{2}{3}, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{7}{5} - \frac{3}{u}\right| \leqq \frac{2}{3},$$

donc

$$u = 2,\ 3,\ 4, \qquad v = 2,\ 3,\ 4, \qquad w = 2,\ 3,\ 4.$$

D'ailleurs, en ajoutant les trois premières équations membre à membre, on trouve

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = \frac{7}{5};$$

donc pas de solutions.

109. Revenons au n° 26 et faisons $x = -4$. Le système à résoudre est le suivant

$$\frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{u} = \frac{3}{2}, \qquad \frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{3}{4},$$

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} - \frac{1}{y} + \frac{3}{v} = \frac{3}{2}, \qquad \frac{2}{y} + \frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = \frac{3}{4},$$

$$\frac{2}{t} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} + \frac{3}{w} = \frac{3}{2}, \qquad \frac{2}{z} + \frac{2}{t} - \frac{1}{y} + \frac{3}{r} = \frac{3}{4}.$$

Si l'on a simultanément $|y| > 5$, $|z| > 2$, $|t| > 2$, $|u| > 8$, pas de solutions.

Faisons d'abord varier y dans l'intervalle -5, $+5$, en évitant les valeurs 2, -1, -5 qui ne pourraient que nous donner des solutions déjà trouvées.

110. Soit $y = 1$. Prenons l'équation

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = \frac{5}{2};$$

elle n'a pas de solutions si l'on prend simultanément $|z| > 2$, $|t| > 1$, $|v| > 3$.

111. Soit $t = 1$, on a

$$\frac{2}{z} + \frac{3}{v} = \frac{7}{2}, \qquad z = 1,\ 4;$$

la solution $y = t = 1$, $z = 4$ donne une solution qui rentre dans une solution plus générale que nous trouverons plus tard (146).

$y = t = z = 1$ donne

$$p = -\tfrac{4}{3}.$$

112. $z = -2$ donne

$$\frac{3}{v} - \frac{1}{t} = \frac{7}{2}.$$

$t = -2$ donne

$$r = \frac{12}{7}.$$

113. Soient $|z| > 2$, $|t| > 2$, on a

$$\max.\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = 1, \qquad \left|\frac{5}{2} - \frac{3}{v}\right| \leqq 1 \qquad v = 1,\ 2.$$

$v = 1$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = -\frac{1}{2},$$

$$\begin{array}{l} z = -12,\ -8,\ -6,\ -5,\ -3,\ -2,\ 4,\ \infty,\ -4, \\ t = \quad 3,\ \ 4,\ \ 6,\ 10,\ -6,\ -2,\ 1,\ 2,\ \infty. \end{array}$$

$w = \frac{2z}{z-2}$ élimine $z = -12,\ -8,\ -5,\ -3,\ -4$.

114. $v = 2$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = 1, \qquad \text{d'où} \qquad p = -\frac{3}{4}.$$

115. Revenons au n° 109 et soit $y = -2$. L'équation

$$\frac{3}{u} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$$

n'admettra pas de solution si l'on a simultanément $|u| > 3$, $|z| > 1$, $|t| > 1$; on a d'ailleurs

$$\max.\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right) = 1, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{3}{u} - \frac{5}{2}\right| \leqq 1 \qquad u = 1,\ 2.$$

$u = 1$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{2},$$

d'où

$$\begin{array}{l} t = \ 2,\ \ 1,\ 3,\ 4,\ 6,\ \infty,\ 2, \\ z = \ 1,\ \ 2,\ 6,\ 4,\ 3,\ 2,\ \infty. \end{array}$$

$p = \frac{4t}{t+4}$ élimine $t = 6$.

10ᵉ *solution* : $x = y = 4$, $z = -2$, $t = -4$, $a = b = 1$, $c = \frac{1}{4}$, $d = \frac{1}{2}$.

116. $u = 2$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = -1,$$

$$t = -2, \quad \infty, \quad -1,$$
$$z = -2, \quad -1, \quad \infty.$$

$y = t = z = -2$ donne

$$p = \tfrac{4}{3}.$$

117. Revenons au n° 109 et soit $y = -3$. On a

$$\frac{3}{u} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = \frac{13}{6}, \qquad \max.\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right) = \frac{2}{3}, \qquad \left|\frac{13}{6} - \frac{3}{u}\right| \leqq \frac{2}{3}, \qquad u = 2.$$

$u = 2$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = -\frac{2}{3},$$

d'où l'on conclut

$$r = \tfrac{12}{7}.$$

118. Revenons au n° 109 et soit $y = 3$. On a

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = \frac{11}{6},$$

équation qui, pour $|z| > 3$, $|t| > 1$, $|v| > 4$, n'a pas de solutions.

Soit $z = 3$, on a

$$\frac{3}{v} = \frac{1}{t} + \frac{7}{6}, \qquad \text{d'où} \qquad t = -6, -1, 3.$$

$t = -6$ donne

$$w = \tfrac{6}{5}.$$

41e *solution :* $x = y = z = 3, \quad t = -4, \quad a = b = c = \frac{3}{4}, \quad d = \frac{1}{6}.$

119. Maintenant on a

$$\max.\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{3}{4}, \qquad \left|\frac{3}{v} - \frac{11}{6}\right| \leqq \frac{3}{4}, \qquad v = 2.$$

$v = 2$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{1}{3},$$

$$t = -21, -12, -9, -6, -5, -4, -2, -1, 3, 6, 15, \infty, -3,$$
$$z = 7, \quad 8, \quad 9, \quad 12, \quad 15, \quad 24, -12, -3, 3, 4, 5, 6, \infty.$$

$u = \frac{6z}{z-6}$ élimine $z = 7, 8, 9, 15, 24, 4, 5$: reste

$$z = 12, 6.$$

$w = \frac{6z}{5z-6}$ élimine $z = 12, 6.$

120. Revenons au n° 109 et soit $y = -4$. On a

$$\frac{3}{u} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = 2, \qquad \text{max.}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{1}{2}, \qquad \left|\frac{3}{u} - 2\right| \leq \frac{1}{2}, \qquad u = 2.$$

$u = 2$ donne

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{t} = -\frac{1}{2},$$

$$t = -6, -4, -3, -1, \quad 2, \quad \infty, -2,$$
$$z = -3, -4, -6, \quad 2, -1, -2, \quad \infty.$$

42e *solution:* $x = y = z = t = -4, \qquad a = b = c = d = \frac{3}{4}.$

121. Revenons au n° 109. Soit $y = 4$, on a l'équation

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = \frac{7}{4};$$

de plus

$$\text{max.}\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{3}{4}, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{7}{4} - \frac{3}{v}\right| \leq \frac{3}{4},$$

donc

$$v = 2, 3.$$

Soit $v = 2$; on a

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{1}{4}, \qquad \frac{1}{u} = \frac{1}{4} + \frac{1}{z}, \qquad \frac{1}{w} + \frac{1}{z} = \frac{3}{4};$$

donc

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{w} = 1,$$

$$u = 2, \infty, 1,$$
$$w = 2, 1, \infty.$$

$\left.\begin{array}{l} u = \infty \\ w = 1 \end{array}\right\}$ donne

$$z = -4 \qquad \text{d'où} \qquad \frac{1}{t} = -\frac{3}{4}.$$

43ᵉ *solution :* $x = y = z = 4, \quad t = -4, \quad a = b = c = \frac{3}{4}, \quad d = \frac{1}{4}.$

$u = w = 2$ donne

$$z = 4, \quad t = 4.$$

122. $v = 3$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{3}{4},$$

qui n'a pas de solutions si l'on a $|z| > 5$, $|t| > 2$,

$\left.\begin{array}{l} z = 4 \\ t = -4 \end{array}\right\}$ est la seule solution, déjà essayée d'ailleurs.

123. Revenons au nº **109**, et soit $y = 5$; on a l'équation

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = \frac{17}{10},$$

qui n'a pas de solutions si l'on suppose simultanément $|z| > 3$, $|t| > 1$, $|v| > 5$,

$$\max.\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{3}{5}, \qquad \text{donc} \qquad \left|\frac{17}{10} - \frac{3}{v}\right| \leqq \frac{3}{5}, \qquad v = 2.$$

$v = 2$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{1}{5}, \qquad \frac{1}{u} = \frac{1}{z} + \frac{3}{10}, \qquad \frac{1}{w} + \frac{1}{z} = \frac{7}{10}, \qquad \frac{1}{u} + \frac{1}{w} = 1,$$

$$\begin{array}{l} u = 2, \ \infty, \ 1, \\ w = 2, \ 1, \ \infty, \end{array} \qquad z = 5, \qquad t = 5.$$

44ᵉ *solution :* $x = y = z = 5, \quad t = -4, \quad a = b = c = \frac{3}{4}, \quad d = \frac{3}{10}.$

124. Revenons au nº **109**, et supposons $|y| > 5$, $|z| > 5$, $|t| > 5$, d'où

$$\max.\left(\frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{2}{3}, \qquad \left|\frac{3}{2} - \frac{3}{u}\right| \leqq \frac{2}{3},$$

$$u = 2, \ 3, \qquad v = 2, \ 3, \qquad w = 2, \ 3.$$

D'ailleurs

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = \frac{3}{2};$$

[illegible] u [illegible] convient seule. On a alors

$$\frac{2}{y} = \frac{1}{z} + \frac{1}{t},$$

$$\frac{2}{z} = \frac{1}{t} + \frac{1}{y},$$

$$\frac{2}{t} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z};$$

donc

$$\frac{3}{y} + \frac{3}{z} + \frac{3}{t} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}, \qquad y = z = t.$$

On trouve alors

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{p} = \frac{1}{4}$$

et, par suite,

$$y = 12, \quad 4, 2, 3, 5, 6, 8, 12, 20, \infty, 4.$$

Toutes ces valeurs de y donnent des solutions, savoir :

[illegible] solution	$x = y = z = 12$, $t = 4$,	$a = b = c = \frac{3}{4}$,	$d = \frac{7}{12}$.
[illegible] solution	$x = y = z = 6$, $t = 4$,	$a = b = c = \frac{3}{4}$,	$d = \frac{1}{3}$.
[illegible] solution	$x = y = z = 8$, $t = 4$,	$a = b = c = \frac{3}{4}$,	$d = \frac{3}{8}$.
[illegible] solution	$x = y = z = 12$, $t = 4$,	$a = b = c = \frac{3}{4}$,	$d = \frac{5}{12}$.
[illegible] solution	$x = y = z = 20$, $t = 4$,	$a = b = c = \frac{3}{4}$,	$d = \frac{9}{20}$.
[illegible] solution	$x = y = z = \infty$, $t = 4$,	$a = b = c = \frac{3}{4}$,	$d = \frac{1}{2}$.

[illegible] Revenons au n° 26, et faisons $x =$ [illegible] 3. Le système d'équations à résoudre est alors le suivant :

[illegible]

Si l'on suppose simultanément $|y| > 4$, $|z| > 2$, $|t| > 2$, $|v| > 7$, la première équation n'aura pas de solutions.

126. Soit $y = 1$. On a

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = \frac{8}{3};$$

pour $|t| > 1$, $|z| > 2$, $|v| > 3$, il n'y a pas de solutions.

$t = 1$ donne

$$\frac{2}{z} + \frac{3}{v} = \frac{11}{3}, \qquad \begin{matrix} v = 1, \\ z = 3. \end{matrix}$$

$x = y = 1$, $z = 3$, $t = -3$ donne une solution; elle rentre dans une solution plus générale que nous trouverons plus tard (146).

127. $z = -2$ donne

$$\frac{3}{v} - \frac{1}{t} = \frac{11}{3},$$

qui n'a pas de solutions.

128. Supposons $|z| > 2$, $|t| > 2$, d'où

$$\max.\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = 1, \qquad \left|\frac{8}{3} - \frac{3}{v}\right| \leq 1, \qquad v = 1.$$

$v = 1$ donne

$$\frac{1}{t} = \frac{2}{z} + \frac{1}{3}, \qquad \frac{1}{z} + \frac{1}{tv} = \frac{2}{3},$$

$$z = -3,\ 3,$$
$$t = -3,\ 1.$$

Nous aurons la solution suivante :

51ᵉ *solution :* $x = y = z = -3$, $t = 1$, $a = b = c = \frac{1}{3}$, $d = \frac{2}{3}$.

129. Revenons au nº 125, et soit $y = -2$. On a l'équation

$$\frac{3}{u} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = \frac{8}{3},$$

laquelle n'a pas de solutions si l'on a simultanément $|u| > 3$, $|z| > 1$, $|t| > 1$.

134. Revenons au n° 125, et soit $|z| > 4$, $|y| > 4$, $|t| > 4$,

$$\max.\left(\frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{4}{5}, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{5}{3} - \frac{3}{u}\right| \leqq \frac{4}{5}, \qquad u = 2,\ 3;$$

pareillement

$$v = 2,\ 3, \qquad w = 2,\ 3.$$

Or on doit avoir

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = \frac{5}{3};$$

il y a contradiction.

134 ***bis***. Revenons maintenant au n° 26, et soit $x = -2$. Les équations à résoudre sont

$$\frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{u} = 2, \qquad \frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{y} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = 2, \qquad \frac{2}{y} + \frac{2}{t} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{2}{t} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} + \frac{3}{w} = 2, \qquad \frac{2}{z} + \frac{2}{t} - \frac{1}{y} + \frac{3}{r} = \frac{1}{2}.$$

La première équation n'aura pas de solutions si l'on a $|y| > 4$, $|z| > 2$, $|t| > 2$, $|u| > 6$.

135. Soit $y = 1$. On a l'équation

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = 3,$$

laquelle, pour $|z| > 2$, $|t| > 1$, $|v| > 3$, n'a pas de solutions.

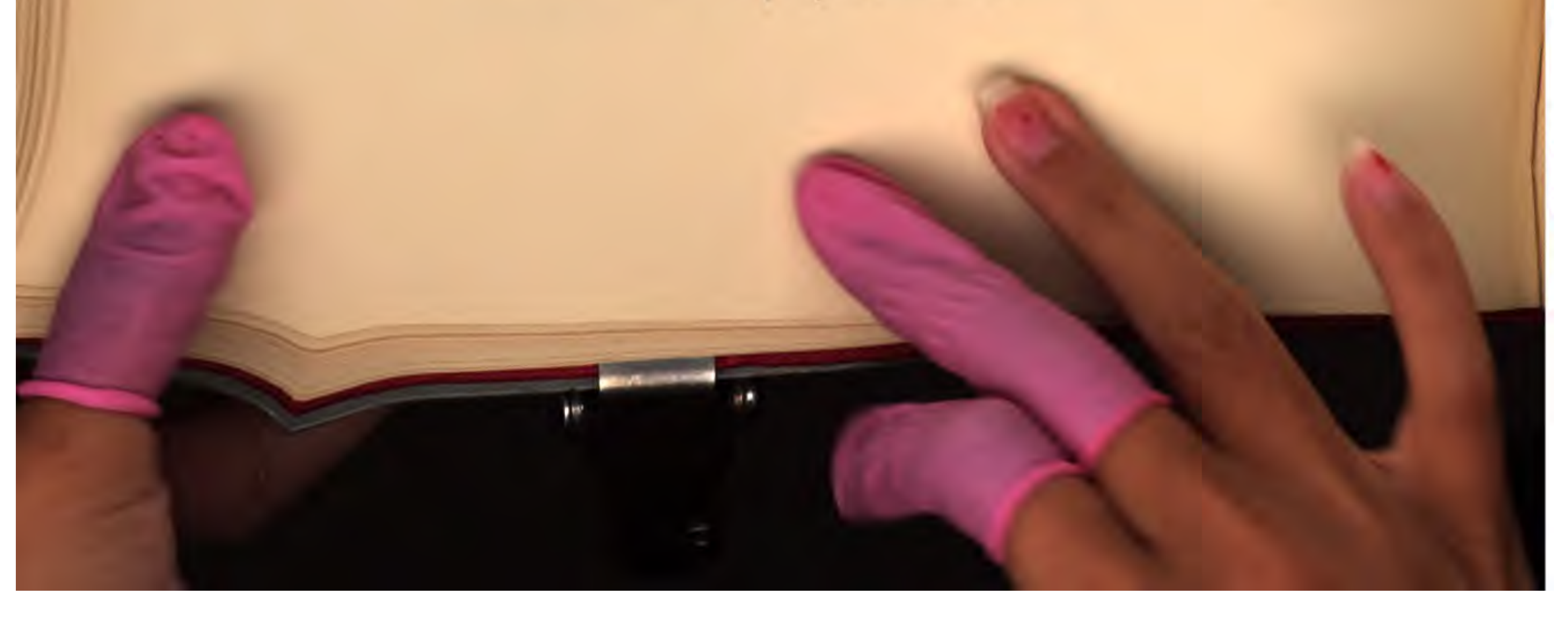
Soit $z = 1$, on a

$$\frac{3}{v} - \frac{1}{t} = 1, \qquad t = -4,\ -2,\ 2,\ \infty,\ -1,$$

$w = \dfrac{3t}{4t - 2}$ élimine -4, -2, ∞.

136. $z = -2$ donne

$$\frac{3}{v} - \frac{1}{t} = 4, \qquad t = -1.$$



Essayons $z = 3$, qui donne

$$\frac{3}{v} - \frac{1}{t} = \frac{4}{3}, \qquad t = -3,\ -1,\ 6.$$

$t = 0$ donne

$$w = \tfrac{3}{2}.$$

132. On a alors

$$\max.\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{3}{4}, \qquad \text{d'où} \qquad \left|2 - \frac{3}{v}\right| \leqq \frac{3}{4}, \qquad v = 2.$$

$v = 2$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} t &= -10,\ -6,\ -4,\ -3,\ -1,\ 2,\ 6,\ \infty,\ -2, \\ z &= 5,\ 6,\ 8,\ 12,\ -4,\ 2,\ 3,\ 4,\ \infty. \end{aligned}$$

$u = \dfrac{6z}{z+6}$ élimine 5, 8, 4; $w = \dfrac{z}{z-1}$ élimine 6.

133. Revenons au n° 125, et soit $y = 4$. On a l'équation

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = \frac{23}{12},$$

qui, pour $|z| > 3$, $|t| > 1$, $|v| > 4$, n'admet pas de solutions.

On a

$$\max.\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{3}{4}, \qquad \left|\frac{23}{12} - \frac{3}{v}\right| \leqq \frac{3}{4}, \qquad v = 2,$$

$v = 2$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{5}{12}, \qquad \frac{1}{u} + \frac{1}{w} = -\frac{1}{3}, \qquad \frac{1}{u} = \frac{1}{z} + \frac{1}{4},$$

$$\begin{aligned} w &= -12,\ -6,\ -4,\ -2,\ 6,\ \infty,\ -3, \\ u &= -4,\ -6,\ -12,\ 6,\ -2,\ -3,\ \infty. \end{aligned}$$

$z = \dfrac{4u}{4-u}$ élimine $u = -6,\ -3$; pour

$$\begin{aligned} u &= -4,\ \ 6, \\ z &= -2,\ -12, \end{aligned}$$

$z = -12$ donne

$$t = -\tfrac{12}{7}.$$

On a

$$\max.\left(\frac{2}{z} \cdot \frac{1}{t}\right) \quad 1, \qquad \frac{7}{3} \cdot \frac{3}{v} - 1, \qquad v - 1, 2;$$

v 1 donne

$$\frac{1}{t} \quad \frac{2}{z} \quad \frac{2}{3},$$

$$z \quad -12, \; -6, \; -4, \; -2, \; 6, \; -3,$$
$$t \quad 2, \; 3, \; 6, \; -3, \; 1, \; \infty,$$

u ... élimine 4.

140. v 2 donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} \; \frac{5}{6},$$

$$z \quad 3, \; 4,$$
$$t \quad 6, \; -3.$$

2e solution : x y 3, z 2, t -6, a b 1, $c = \frac{1}{6}$, $d = \frac{1}{2}$.

141. Revenons au n° 134, et soit $y = 4$. On a

$$\frac{2}{s} \quad \frac{1}{t} + \frac{3}{v} \quad \frac{9}{4},$$

équation qui n'a pas de solutions pour $|z| > 2$, $|t| > 1$, $|v| > 4$.

On a

$$\max.\left(\frac{2}{s} \quad \frac{1}{t}\right) \quad \frac{3}{4}, \qquad \left|\frac{9}{4} \cdot \frac{3}{v}\right| \cdot \frac{3}{4}, \qquad v - 1, 2.$$

v 1 donne

$$\frac{1}{t} - \frac{2}{s} \quad \frac{3}{4},$$

$$s \quad -4,$$
$$t \quad 4.$$

142. v 2 donne

$$\frac{2}{s} \quad \frac{1}{t} \quad \frac{3}{4},$$

$$s \quad 4,$$
$$t \quad 4.$$



137. Soit $|z| > 2$, $|t| > 2$, on a

$$\max.\left|\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right| = 1, \qquad \left|3 - \frac{3}{v}\right| \leqq 1, \qquad v = 1.$$

$v = 1$ donne

$$z = 2t, \qquad \frac{2}{w} + \frac{1}{t} = 2,$$

$$t = 1, \infty,$$
$$z = 2, \infty;$$

$t = 1$, $z = 2$ donnent une solution qui rentre dans une solution plus générale, que nous trouverons plus tard.

54ᵉ *solution :* $x = y = \infty$, $z = -2$, $t = 1$, $a = b = \frac{1}{2}$, $c = 0$, $d = \frac{3}{2}$.

138. Revenons au nº 134, et soit $y = -2$. On a l'équation

$$\frac{3}{u} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = 3,$$

qui, pour $|u| > 3$, $|z| > 1$, $|t| > 1$, n'a pas de solutions. On a

$$\max.\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right) = 1, \qquad \left|3 - \frac{3}{u}\right| \leqq 1, \qquad u = 1.$$

$u = 1$ donne

$$z = -t, \qquad \frac{1}{z} + \frac{1}{v} = \frac{1}{2},$$

$$t = 2, \; -1, \; -3, \; -4, \; -6, \; \infty, \; -2,$$
$$z = 2, \; 1, \; 3, \; 4, \; 6, \; \infty, \; 2;$$

$\frac{1}{w} = \frac{1}{z} + \frac{1}{2}$, ou $w = \frac{2z}{z+2}$ élimine $z = 3, 4, 6$.

55ᵉ *solution :* $x = y = -2$, $z = t = \infty$, $a = b = \frac{1}{2}$, $c = d = 1$.

139. Revenons au nº 134, et soit $y = 3$. On a l'équation

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{v} = \frac{7}{3},$$

qui, pour $|z| > 2$, $|t| > 1$, $|v| > 4$, n'a pas de solutions.

On a

$$\max.\left(\frac{2}{z}-\frac{1}{t}\right)=1,\qquad \left|\frac{7}{3}-\frac{3}{v}\right|\leqq 1,\qquad v=1,\ 2;$$

$v=1$ donne

$$\frac{1}{t}-\frac{2}{z}=\frac{2}{3},$$

$$\begin{array}{rrrrrrr} z= & -12, & -6, & -4, & -2, & 6, & -3, \\ t= & 2, & 3, & 6, & -3, & 1, & \infty, \end{array}$$

$u=\dfrac{3z}{2z+3}$ élimine -4.

140. $v=2$ donne

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}=\frac{5}{6},$$

$$\begin{array}{rrr} z= & 3, & 4, \\ t= & -6, & -3. \end{array}$$

56e *solution :* $x=y=3,\quad z=-2,\quad t=-6,\quad a=b=1,\quad c=\frac{1}{6},\quad d=\frac{1}{2}.$

141. Revenons au n° 134, et soit $y=4$. On a

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{v}=\frac{9}{4},$$

équation qui n'a pas de solutions pour $|z|>2$, $|t|>1$, $|v|>4$.

On a

$$\max.\left(\frac{2}{z}-\frac{1}{t}\right)=\frac{3}{4},\qquad \left|\frac{9}{4}-\frac{3}{v}\right|\leqq\frac{3}{4},\qquad v=1,\ 2.$$

$v=1$ donne

$$\frac{1}{t}-\frac{2}{z}=\frac{3}{4},$$

$$\begin{array}{rr} z= & -4, \\ t= & 4. \end{array}$$

142. $v=2$ donne

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}=\frac{3}{4},$$

$$\begin{array}{rr} z= & 4, \\ t= & -4. \end{array}$$

143. Revenons au n° 134. On peut supposer $|y| > 4$, $|z| > 4$, $|t| > 4$,

$$\max.\left(\frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{4}{5}, \qquad \left|2 - \frac{3}{u}\right| \leqq \frac{4}{5}, \qquad u = 2,$$

et de même

$$v = w = 2.$$

Or on doit avoir

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = 2,$$

il y a contradiction.

144. Reportons-nous au n° 26, et soit $x = 1$. Le système à résoudre est le suivant :

$$\frac{3}{u} + \frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = -1, \qquad \frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = 2,$$

$$\frac{3}{v} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t} - \frac{1}{y} = -1, \qquad \frac{2}{t} + \frac{2}{y} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = 2,$$

$$\frac{3}{w} + \frac{2}{t} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = -1, \qquad \frac{2}{z} + \frac{2}{t} - \frac{1}{y} + \frac{3}{r} = 2.$$

Prenons

$$\frac{2}{z} + \frac{2}{t} - \frac{1}{y} + \frac{3}{r} = 2;$$

pour $|z| > 4$, $|t| > 4$, $|y| > 2$, $|r| > 6$, il n'y a pas de solutions.

145. Soit $y = 1$,

$$\frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = 3;$$

pour $|z| > 2$, $|t| > 2$, $|r| > 3$, pas de solutions.

Soit $z = 1$,

$$\frac{2}{t} + \frac{3}{r} = 1,$$

$$t = -4, \ -1, \ 1, \ 3, \ 4, \ 5, \ 8, \ \infty, \ 2.$$

$p = \dfrac{3t}{1 - 2t}$ élimine 3, 4, 5, 8, ∞.

57ᵉ *solution :* $x = y = z = t = 1, \qquad a = b = c = d = \frac{1}{3}.$

159. $p = q = r = 2$ donne

$$y = z = t = 6.$$

60ᵉ *solution :* $x = y = z = 6$,	$t = 1$,	$a = b = c = \frac{1}{2}$,	$d = \frac{7}{4}$.

160. $p = q = 2$, $r = 3$. On a

$$2 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = \frac{2}{3} > \frac{3}{5};$$

les autres essais sont donc inutiles.

161. Revenons au n° 26, et soit $x = 3$. Les équations à résoudre sont

$$\frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{u} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{4}{3},$$

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} - \frac{1}{y} + \frac{3}{v} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{2}{t} + \frac{2}{y} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = \frac{4}{3},$$

$$\frac{2}{t} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} + \frac{3}{w} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{2}{z} + \frac{2}{t} - \frac{1}{y} + \frac{3}{r} = \frac{4}{3}.$$

Prenons l'équation

$$\frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{4}{3}.$$

Pour $|y| > 6$, $|z| > 6$, $|t| > 3$, $|p| > 9$, il n'y aura pas de solutions.

162. Soit $y = -6$; l'équation devient

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{5}{3}.$$

Pour $|z| > 3$, $|t| > 1$, $|p| > 5$, cette dernière n'a pas de solutions.

Faisons $z = 3$, cela donne

$$\frac{3}{p} - \frac{1}{t} = 1, \qquad t = -4, \ -2, \ 2, \ \infty, \ -1.$$

La seule solution à essayer est $t = \infty$; elle donne

$$q = \frac{1}{2}.$$



On a

$$\max.\left(\frac{2}{z}+\frac{2}{t}\right)=1, \qquad \left|\frac{9}{4}-\frac{3}{r}\right| \leqq 1, \qquad r=1,\ 2.$$

$r=1$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=-\frac{3}{8}, \qquad \text{d'où} \qquad u=-\frac{8}{5}.$$

151. $r=2$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{3}{8}, \qquad u=-\frac{8}{3}.$$

152. Revenons au n° 144. Supposons $|y|>4$, $|z|>4$, $|t|>4$,

$$\max.\left(\frac{2}{y}+\frac{2}{z}-\frac{1}{t}\right)=1, \qquad \left|2-\frac{3}{p}\right| \leqq 1;$$

donc

$$p=1,\ 2,\ 3,$$
$$q=1,\ 2,\ 3,$$
$$r=1,\ 2,\ 3.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=2 \qquad \text{avec} \qquad \max.\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)=\frac{3}{5}.$$

153. $p=q=r=1$ donne

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=-1; \qquad \text{donc} \qquad \left|\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right|>\frac{3}{5}.$$

154. $p=q=1$, $r=2$ donne

$$t=z=\infty, \qquad y=-2 \qquad (\textit{voir} \text{ la } 54^{\text{e}} \text{ solution}).$$

155. $p=q=1$, $r=3$ donne

$$y=-\tfrac{9}{5}.$$

156. $p=1$, $q=r=2$ donne

$$t=3 \qquad (\text{déjà essayé}).$$

157. $p=1$, $q=2$, $r=3$ donne

$$t=\tfrac{9}{4}.$$

158. $p=1$, $q=r=3$ donne

$$t=\tfrac{9}{5}.$$

159. $p = q = r = 2$ donne

$$y = z = t = 6.$$

60ᵉ *solution :* $x = y = z = 6, \quad t = 1, \quad a = b = c = \frac{1}{2}, \quad d = \frac{7}{6}.$

160. $p = q = 2$, $r = 3$. On a

$$2 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = \frac{2}{3} > \frac{3}{5};$$

les autres essais sont donc inutiles.

161. Revenons au n° 26, et soit $x = 3$. Les équations à résoudre sont

$$\frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{u} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{4}{3},$$

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} - \frac{1}{y} + \frac{3}{v} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{2}{t} + \frac{2}{y} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = \frac{4}{3},$$

$$\frac{2}{t} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} + \frac{3}{w} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{2}{z} + \frac{2}{t} - \frac{1}{y} + \frac{3}{r} = \frac{4}{3}.$$

Prenons l'équation

$$\frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{4}{3}.$$

Pour $|y| > 6$, $|z| > 6$, $|t| > 3$, $|p| > 9$, il n'y aura pas de solutions.

162. Soit $y = -6$; l'équation devient

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{5}{3}.$$

Pour $|z| > 3$, $|t| > 1$, $|p| > 5$, cette dernière n'a pas de solutions.
Faisons $z = 3$, cela donne

$$\frac{3}{p} - \frac{1}{t} = 1, \qquad t = -4, \ -2, \ 2, \ \infty, \ -1.$$

La seule solution à essayer est $t = \infty$: elle donne

$$q = \frac{3}{2}.$$

163. Soit $|z| > 3$, $|t| > 3$, on a

$$\max.\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{3}{4}, \qquad \left|\frac{5}{3} - \frac{3}{p}\right| \leqq \frac{3}{4}, \qquad p = 2,\ 3.$$

$p = 2$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{q} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3}, \qquad \text{d'où} \qquad z = -3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 6.$$

61e *solution :*	$x = y = 6$,	$z = 3$,	$t = -6$,	$a = b = \frac{2}{3}$,	$c = \frac{5}{6}$, $d = \frac{1}{3}$.

164. $p = 3$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{2}{3}, \qquad \begin{array}{l} t = -6,\ -3,\ -2,\ -1,\ 3,\ \infty, \\ z = \quad 4, \qquad\qquad\qquad\quad 3; \end{array}$$

$t = -6$, $z = 4$ donne

$$q = \tfrac{1}{3}.$$

165. Revenons au n° **161**, et soit $y = 3$. On a

$$\frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{5}{3}.$$

Pour $|z| > 3$, $|t| > 3$, $|r| > 5$, pas de solutions.

Soit $z = 3$, on a

$$\frac{2}{t} + \frac{3}{r} = 1, \qquad t = -4,\ -1,\ 1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 8,\ \infty,\ 2.$$

62e *solution :*	$x = y = z = t = 3$,		$a = b = c = d = \frac{5}{9}$,	
63e *solution :*	$x = y = z = 3$,	$t = 4$,	$a = b = c = \frac{7}{12}$,	$d = \frac{1}{2}$.
64e *solution :*	$x = y = z = 3$,	$t = 5$,	$a = b = c = \frac{3}{5}$,	$d = \frac{7}{15}$.
65e *solution :*	$x = y = z = 3$,	$t = 8$,	$a = b = c = \frac{5}{8}$,	$d = \frac{5}{12}$.
66e *solution :*	$x = y = z = 3$,	$t = \infty$,	$a = b = c = \frac{2}{3}$,	$d = \frac{1}{3}$.

166. Soit $|z| > 3$, $|t| > 3$, on a

$$\max.\left(\frac{2}{z}+\frac{2}{t}\right)=1, \qquad \left|\frac{5}{3}-\frac{3}{r}\right| \leqq 1, \qquad r=2,\ 3,\ 4;$$

$r = 2$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{1}{12}, \qquad \frac{1}{q}=\frac{1}{z}+\frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{p}=\frac{1}{t}+\frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{5}{12},$$

$$\begin{aligned} p &= 2,\ 3,\ 4,\\ q &= -12,\ 12,\ 6,\\ z &= -4,\ -12,\ \infty,\\ t &= 3,\ 6,\ 12. \end{aligned}$$

67ᵉ *solution :*	$x=y=3$,	$z=6$,	$t=-12$,	$a=b=\frac{3}{4}$,	$c=\frac{7}{12}$,	$d=\frac{1}{3}$,
68ᵉ *solution :*	$x=y=3$,	$z=12$,	$t=\infty$,	$a=b=\frac{3}{4}$,	$c=\frac{1}{2}$,	$d=\frac{5}{12}$.

167. $r = 3$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{1}{3},$$

$$\begin{aligned} t &= -6,\ 2,\ 4,\ 6,\ 12,\ \infty,\ 3,\\ z &= 2,\ -6,\ 12,\ 6,\ 4,\ 3,\ \infty. \end{aligned}$$

69ᵉ *solution :*	$x=y=3$,	$z=4$,	$t=12$,	$a=b=\frac{2}{3}$,	$c=\frac{7}{12}$,	$d=\frac{5}{12}$,
70ᵉ *solution :*	$x=y=3$,	$z=t=6$,		$a=b=\frac{2}{3}$,	$c=d=\frac{1}{2}$.	

168. $r = 4$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{11}{24};$$

$t = 3$, $z = 8$ donne une solution déjà trouvée.

169. Revenons au n° 161, et soit $y = 4$. On a l'équation

$$\frac{2}{z}+\frac{2}{t}+\frac{3}{r}=\frac{19}{12},$$

qui, pour $|z| > 3$, $|t| > 3$, $|r| > 5$, n'a pas de solutions.

On a

$$\max.\left(\frac{2}{z}+\frac{2}{t}\right)=1, \qquad \left|\frac{19}{12}-\frac{3}{r}\right|\leqq 1, \qquad r=2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

$r = 2$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{1}{24}, \qquad \frac{1}{v}=\frac{1}{t}+\frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{w}=\frac{1}{z}+\frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{3}{8},$$

$$\begin{aligned} w &= -8, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 8, \quad 24, \\ v &= \ \ 2, \ -8, \quad 24, \quad 8, \quad 4, \quad 3. \end{aligned}$$

$z=\frac{6w}{6-w}$ élimine $w=-8$,

$$\begin{aligned} z &= \ \ 6, \quad 12, \\ t &= -8, \ -24. \end{aligned}$$

$p=\frac{4t}{t+4}$ élimine $t=-24$; $q=\frac{4z}{z+4}$ élimine $z=6$.

170. $r=3$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{7}{24};$$

pour $|z|>6$, $|t|>6$ pas de solutions.

$$\begin{aligned} t &= 4, \ 6, \\ z &= 24, \ 8. \end{aligned}$$

$q=\frac{12z}{z+12}$ élimine $z=8$.

71ᵉ *solution* : $x=y=4$, $z=3$, $t=24$, $a=b=\frac{3}{8}$, $c=\frac{17}{24}$, $d=\frac{5}{12}$.

171. $r=4$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{5}{12},$$

$$\begin{aligned} z &= 4, \\ t &= 6. \end{aligned}$$

72ᵉ *solution* : $x=y=4$, $z=3$, $t=6$, $a=b=\frac{7}{12}$, $c=\frac{2}{3}$, $d=\frac{1}{2}$.

172. $r=5$, on a

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{59}{120},$$

pas de solution.

173. Revenons au n° 161, et faisons $y = 5$. On a

$$\frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{23}{15},$$

équation qui, pour $|z| > 3$, $|t| > 3$, $|r| > 5$, n'a pas de solutions.
On a

$$\max.\left(\frac{2}{z} + \frac{2}{t}\right) = \frac{4}{5}, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{23}{15} - \frac{3}{r}\right| < \frac{4}{5}, \qquad r = 2,\ 3,\ 4.$$

$r = 2$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{60}, \qquad \frac{1}{v} = \frac{1}{t} + \frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{w} = \frac{1}{z} + \frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = \frac{7}{20},$$

$$v = 3,\ 4,$$
$$w = 60,\ 10.$$

$\left.\begin{array}{l} t = 12 \\ z = -15 \end{array}\right\}$ donne

$$q = \tfrac{30}{7},$$

174. $r = 3$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{4}{15},$$
$$z = 6,\ 5,$$
$$t = 10,\ 15.$$

$p = \dfrac{15t}{2t + 15}$ élimine $t = 6$.

73ᵉ solution : $x = y = 5$, $z = 3$, $t = 15$, $a = b = \frac{3}{8}$, $c = \frac{11}{18}$, $d = \frac{7}{15}$

175. $r = 4$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{47}{120}, \qquad \text{d'où} \qquad u = \frac{120}{13}.$$

176. Revenons au n° 161, et faisons $y = 6$. On a

$$\frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{3}{2};$$

pour $|z| > 4$, $|t| > 4$, $|r| > 6$, pas de solutions. On a

$$\max.\left(\frac{2}{z} + \frac{2}{t}\right) = \frac{4}{5}, \qquad \left|\frac{3}{2} - \frac{3}{r}\right| < \frac{4}{5}, \qquad r = 2,\ 3,\ 4.$$

$r = 2$ donne

$$z = -t, \qquad \frac{1}{v} + \frac{1}{z} = \frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{w} = \frac{1}{z} + \frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = \frac{1}{3},$$

$$\begin{array}{llllllll} w = -6, & 2, & 4, & 6, & 12, & \infty, & 3, \\ v = & 2, & -6, & 12, & 6, & 4, & 3, & \infty. \end{array}$$

$$z = \frac{6w}{w-6},$$

$$\begin{array}{llllllll} z = & 3, & -3, & -12, & \infty, & 12, & 6, & -6, \\ t = & -3, & 3, & 12, & \infty, & -12, & -6, & +6. \end{array}$$

$p = \dfrac{3z}{z-3}$, $q = \dfrac{3z}{z+3}$ éliminent la solution -12, $+12$.

74[e] *solution :*	$x = y = 6, \quad t = -6, \quad z = 3, \quad a = b = \frac{2}{3}, \quad c = \frac{1}{3}, \quad d = \frac{5}{6}.$
75[e] *solution :*	$x = y = \infty, \quad z = 3, \quad t = 6, \quad a = b = \frac{1}{2}, \quad c = \frac{5}{6}, \quad d = \frac{2}{3}.$

177. $r = 3$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{4},$$

$$\begin{array}{lllllllllll} t = -12, & -4, & 2, & 3, & 5, & 6, & 8, & 12, & 20, & \infty, & 4, \\ z = \quad 3, & 2, & -4, & -12, & 20, & 12, & 8, & 6, & 5, & 4, & \infty. \end{array}$$

76[e] *solution :*	$x = y = 6, \quad z = 3, \quad t = 12, \quad a = b = \frac{7}{12}, \quad c = \frac{3}{4}, \quad d = \frac{1}{2}.$

178. $r = 4$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{3}{8};$$

pour $|z| > 5$, $|t| > 5$ pas de solutions; or $z = 6$ donne

$$t = \tfrac{24}{5}.$$

179. Revenons au n° 161. On a

$$\max.\left(\frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{5}{7}, \qquad \left|\frac{4}{3} - \frac{3}{p}\right| \leqq \frac{5}{7},$$

d'où

$$p,\ q,\ r = 2,\ 3,\ 4.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{4}{3},\qquad \max.\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)=\frac{3}{7}.$$

180. Soient $p=q=r=2$, $y=z=t=-18$.

77ᵉ *solution :* $x=y=z=-18$, $t=3$, $a=b=c=\frac{5}{9}$, $d=\frac{17}{18}$.

181. $p=q=2$, $r=3$, $t=z=18$,

$$y=-9,\qquad u=\frac{9}{2}.$$

182. $p=q=2$, $r=4$, $t=z=9$,

$$y=-\frac{36}{5}.$$

$p=2$, $r=q=3$ donnent

$$t=6.$$

$p=2$, $q=3$, $r=4$ donnent

$$t=\frac{9}{2}.$$

$p=2$, $q=r=4$ donnent

$$t=\frac{18}{5}.$$

183. $p=q=r=3$ donne

$$y=z=t=9.$$

78ᵉ *solution :* $x=y=z=9$, $t=3$, $a=b=c=\frac{5}{9}$, $d=\frac{7}{9}$.

184. $p=q=3$, $r=4$,

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{z}+\frac{1}{y}=\frac{5}{12}<\frac{3}{7}.$$

Les autres essais sont inutiles.

185. Revenons au n° 25, et soit $x=4$. Les équations à résoudre sont

$$\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{u}=\frac{1}{2},\qquad \frac{2}{y}+\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{p}=\frac{5}{4},$$

$$\frac{2}{z}-\frac{1}{t}-\frac{1}{y}+\frac{3}{v}=\frac{1}{2},\qquad \frac{2}{t}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}+\frac{3}{q}=\frac{5}{4},$$

$$\frac{2}{t}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}+\frac{3}{w}=\frac{1}{2},\qquad \frac{2}{z}+\frac{2}{t}-\frac{1}{y}+\frac{3}{r}=\frac{5}{4}.$$

Prenons l'équation

$$\frac{2}{z} + \frac{2}{t} - \frac{1}{y} + \frac{3}{r} = \frac{5}{4};$$

pour $|z| > 6$, $|t| > 6$, $|y| > 3$, $|r| > 9$ il n'y a pas de solutions.

186. Soit $y = -6$. On a

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{19}{12},$$

qui, pour $|z| > 3$, $|t| > 1$, $|p| > 5$, n'a pas de solutions.

$$\max.\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{3}{4}, \qquad \left|\frac{19}{12} - \frac{3}{p}\right| \leq \frac{3}{4}, \qquad p = 2,\ 3.$$

$p = 2$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{1}{12}, \qquad \frac{1}{z} + \frac{1}{q} = \frac{7}{12};$$

cette dernière n'aura pas de solutions si l'on a simultanément $|z| > 3$, $|q| > 3$.

$$q = 2, \qquad q = 3,$$
$$z = 12, \qquad z = 4.$$

$z = 4$ donne

$$t = \tfrac{12}{5}.$$

79e *solution :* $x = y = 12$, $y = 4$, $t = -6$, $a = b = \frac{2}{3}$, $c = \frac{5}{6}$, $d = \frac{5}{12}$.

187. $p = 3$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{7}{12};$$

pour $|z| > 6$, $|t| > 3$ pas de solutions.

$$z = \quad 4, \quad 6,$$
$$t = -12, \ -4.$$

$z = 4$, $t = -12$ donnent

$$q = \tfrac{3}{2}.$$

188. Revenons au n° 185, et soit $y = 4$. On a

$$\frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{3}{2},$$

qui, pour $|z| > 4$, $|t| > 4$, $|r| > 6$, n'a pas de solutions.

Soit $z = 4$, on a

$$\frac{2}{t} + \frac{3}{r} = 1,$$

$$t = -4,\ -1,\ 1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 8,\ \infty,\ 2.$$

$p = \dfrac{12t}{t+4}$ élimine 5.

80ᵉ *solution* :	$x = y = z = t = 4,$		$a = b = c = d = \frac{7}{12}.$	
81ᵉ *solution* :	$x = y = z = 4,$	$t = 8,$	$a = b = c = \frac{5}{8},$	$d = \frac{1}{2}.$
82ᵉ *solution* :	$x = y = z = 4,$	$t = \infty,$	$a = b = c = \frac{2}{3},$	$d = \frac{5}{12}.$

189. Soient maintenant $|z| > 4$, $|t| > 4$,

$$\max.\left(\frac{2}{z} + \frac{2}{t}\right) = \frac{4}{5}, \qquad \left|\frac{3}{2} - \frac{3}{r}\right| \leqq \frac{4}{5}, \qquad r = 2,\ 3,\ 4.$$

$r = 2$ donne

$$z = -t, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1}{z} + \frac{1}{4}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{z} = \frac{1}{4}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2},$$

$$q = -2,\quad 1,\ 3,\ 4,\ 6,\ \infty,\ 2,$$
$$p = \quad 1,\ -2,\ 6,\ 4,\ 3,\ 2,\ \infty.$$

$z = \dfrac{4p}{p-4}$ élimine $p = -2$; $z = \dfrac{4q}{4-q}$ élimine $q = -2$.

$$z = 12,\ \infty,\ 4.$$

83ᵉ *solution* :	$x = y = 4,$	$z = 12,$	$t = -12,$	$a = b = \frac{3}{4},$	$c = \frac{7}{12},$	$d = \frac{5}{12}.$
84ᵉ *solution* :	$x = y = 4,$	$t = z = \infty,$		$a = b = \frac{3}{4},$	$c = d = \frac{1}{2}.$	

190. $r = 3$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{4},$$

$$t = -12,\ -4,\quad 2,\quad 3,\ 5,\ 6,\ 8,\ 12,\ 20,\ \infty,\ 4,$$
$$z = \quad 3,\quad 2,\ -4,\ -12,\ 20,\ 12,\ 8,\ 6,\ 5,\ 4,\ \infty.$$

$q = \frac{12z}{z+12}$ élimine 8, 20.

85e *solution :* $x = y = 4$, $z = 6$, $t = 12$, $a = b = \frac{2}{3}$, $c = \frac{7}{12}$, $d = \frac{1}{2}$.

191. $r = 4$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{3}{8};$$

pour $|z| > 5$, $|t| > 5$ pas de solutions.

$z = 5$ donne

$$t = \frac{40}{7}.$$

192. Revenons au n° 185 et soit $y = 5$. On a l'équation

$$\frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{5}{4} + \frac{1}{5} = \frac{29}{20},$$

qui pour $|z| > 4$, $|t| > 4$, $|r| > 6$ n'a pas de solutions.

$$\max.\left(\frac{2}{z} + \frac{2}{t}\right) = \frac{4}{5}, \qquad \left|\frac{29}{20} - \frac{3}{r}\right| \leq \frac{4}{5}, \qquad r = 2, 3, 4.$$

Pour $r = 2$,

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = -\frac{1}{40}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1}{z} + \frac{3}{10}, \qquad z = 5, 30, -20, -10.$$

$t = -\frac{40z}{z+40}$ élimine $z = 5, 30, -10$.

$\left.\begin{array}{l} z = -20 \\ t = 40 \end{array}\right\}$ donne

$$p = \frac{40}{12}.$$

193. $r = 3$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{9}{40}, \qquad \text{d'où} \qquad u = \frac{120}{13}.$$

194. $r = 4$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{7}{20}, \qquad \text{d'où} \qquad u = \frac{20}{3}.$$

195. Revenons au n° 185 et faisons $y = 6$. On a l'équation

$$\frac{2}{z}+\frac{2}{t}+\frac{3}{r}=\frac{5}{4}+\frac{1}{6}=\frac{17}{12},$$

qui pour $|z|>4$, $|t|>4$, $|r|>6$ n'a pas de solutions.

On a

$$\max.\left(\frac{2}{z}+\frac{2}{t}\right)=\frac{2}{3},\qquad \left|\frac{17}{12}-\frac{2}{3}\right|\leqq\frac{2}{3},\qquad r=2,\ 3,\ 4.$$

196. $r=2$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=-\frac{1}{24},\qquad \frac{1}{q}=\frac{1}{z}+\frac{1}{3},$$

$$z=-12,\quad \infty,$$
$$t=\quad 24,\ -24;$$

$p=\dfrac{3t}{t+3}$ élimine 24 et (-24).

197. $r=3$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{5}{24},\qquad \frac{1}{q}=\frac{1}{z}+\frac{1}{6},\qquad \frac{1}{p}=\frac{1}{t}+\frac{1}{6};$$

pas de solutions acceptables.

198. $r=4$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{1}{3},$$

$$t=-6,\quad 2,\ 4,\ 6,\ 12,\ \infty,\ 3,$$
$$z=\quad 2,\ -6,\ 12,\ 6,\ 4,\ 3,\ \infty.$$

86ᵉ *solution :* $x=y=z=6,\quad t=4,\quad a=b=c=\frac{7}{12},\quad d=\frac{2}{3}.$

199. Reportons-nous au n° 185 et soient $|y|>6$, $|z|>6$, $|t|>6$. On a

$$\max.\left(\frac{2}{y}+\frac{2}{z}+\frac{1}{t}\right)=\frac{5}{7},\qquad \left|\frac{5}{4}-\frac{3}{p}\right|\geqq\frac{5}{7},\qquad p=2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

De plus

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{5}{4},\qquad\text{avec}\qquad \max.\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)=\frac{3}{7}.$$

200. $p = q = r = 2$ donne

$$y = z = t = -12.$$

87ᵉ *solution :* $x = y = z = -12, \quad t = 4, \quad a = b = c = \frac{7}{12}, \quad d = \frac{11}{12}.$

201. $p = q = 2,\ r = 3$ donnent

$$y = -\frac{36}{5}.$$

$p = q = 2,\ r = 4$ donnent

$z = t = 12, \quad y = -6,$ solution déjà trouvée (79ᵉ *solution*).

$p = q = 2,\ r = 5$ donnent

$$t = \frac{60}{7}.$$

$p = 2,\ q = r = 3$ donnent

$$t = \frac{36}{5}.$$

$p = 2,\ q = 3,\ r = 4$ donnent

$$t = \frac{36}{7}.$$

$p = 2,\ q = 3,\ r = 5$ donnent

$$t = \frac{180}{41}.$$

$p = 2,\ q = r = 4$ donnent

$t = 4, \quad y = z = \infty,$ solution déjà trouvée (84ᵉ *solution*).

$p = 2,\ q = 4,\ r = 5$ donnent

$$t = \frac{60}{17}.$$

$p = 2,\ q = r = 5$ donnent

$$t = \frac{60}{19}.$$

$p = q = r = 3$ donne

$$y = z = t = 12.$$

88ᵉ *solution :* $x = 4, \quad y = z = t = 12, \quad a = b = c = \frac{7}{12}, \quad d = \frac{3}{4}.$

202. $p = q = 3,\ r = 4$ donnent

$$t = \frac{36}{5}.$$

$p = q = 3,\ r = 5$ donnent

$$t = \frac{180}{31}.$$

$p = 3$, $q = r = 4$ donnent

$$t = \frac{34}{7}.$$

$p = 3$, $q = 4$, $r = 5$ donnent

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{7}{15} < \frac{3}{7};$$

les autres essais sont inutiles.

203. Revenons au n° 26 et faisons $x = 5$. On a à résoudre le système

$$\frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{u} = \frac{3}{5}, \qquad \frac{3}{p} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{6}{5},$$

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} - \frac{1}{y} + \frac{3}{v} = \frac{3}{5}, \qquad \frac{3}{q} + \frac{2}{y} + \frac{2}{t} - \frac{1}{z} = \frac{6}{5},$$

$$\frac{2}{t} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} + \frac{3}{w} = \frac{3}{5}, \qquad \frac{3}{r} + \frac{2}{t} + \frac{2}{z} - \frac{1}{y} = \frac{6}{5}.$$

Prenons l'équation

$$\frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} + \frac{6}{5};$$

pour $|y| > 6$, $|z| > 6$, $|t| > 3$, $|p| > 10$, pas de solutions.

204. Faisons $y = 6$, on a

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{6}{5} - \frac{1}{3} = \frac{23}{15};$$

pour $|z| > 3$, $|t| > 1$, $|p| > 5$, cette équation n'a pas de solutions. On a

$$\max.\left(\frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{3}{5}, \qquad \left|\frac{23}{15} - \frac{3}{p}\right| \leq \frac{3}{5}, \qquad p = 2, 3.$$

$p = 2$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{1}{30}, \qquad \text{d'où} \qquad v = \frac{15}{2}.$$

$p = 3$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{8}{15}, \qquad \frac{1}{z} + \frac{1}{q} = \frac{13}{15};$$

cette dernière équation n'a pas de solutions.

205. Revenons au n° 203 et faisons $y = 5$. On a

$$\frac{2}{t} + \frac{2}{z} + \frac{3}{r} = \frac{7}{5},$$

qui pour $|z| > 4$, $|t| > 4$, $|r| > 6$ n'a pas de solutions. On a

$$\max.\left(\frac{2}{t} + \frac{2}{z}\right) = \frac{4}{5}, \qquad \left|\frac{7}{5} - \frac{3}{r}\right| \leqq \frac{4}{5}, \qquad r = 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

$r = 2$ donne

$$\frac{2}{t} + \frac{2}{z} = -\frac{1}{10}, \qquad \frac{1}{v} = \frac{1}{t} + \frac{3}{10}, \qquad \frac{1}{w} = \frac{1}{z} + \frac{3}{10}, \qquad \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = \frac{11}{20},$$

$$v = \ 2,\ 20,$$
$$w = 20,\ \ 2,$$

$\left.\begin{matrix} t = \ \ 5 \\ z = -4 \end{matrix}\right\}$ donne une solution déjà trouvée.

206. $r = 3$ donne

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{z} = \frac{1}{5}, \qquad \text{d'où} \qquad u = \frac{15}{2}.$$

$r = 4$ donne

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{z} = \frac{13}{40}, \qquad \text{d'où} \qquad u = \frac{40}{7}.$$

$r = 5$ donne

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{z} = \frac{2}{5},$$

$$z = -10,\quad 2,\quad 3,\ 5,\ 15,$$
$$t = \quad 2,\ -10,\ 15,\ 5,\ 3.$$

89ᵉ *solution :* $x = y = z = t = 5$, $\qquad a = b = c = d = \frac{3}{5}$.

207. Revenons au n° 203, et soit $y = 6$. On a l'équation

$$\frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{41}{30},$$

qui pour $|z| > 4$, $|t| > 4$, $|r| > 6$ n'a pas de solutions.

$$\max.\left(\frac{2}{z} + \frac{2}{t}\right) = \frac{2}{3}, \qquad \left|\frac{41}{30} - \frac{3}{r}\right| \leqq \frac{2}{3}, \qquad r = 2,\ 3,\ 4.$$

$r = 2$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = -\frac{1}{15}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1}{z} + \frac{1}{3}, \qquad \frac{1}{p} = \frac{1}{t} + \frac{1}{3}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{3}{5},$$

$$p = 2,\ 10,$$
$$q = 10,\ 2.$$

$q = 10$ donne

$$z = -\tfrac{30}{7}.$$

$r = 3$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{11}{60}, \qquad \text{d'où} \qquad u = \frac{20}{3}.$$

$r = 4$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{17}{60}, \qquad \text{d'où} \qquad u = \frac{60}{11}.$$

208. Revenons au nº 203 et supposons $|y| > 6$, $|z| > 6$, $|t| > 6$, d'où

$$\max.\left(\frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{5}{7}, \qquad \left|\frac{6}{5} - \frac{3}{p}\right| \leqq \frac{5}{7},$$

$$p = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,$$
$$q,\ r = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{6}{5} \qquad \text{avec} \qquad \max.\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right) = \frac{3}{7}.$$

$p = q = r = 2$ donne

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = -\frac{3}{10}, \qquad y = z = t = -10.$$

90ᵉ *solution :* $x = y = z = -10, \quad t = 5, \quad a = b = c = \tfrac{3}{5}, \quad d = \tfrac{9}{10}.$

209. Soient $p = 2$, $q = 3$, $r = 3, 4, 5, 6$; on a

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{r} = \frac{11}{30}.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{3}{u} + \frac{3}{r} = \frac{9}{5},$$

d'où

$$u = \frac{90r}{43r-40}, \quad \text{pas de solutions.}$$

$p=2,\ q=4,\ r=4, 5, 6$

$$u = \frac{60r}{27r-40}, \quad \text{pas de solutions.}$$

$p=2,\ q=5,\ r=5, 6$

$$u = \frac{30r}{13r-20}, \quad \text{pas de solutions.}$$

$p=2,\ q=r=6$ donnent

$$t = \tfrac{90}{31}.$$

$p=q=r=3$ donne

$$y=z=t=15.$$

91ᵉ *solution :* $x=y=z=15$, $t=5$, $a=b=c=\frac{3}{5}$, $d=\frac{11}{15}$.

210. $p=q=3,\ r=4, 5, 6$ donnent

$$u = \frac{45r}{19r-30}, \quad \text{pas de solutions.}$$

$p=3,\ q=4,\ r=4, 5, 6$ donnent

$$u = \frac{180r}{71r-120}, \quad \text{pas de solutions.}$$

$p=3,\ q=5,\ r=5$ donnent

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{6}{5}-\frac{1}{3}-\frac{2}{5}=\frac{7}{15}>\frac{3}{7};$$

donc les essais suivants sont inutiles.

211. Revenons maintenant au n° 26, et soit $x=-6$. Le système à résoudre est le suivant :

$$\frac{3}{u}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}=\frac{4}{3}, \qquad \frac{2}{y}+\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{p}=\frac{5}{6},$$

$$\frac{3}{v}+\frac{2}{z}-\frac{1}{t}-\frac{1}{y}=\frac{4}{3}, \qquad \frac{2}{t}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}+\frac{3}{q}=\frac{5}{6},$$

$$\frac{3}{w}+\frac{2}{t}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\frac{4}{3}, \qquad \frac{2}{z}+\frac{2}{t}-\frac{1}{y}+\frac{3}{r}=\frac{5}{6}.$$

Prenons l'équation

$$\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{u}=\frac{4}{3},$$

pour $|y|>6$, $|z|>3$, $|t|>3$, $|u|>9$, il n'y aura pas de solutions.

212. Soit $y=-6$, alors on a

$$\frac{3}{u}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}=\frac{5}{3},$$

qui pour $|u|>5$, $|z|>1$, $|t|>1$ n'a pas de solutions.

$$\max.\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{3},\qquad \left|\frac{5}{3}-\frac{3}{u}\right|\leqq\frac{1}{3},\qquad u=2.$$

$u=2$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=-\frac{1}{6},\qquad \frac{1}{v}=\frac{1}{t}+\frac{1}{2},\qquad \frac{1}{w}=\frac{1}{z}+\frac{1}{2},\qquad \frac{1}{v}+\frac{1}{w}=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6},$$

$$v=1,\qquad v=2,$$
$$w=-6,\qquad w=3.$$

$v=1$ donne

$$t=2.$$

$v=2$ donne

$$t=\infty,\qquad z=-6.$$

92ᵉ *solution :* $x=y=z=-6,\quad t=\infty,\quad a=b=c=\frac{2}{3},\quad d=\frac{1}{6}.$

213. Revenons au n° 211, et soit $y=6$. On a

$$\frac{3}{v}+\frac{2}{z}-\frac{1}{t}=\frac{3}{2};$$

pour $|v|>6$, $|z|>4$, $|t|>2$, pas de solutions.

$$\max.\left(\frac{2}{z}-\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{2},\qquad \left|\frac{3}{2}-\frac{3}{v}\right|\leqq\frac{1}{2},\qquad v=2,\ 3.$$

$v=2$ donne

$$z=2t,\qquad \text{d'où}\qquad u=\frac{6t}{2t+3},$$
$$t=-6,\ \infty,$$
$$z=-12,\ \infty.$$

93ᵉ *solution :* $x = y = \infty$, $z = 6$, $t = -6$, $a = b = \frac{2}{3}$, $c = \frac{5}{6}$, $d = \frac{1}{2}$.

214. $v = 3$ donne

$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} = \frac{1}{2},$$

$$t = -10,\ 6,\ \infty,$$
$$z = \quad 5,\ 3,\ 4,$$

aucune solution nouvelle.

215. Revenons au n° 211. Supposons $|y| > 6$, $|z| > 6$, $|t| > 6$,

$$\max.\left(\frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{4}{7}, \qquad \left|\frac{4}{3} - \frac{3}{u}\right| \leqq \frac{4}{7}, \qquad u = 2,\ 3;$$

de même

$$v,\ w = 2,\ 3;$$

mais

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = \frac{4}{3}, \qquad \text{d'où} \qquad u = 2, \qquad v = 2, \qquad w = 3,$$

$$\frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = -\frac{1}{6},$$
$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} - \frac{1}{y} = -\frac{1}{6},$$
$$\frac{2}{t} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{1}{3},$$

$$y = z, \qquad \frac{1}{t} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2},$$

$$y = z = \infty, \quad t = 6,$$
$$y = 12, \quad t = 4.$$

Pas de solutions nouvelles.

216. Revenons maintenant au n° 26, et faisons $x = +6$. Le système à résoudre est le suivant :

$$\frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{u} = \frac{2}{3}, \qquad \frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{7}{6},$$
$$\frac{2}{z} - \frac{1}{t} - \frac{1}{y} + \frac{3}{v} = \frac{2}{3}, \qquad \frac{2}{t} + \frac{2}{y} - \frac{1}{z} + \frac{3}{q} = \frac{7}{6},$$
$$\frac{2}{t} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{2}{3}, \qquad \frac{2}{z} + \frac{2}{t} - \frac{1}{y} + \frac{3}{r} = \frac{7}{6},$$

Prenons l'équation

$$\frac{2}{y}+\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{2}{p}=\frac{7}{6},$$

pour $|y|>6$, $|z|>6$, $|t|>3$, $|p|>10$ pas de solutions.

217. Essayons $y=6$. On a

$$\frac{2}{z}+\frac{2}{t}+\frac{3}{r}=\frac{4}{3},$$

qui pour $|z|>4$, $|t|>4$, $|r|>6$, n'a pas de solutions.

$$\max.\left(\frac{2}{z}+\frac{2}{t}\right)=\frac{2}{3},\qquad \left|\frac{4}{3}-\frac{3}{r}\right|\leq\frac{2}{3},\qquad \text{donne}\qquad r=2,\ 3,\ 4.$$

$r=2$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=-\frac{1}{12},\qquad \frac{1}{p}=\frac{1}{t}+\frac{1}{3},\qquad \frac{1}{q}=\frac{1}{z}+\frac{1}{3},\qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{7}{12}.$$

$$q=2,\ 3,\qquad z=6,\ \infty,$$
$$p=12,\ 4,\qquad t=-4,\ -12.$$

94ᵉ *solution :* $x=y=6$, $t=-12$, $z=\infty$, $a=b=\frac{3}{4}$, $c=\frac{1}{2}$, $d=\frac{7}{12}$.

218. $r=3$ donne

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{1}{6},\qquad \frac{1}{p}=\frac{1}{t}+\frac{1}{6},\qquad \frac{1}{q}=\frac{1}{z}+\frac{1}{6},\qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}.$$

$$q=-2,\ 3,\ 4,\ 2,\qquad z=6,\ 12,\ 3,$$
$$p=1,\ 6,\ 4,\ \infty,\qquad t=\infty,\ 12,\ -6.$$

95ᵉ *solution :* $x=y=z=6$, $t=\infty$, $a=b=c=\frac{2}{3}$, $d=\frac{1}{2}$.

96ᵉ *solution :* $x=y=6$, $t=z=12$, $a=b=\frac{2}{3}$, $c=d=\frac{7}{12}$.

219. $r=4$ donne

$$\frac{1}{z}-\frac{1}{t}=\frac{7}{24},\qquad \text{d'où}\qquad u=\frac{24}{5}.$$

220. Revenons au n° 216; supposons $|y| > 6$, $|z| > 6$, $|t| > 6$,

$$\max.\left(\frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{5}{7}, \qquad \left|\frac{7}{6} - \frac{3}{p}\right| \leq \frac{5}{7},$$

d'où

$$p, q, r = 2, 3, 4, 5, 6.$$

D'ailleurs

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{7}{6};$$

on a

$$\max.\left(\frac{2}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right) = \frac{3}{7}.$$

$p = q = 2$,

$$r = 2, 3, 4, 5, 6; \qquad \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{r} = \frac{1}{6};$$

donc

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{u} + \frac{2}{r} = \frac{11}{6}.$$

$u = \frac{9r}{5r - 6}$ élimine $r = 2, 4, 5, 6$; reste

$$r = 3,$$

$$\frac{2}{y} + \frac{2}{3} + \frac{2}{t} = -\frac{1}{3}, \qquad t = z = \infty, \qquad y = -6,$$

solution déjà trouvée (93e solution).

$p = 2$, $q = 3$, $r = 3, 4, 5, 6$,

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{r} = \frac{1}{3}.$$

$u = \frac{6r}{3r - 4}$ élimine 3, 5, 6; reste

$$r = 4,$$

$$\frac{2}{y} + \frac{2}{z} + \frac{2}{t} = \frac{1}{6},$$

$t = 6$ ne peut donner qu'une solution déjà trouvée.

$p = 2$, $q = 4$, $r = 4, 5, 6$,

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{r} = \frac{5}{12}.$$

$u = \frac{36r}{17r - 24}$ élimine $r = 4, 5, 6$.

$p = 2,\ q = 5,\ r = 5,\ 6,$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}+\frac{1}{r}=\frac{7}{15}.$$

$u = \dfrac{90r}{41r-60}$ élimine $r = 5,\ 6.$

$p = 2,\ q = r = 5,$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{4}{15},\qquad \text{d'où}\qquad t=\frac{45}{13}.$$

$p = q = 3,\ r = 3,\ 4,\ 5,\ 6,$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}+\frac{1}{r}=\frac{1}{2}.$$

$u = \dfrac{9r}{4r-6}$ élimine 3, 4, 5; reste

$$r = 6,$$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{1}{3},\qquad \text{d'où}\qquad t=6.$$

$p = 3,\ q = 4,\ r = 4,\ 5,\ 6,$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}+\frac{1}{r}=\frac{7}{12}.$$

$u = \dfrac{12r}{5r-8}$ élimine $r = 5,\ 6$; reste

$$r = 4,$$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=\frac{1}{3},\qquad t=6.$$

$p = 3,\ q = 5,\ r = 5,\ 6,$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}+\frac{1}{r}=\frac{19}{30},\qquad \frac{19}{30}-\frac{1}{5}=\frac{13}{30}>\frac{3}{7};$$

les essais sont inutiles.

$p = q = 4,\ r = 4,\ 5,\ 6,$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}+\frac{1}{r}=\frac{2}{3}.$$

$r = 4$ donne

$$t=\frac{9}{2};\qquad \frac{2}{3}-\frac{1}{5}=\frac{7}{15}>\frac{3}{7}.$$



$p = 4, \ q = 5, \ r = 5, 6,$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} \geqq \frac{31}{60} > \frac{3}{7};$$

les essais sont inutiles, ainsi que ceux qui suivent.

221. Revenons au n° 26, et faisons $x = -7$. On a l'équation

$$\frac{3}{u} + \frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} = \frac{9}{7};$$

pour $|p| > 6$, $|z| > 3$, $|t| > 3$, $|u| > 8$, pas de solutions. On a

$$\max.\left(\frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{4}{7}, \qquad \left|\frac{9}{7} - \frac{3}{u}\right| \leqq \frac{4}{7},$$

d'où

$$u, v, w = 2, 3, 4.$$

Mais

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = \frac{7}{9};$$

donc, pas de solutions.

222. Revenons au n° 26, et soit $x = +7$. On a

$$\frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{8}{7},$$

équation qui, pour $|y| > 7$, $|z| > 7$, $|t| > 3$, $|p| > 10$, n'a pas de solutions.

Essayons $y = 7$; on a

$$\frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{3}{r} = \frac{9}{7},$$

équation qui, pour $|z| > 4$, $|t| > 4$, $|r| > 7$, n'a pas de solutions.

$$\max.\left(\frac{2}{z} + \frac{2}{t}\right) = \frac{4}{7}, \qquad \left|\frac{9}{7} - \frac{3}{r}\right| \leqq \frac{4}{7}, \qquad \text{d'où} \qquad r = 2, 3, 4.$$

$r = 2$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = -\frac{3}{28}, \qquad \text{d'où} \qquad u = \frac{28}{3}.$$

$r = 3$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{1}{7}, \qquad \text{d'où} \qquad u = \frac{21}{4}.$$

$r = 4$ donne

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{15}{56}, \qquad \text{d'où} \qquad u = \frac{56}{13}.$$

223. Supposons maintenant $|y| > 7$, $|z| > 7$, $|t| > 7$,

$$\max.\left(\frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{5}{8}, \qquad \left|\frac{8}{7} - \frac{3}{p}\right| \leqq \frac{5}{8},$$

d'où

$$p = 2,\ 3,\ 4,\ 5, \qquad \text{de même} \qquad q,\ r = 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

D'ailleurs

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{8}{7}, \qquad \max.\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right) = \frac{3}{8}.$$

$p = q = 2$, $r = 2, 3, 4, 5$,

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{r} = \frac{1}{7},$$

$$\frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{u} = \frac{5}{7},$$

$$\frac{2}{z} + \frac{2}{t} - \frac{1}{y} + \frac{3}{r} = \frac{8}{7},$$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{r} + \frac{2}{r} + \frac{3}{u} = \frac{13}{7}.$$

$u = \dfrac{7r}{4r - 7}$ élimine $r = 3, 4, 5$; reste

$$r = 2, \qquad \text{d'où} \qquad t = -\frac{42}{5}.$$

$p = 2$, $q = 3$, $r = 3, 4, 5$,

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{r} = \frac{13}{42}.$$

$u = \dfrac{126r}{65r - 84}$ élimine $r = 3, 4, 5$.

$p = 2$, $q = 4$, $r = 4, 5$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{r} = \frac{11}{28},$$

$u = \dfrac{84r}{41r - 56}$ élimine $4, 5$.

$p = 2,\ q = r = 5,$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{17}{10}, \qquad t = \frac{210}{59}.$$

$p = q = 3,\ r = 3, 4, 5.$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{r} = \frac{10}{21}.$$

$u = \dfrac{63r}{29r - 42}$ élimine $r = 3, 4, 5.$

$p = 3,\ q = 4,\ r = 4, 5.$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{r} = \frac{47}{84},$$

$u = \dfrac{252r}{109r - 168}$ élimine $r = 4, 5.$

$p = 3,\ q = r = 5,$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{43}{105}, \qquad t = \frac{315}{71}.$$

$p = q = 4,\ r = 4, 5,$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{r} = \frac{9}{14},$$

$u = \dfrac{42r}{17r - 28}$ élimine $r = 4, 5.$

$p = q = r = 5,$

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} = \frac{19}{35}, \qquad t = \frac{105}{19}.$$

224. Revenons au n° 26, et soit $x = -8$. On a

$$\frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{u} = \frac{5}{4},$$

équation qui, pour $|y| > 6$, $|z| > 3$, $|t| > 3$, $|u| > 9$, n'a pas de solutions.

On a

$$\max.\left(\frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{1}{2}, \qquad \left|\frac{5}{4} - \frac{3}{u}\right| < \frac{1}{2}, \qquad u = 2, 3, 4.$$

De même

$$v,\ w = 2, 3, 4.$$

Or

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{5}{4}, \qquad u=v=2,\ w=4$$

est la seule solution.

97e *solution :* $x=y=z=-8$, $t=8$, $a=b=c=\frac{5}{8}$, $d=\frac{7}{8}$.

225. Revenons au n° 26 et faisons $x=8$. On a l'équation

$$\frac{2}{y}+\frac{2}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{p}=\frac{9}{8},$$

qui, pour $|y|>7$, $|z|>7$, $|t|>3$, $|p|>9$, n'admet pas de solutions.

Prenons l'équation

$$\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{u}=\frac{3}{4}.$$

On a

$$\max.\left(\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{2}, \qquad \left|\frac{3}{4}-\frac{3}{u}\right|\leq\frac{1}{2}, \qquad u=3,4,\ldots,12,$$

et de même

$$v,\ w=3,4,\ldots,12.$$

Or on a

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{3}{4},$$

qui, pour $|u|>4$, $|v|>4$, $|w|>4$, n'a pas de solutions.

$u=3$ donne

$$\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{5}{12},$$

$$v=3,4,$$
$$w=12,6.$$

$u=4$ donne

$$\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{1}{2}, \qquad u=v=w=4.$$

226. $u=3=v$, $w=12$ donnent

$$\frac{1}{t}=\frac{1}{y}+\frac{1}{4}, \qquad y=z;$$

s de solutions acceptables.

$u = 3$, $v = 4$, $w = 6$ donnent

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{y} + \frac{1}{12}, \qquad \frac{1}{t} = \frac{1}{y} + \frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{y} + \frac{1}{p} = \frac{3}{8};$$

pas de solutions acceptables.

$u = v = w = 4$,

$$y = z = t, \qquad \frac{1}{y} + \frac{1}{p} = \frac{3}{8}, \qquad y = 8, 24.$$

98ᵉ *solution :*	$x = y = z = t = 8$,		$a = b = c = d = \frac{5}{8}$.	
99ᵉ *solution :*	$x = y = z = 24$,	$t = 8$,	$a = b = c = \frac{5}{8}$,	$d = \frac{17}{24}$.

227. Revenons au n° 26 et faisons $x = -9$. On a l'équation

$$\frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{u} = \frac{11}{9},$$

qui, pour $|y| > 6$, $|z| > 3$, $|t| > 3$, $|u| > 9$, n'a pas de solutions.

$$\max.\left(\frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{4}{9}, \qquad \left|\frac{11}{9} - \frac{3}{u}\right| \leqq \frac{4}{9}, \qquad u = 2, 3;$$

de même

$$v, w = 2, 3.$$

Or on a

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = \frac{11}{9};$$

donc pas de solutions.

228. Revenons au n° 26 et soit $x = +9$. Alors on a l'équation

$$\frac{2}{y} + \frac{2}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{10}{9},$$

qui, pour $|y| > 7$, $|z| > 7$, $|t| > 3$, $|p| > 10$, n'a pas de solutions.

On a aussi

$$\frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t} + \frac{3}{u} = \frac{7}{9}, \qquad \max.\left(\frac{2}{y} - \frac{1}{z} - \frac{1}{t}\right) = \frac{4}{9}, \qquad \left|\frac{7}{9} - \frac{3}{u}\right| \leqq \frac{4}{9},$$

$$u, v, w = 2, 3, \ldots, 9.$$

D'ailleurs

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} = \frac{7}{9},$$

équation qui, pour $|u| > 3$, $|v| > 3$, $|w| > 3$, n'a pas de solutions.
$u = 2$ donne

$$\frac{1}{v} + \frac{1}{w} = \frac{5}{18},$$

$$v = 6,$$
$$w = 9.$$

$u = 3$ donne

$$\frac{1}{v} + \frac{1}{w} = \frac{4}{9},$$

$$v = 3,$$
$$w = 9.$$

Mais $w = 9$ donne

$$\frac{2}{t} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{9}, \quad \text{d'où} \quad t = 9, \quad y = z = -9 \quad \text{(inacceptable)}.$$

229. Revenons au n° 26 et soit $x = 10$. On a l'équation

$$\frac{2}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{3}{u} = \frac{6}{5},$$

qui, pour $|y| > 6$, $|z| > 3$, $|t| > 3$, $|u| > 10$, n'a pas de solutions.

$$\max.\left(\frac{2}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right) = \frac{2}{5}, \qquad \left|\frac{6}{5} - \frac{3}{u}\right| \leq \frac{2}{5}, \qquad u = 2, 3;$$

de même

$$v, w = 2, 3.$$

Or on a

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w} \neq \frac{6}{5};$$

donc pas de solutions.

230. Revenons au n° 26 et soit $x = +10$. On a l'équation

$$\frac{2}{y} + \frac{2}{z} + \frac{1}{t} + \frac{3}{p} = \frac{11}{10},$$

qui, pour $|y| > 7$, $|z| > 7$, $|t| > 3$, $|p| > 10$, n'a pas de solutions.



On aura aussi

$$\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}+\frac{3}{u}=\frac{4}{5}, \qquad \max.\left(\frac{2}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{5}+\frac{2}{11}=\frac{21}{55}, \qquad \left|\frac{4}{5}-\frac{3}{u}\right|\leq\frac{21}{55},$$

$$u,\ v,\ w=3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7.$$

Or

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{4}{5},$$

équation qui, pour $|u|>3$, $|v|>3$, $|w|>3$, n'a pas de solutions.

Or $u=3$ donne

$$\frac{1}{v}+\frac{1}{w}=\frac{7}{15},$$

qui n'a pas de solutions acceptables.

231. Revenons au nº 26 et supposons $|x|>10$, $|y|>10$, $|z|>10$, $|t|>10$, d'où

$$\max.\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}-\frac{1}{t}\right)=\frac{6}{11}, \qquad \left|1-\frac{3}{u}\right|\leq\frac{6}{11};$$

donc

$$p,\ q,\ r,\ u,\ v,\ w=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6.$$

D'ailleurs

$$\frac{1}{y}-\frac{1}{z}+\frac{1}{u}-\frac{1}{v}=0, \qquad \frac{1}{y}-\frac{1}{z}+\frac{1}{q}-\frac{1}{r}=0;$$

donc

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{r}=\frac{1}{v}+\frac{1}{q}=\frac{1}{w}+\frac{1}{p}=\sigma.$$

Voici les valeurs que peut prendre σ; elles correspondent aux combinaisons 2 à 2 des nombres 2, 3, 4, 5, 6 :

2, 2 donne	$\sigma=1$;	2, 3,	$\sigma=\frac{5}{6}$;	2, 4,	$\sigma=\frac{3}{4}$;	2, 5,	$\sigma=\frac{7}{10}$;
2, 6	$\sigma=\frac{2}{3}$;	3, 3,	$\sigma=\frac{2}{3}$;	3, 4,	$\sigma=\frac{7}{12}$;	3, 5,	$\sigma=\frac{8}{15}$;
3, 6 ou 4, 4	$\sigma=\frac{1}{2}$;	4, 5,	$\sigma=\frac{9}{20}$;	4, 6,	$\sigma=\frac{5}{12}$;	5, 5,	$\sigma=\frac{2}{5}$;
5, 6	$\sigma=\frac{11}{30}$;	6, 6,	$\sigma=\frac{1}{3}$;				

$\sigma=1$ donne

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{r}=1, \qquad u=v=w=p=q=r=2;$$

234. $u = v = 2$, $r = q = 3$, $w = p = 3$ donnent

$$y = z = x, \qquad x = -6, \qquad t = 6;$$

solution déjà trouvée.

$u = 3$, $r = 6$, $v = w = p = q = 4$ donne

$$z = 6.$$

$u = v = 3$, $r = q = 6$, $w = p = 4$ donne

$$y = 8.$$

On ne pourrait donc que tomber sur des solutions déjà trouvées.

235. Nous pouvons maintenant résumer, dans le Tableau suivant, les solutions que nous avons trouvées.

La méthode que nous avons appliquée nous permet de dire que nous les avons trouvées toutes :

$$a = b = c = d = \frac{1}{2}, \ \frac{3}{4}, \ \frac{1}{3}, \ \frac{5}{9}, \ \frac{7}{12}, \ \frac{2}{3}, \ \frac{5}{8}, \ \frac{3}{5};$$

$a = b = c =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$
$d =$	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{18}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{12}$

,

$a = b =$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$
$c = d =$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{12}$

,

$a = b =$		4	2	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	3	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{7}{2}$		1	1	$\frac{1}{2}$
$c =$	0			$\frac{7}{2}$	2	3	$\frac{9}{20}$	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{7}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{4}$	4	$\frac{9}{0}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{17}{8}$	2	4	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{2}$	0
$d =$	2	2	0	6	3	6	$\frac{3}{10}$	3	4	$\frac{5}{6}$	6	3	$\frac{7}{8}$	$\frac{3}{0}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{8}$	3	2	$-\frac{1}{n}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$

,

$a =$		$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$
$b =$	2	$\frac{7}{2}$	$\frac{2}{3}$
$c =$	3	2	2
$d =$	6	$\frac{5}{2}$	3

,

$a=b=c=$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$
$d=$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{7}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{17}{18}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{11}{15}$

,

$a=b=$		$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{3}{5}$	2	$\frac{7}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$
$c=$	6	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{2}$	2	$\frac{7}{2}$	$\frac{17}{24}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{}{15}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{5}{6}$	2
$d=$	2	$\frac{}{3}$	$\frac{}{3}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{7}{15}$	$\frac{2}{3}$	2	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	2	2	$\frac{7}{2}$

,

$a=b=c=$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{2}{3}$
$d=$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{17}{24}$	$\frac{7}{12}$

.

CHAPITRE V.

---

236. Soit

$$\varphi(u) = u^{a-1}(u-1)^{b-1}(u-x)^{\lambda-1}(u-y)^{\mu-1}.$$

Je poserai, avec M. Picard,

$$U_0 = \int_{u_0}^{0} \varphi(u)\,du, \qquad U_1 = \int_{u_0}^{1} \varphi(u)\,du,$$

$$U_\infty = \int_{u_0}^{\infty} \varphi(u)\,du, \qquad U_x = \int_{u_0}^{x} \varphi(u)\,du, \qquad U_y = \int_{u_0}^{y} \varphi(u)\,du;$$

a, b, λ, μ sont des nombres *réels* satisfaisant aux inégalités

$$a > 0, \qquad b > 0, \qquad \lambda > 0, \qquad \mu > 0, \qquad a + b + \lambda + \mu < 3.$$

Les arguments de u, $(u-1)$, $u-x$, $u-y$ sont choisis d'une façon arbitraire, mais bien déterminée au point u_0; ensuite, on les fait varier d'une façon continue.

Cela posé, choisissons les trois intégrales

$$\omega_1 = U_x - U_0,$$
$$\omega_2 = U_y - U_0,$$
$$\omega_3 = U_1 - U_0.$$

Les chemins suivis par le point d'affixe u étant ceux qu'indique la

Fig. 14.

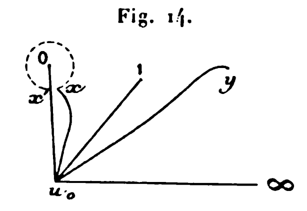


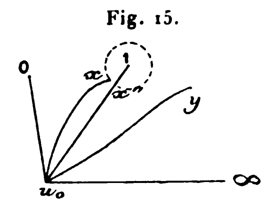
fig. 14, imaginons que le point x tourne autour de l'origine dans le sens direct. La substitution correspondante, calculée d'après la méthode de

M. Picard [1], sera

$$S_1 = \left| \begin{matrix} \omega_1 & (2a + 2\lambda)\omega_1 \\ \omega_2 & \omega_2 + [(2\lambda) - 1]\omega_1 \\ \omega_3 & \omega_3 + [(2\lambda) - 1]\omega_1 \end{matrix} \right| . \quad [2]$$

Supposons maintenant que le point x tourne autour du point 1 (*fig.* 15),

Fig. 15.

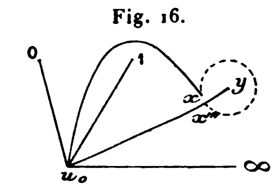


cette fois dans le sens inverse, on aura la deuxième substitution qui suit

$$S_2 = \left| \begin{matrix} \omega_1 & \omega_1 + [(-2\lambda) - (-2b - 2\lambda)](\omega_3 - \omega_1) \\ \omega_2 & \omega_2 \\ \omega_3 & \omega_1 + (-2\lambda)(\omega_3 - \omega_1) \end{matrix} \right| .$$

Un tour du point x, dans le sens inverse, autour du point y (*fig.* 16),

Fig. 16.



donne la substitution suivante :

$$S_3 = \left| \begin{matrix} \omega_1 & \omega_1[1-(-2\lambda)+(-2\lambda-2\mu)] + (-2\lambda - 2b)[1-(-2\mu)]\{\omega_2 + [(2b) - 1]\omega_3\} \\ \omega_2 & \omega_1(2b)[1-(-2\lambda)] + (-2\lambda)\omega_2 + [1-(2b)][1-(-2\lambda)]\omega_3 \\ \omega_3 & \omega_3 \end{matrix} \right| .$$

Laissons maintenant x fixe et faisons tourner y autour du point 1 (*fig.* 17) dans le sens direct. On aura une quatrième substitution

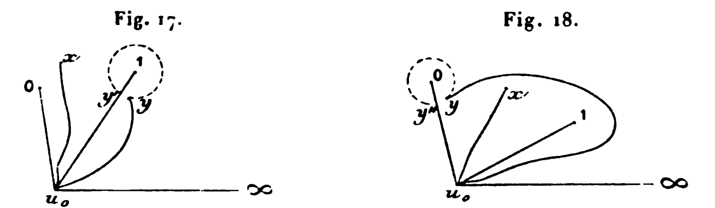
$$S_4 = \left| \begin{matrix} \omega_1 & \omega_1 \\ \omega_2 & \omega_2 + (2\mu)[(2b) - 1](\omega_2 - \omega_3) \\ \omega_3 & \omega_3 + [1 - (2\mu)](\omega_2 - \omega_3) \end{matrix} \right| .$$

---

[1] *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. IX, année 1885, Ire Partie, p. 202.

[2] J'emploie toujours la notation (a) pour $e^{i\pi a}$.

En faisant tourner le point y dans le sens direct autour du point x, on trouve la substitution S_3^{-1}.



Enfin, en le faisant tourner dans le sens direct autour du point o (*fig.* 18), on trouve la cinquième et dernière substitution qui suit

$$S_5 = \left| \begin{array}{ll} \omega_1 & [(2\mu) + (-2\lambda) - (2\mu - 2\lambda)]\omega_1 + (-2b - 2\lambda)[(2\mu) - 1]\omega_2 \\ & \quad + (-2\lambda)[(2\mu) - 1][1 - (-2b)]\omega_3 \\ \omega_2 & [(2a + 2\lambda + 2b + 2\mu) - (2a + 2b + 2\mu) - (2b + 2\lambda + 2\mu) \\ & \qquad - (2\mu - 2\lambda) + (2b + 2\mu) + (2\mu) + (-2\lambda) - 1]\omega_1 \\ & \quad + [(2\mu - 2b - 2\lambda) + (2a + 2\mu) - (-2b - 2\lambda) - (2\mu) + 1]\omega_2 \\ & \quad + [(2a + 2b + 2\mu) - (2\mu - 2b - 2\lambda) - (2a + 2\mu) \\ & \qquad - (2b + 2\mu) + (2\mu - 2\lambda) + (-2\lambda - 2b) + (2\mu) - (-2\lambda]\omega_3 \\ \omega_3 & [(2\mu) - 1][1 - (-2\lambda)]\omega_1 + [(2\mu) - 1](-2b - 2\lambda)\omega_2 \\ & \quad + [1 - (-2\lambda) + (2\mu - 2\lambda) + (-2b - 2\lambda) - (2\mu - 2\lambda - 2b)]\omega_3 \end{array} \right|.$$

L'équation déterminante relative à S_1 admet la racine double $s = 1$ et la racine simple $s = (2a + 2\lambda)$; celle relative à S_2 admet la racine double $s = 1$ et la racine simple $s = (-2\lambda - 2b)$; celle relative à S_3 admet la racine double $s = 1$ et la racine simple $s = (-2\lambda - 2\mu)$; celle relative à S_4 la racine double $s = 1$ et la racine simple $s = (2\mu + 2b)$; celle relative à S_5 admet la racine double $s = 1$ et la racine simple $s = (2a + 2\mu)$.

237. Nous nous proposons, dans ce qui va suivre, de former la forme quadratique ternaire à indéterminées conjuguées, que les cinq substitutions précédentes laissent inaltérées, au cas où l'on prend pour a, b, λ, μ l'une des solutions données à la fin du Chapitre V.

Soit

$$\begin{aligned} f = {} & A\omega_1\omega_1^0 + A'\omega_2\omega_2^0 + A''\omega_3\omega_3^0 \\ & + B\omega_2\omega_3^0 + B_0\omega_2^0\omega_3 + B'\omega_3\omega_1^0 + B'_0\omega_3^0\omega_1 + B''\omega_1\omega_2^0 + B''_0\omega_1^0\omega_2 \end{aligned}$$

cette forme, A, A′, A″ étant des constantes réelles, B et B_0, B′ et B'_0, B″ et

B''_0 des quantités imaginaires conjuguées, ω_1^0, ω_2^0, ω_3^0 étant les imaginaires conjuguées de ω_1, ω_2, ω_3.

Je formerai le déterminant suivant

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B''_0 & B' \\ B'' & A' & B_0 \\ B'_0 & B & A'' \end{vmatrix}$$

et chercherai dans quel cas il est nul, en même temps que tous ses premiers mineurs, ou s'il existe des cas où δ est nul sans que tous ses premiers mineurs le soient.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que la substitution S_1 laisse la forme f inaltérée sont

$$\begin{aligned}
&B'' \sin(a+\lambda)\pi + (-a)(A'+B_0)\sin\lambda\pi = 0,\\
&B''_0 \sin(a+\lambda)\pi + (\;\; a)(A'+B\;)\sin\lambda\pi = 0,\\
&B' \sin(a+\lambda)\pi + (\;\; a)(A''+B_0)\sin\lambda\pi = 0,\\
&B'_0 \sin(a+\lambda)\pi + (-a)(A''+B\;)\sin\lambda\pi = 0.
\end{aligned}$$

La substitution S_2 nous donne quatre autres équations

$$\begin{aligned}
&B \;\sin\lambda\pi = (\lambda+b)B''_0 \sin b\pi,\\
&B_0 \sin\lambda\pi = (-\lambda-b)B'' \sin b\pi,\\
&B' \sin(\lambda-b)\pi = (-\lambda)A\sin b\pi - (-b)A''\sin\lambda\pi,\\
&B'_0 \sin(\lambda-b)\pi = (\;\;\lambda)A\sin b\pi - (\;\;b)A''\sin\lambda\pi.
\end{aligned}$$

Enfin la substitution S_4 peut se déduire de la substitution S_2 par le changement de ω_1 en ω_2, de ω_2 en ω_1, de λ en $-\mu$, et de b en $-b$. On en conclut

$$\begin{aligned}
&B' \sin\mu\pi \qquad\;\; = (b+\mu)B''_0 \sin b\pi,\\
&B'_0 \sin\mu\pi \qquad\;\; = (-b-\mu)B'' \sin b\pi,\\
&B \;\sin(\mu-b)\pi = (-\mu)A'\sin b\pi - (-b)A''\sin\mu\pi,\\
&B_0 \sin(\mu-b)\pi = (\mu)A'\sin b\pi - (b)A''\sin\mu\pi,
\end{aligned}$$

ce qui donne, en les considérant simultanément,

$$\begin{aligned}
&\sigma A \;\;= \sin\lambda\pi \sin(a+b+\mu)\pi,\\
&\sigma A' = \sin\mu\pi \sin(a+b+\lambda)\pi,\\
&\sigma A'' = \sin b\pi \sin(a+\lambda+\mu)\pi
\end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
\sigma B &= -(\lambda + a)\sin b\pi \sin \mu\pi,\\
\sigma B_0 &= -(-\lambda - a)\sin b\pi \sin \mu\pi,\\
\sigma B' &= -(\mu + a)\sin b\pi \sin \lambda\pi,\\
\sigma B'_0 &= -(-\mu - a)\sin b\pi \sin \lambda\pi,\\
\sigma B'' &= -(b - a)\sin \lambda\pi \sin \mu\pi,\\
\sigma B''_0 &= -(a - b)\sin \lambda\pi \sin \mu\pi.
\end{aligned}
$$

On en conclut

$$\sigma^3 \delta = \sin a\pi \sin b\pi \sin \lambda\pi \sin \mu\pi \sin(a + b + \lambda + \mu)\pi.$$

Or, parmi les solutions dont nous avons donné le Tableau à la fin du Chapitre IV, nous devons éliminer celles où l'un des nombres a, b, c, d est égal à 1 ou à 0; en effet, nous supposons que, dans l'expression $\varphi(u) = u^{a-1}(u-1)^{b-1}(u-x)^{\lambda-1}(u-y)^{\mu-1}$, aucun des facteurs n'a un exposant nul; et de plus, on doit avoir $a > 0$, $b > 0$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$. Il en résulte que les nombres a, b, λ, μ sont certainement des *fractions*, et non pas des nombres entiers, et, par suite, *la condition nécessaire et suffisante pour que δ soit nul, c'est que $a + b + \lambda + \mu$ soit égal à un nombre entier.*

D'ailleurs, on a

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 a &= \sigma^2(A'A'' - BB_0) = \sin\mu\pi \sin b\pi \sin(a+\lambda)\pi \sin(a+b+\lambda+\mu)\pi,\\
\sigma^2 a' &= \sigma^2(A''A - B'B'_0) = \sin b\pi \sin\lambda\pi \sin(a+\mu)\pi \sin(a+b+\lambda+\mu)\pi,\\
\sigma^2 a'' &= \sigma^2(AA' - B''B''_0) = \sin\lambda\pi \sin\mu\pi \sin(a+\lambda)\pi \sin(a+b+\lambda+\mu)\pi,\\
\sigma^2 b &= \sigma^2(B'B'' - AB_0) = (-a)\sin\lambda\pi \sin\mu\pi \sin\nu\pi \sin(a+b+\lambda+\mu)\pi,\\
\sigma^2 b' &= \sigma^2(B''B - A'B'_0) = (-a)\sin\lambda\pi \sin\mu\pi \sin\nu\pi \sin(a+b+\lambda+\mu)\pi,\\
\sigma^2 b'' &= \sigma^2(BB' - A''B''_0) = (a)\sin\lambda\pi \sin\mu\pi \sin\nu\pi \sin(a+b+\lambda+\mu)\pi.
\end{aligned}
$$

Et il résulte de ces formules que, *si δ est nul, il en sera de même de tous ses premiers mineurs.*

238. Nous avons donc à partager les solutions trouvées au Chapitre IV en deux catégories, celles pour lesquelles $a + b + \lambda + \mu$ est un nombre entier, et celles pour lesquelles $a + b + \lambda + \mu$ est une fraction.

En nous plaçant à un autre point de vue, nous aurons à distinguer les solutions pour lesquelles aucun des dix nombres $a+b$, $a+c$, $a+d$, $b+c$, $b+d$, $c+d$, $a+b+c$, $b+c+d$, $c+d+a$, $d+a+b$ n'est

entier. Pour les solutions correspondantes, le groupe hyperfuchsien qui y est attaché est tel que le polyèdre fondamental est tout entier à l'intérieur de l'hypersphère limite; la surface du domaine fondamental n'a aucun point commun avec celle de cette hypersphère. Nous allons examiner successivement, en nous plaçant à ce double point de vue, les solutions trouvées au Chapitre IV.

Première catégorie : $a + b + c + d$ est entier.

$$a = b = c = d = \tfrac{1}{2}, \qquad 2a - 1 = 0, \qquad 2 - 3a = \tfrac{1}{2}, \qquad 4a = 2,$$

$$f = (\omega_1 - \omega_2 - \omega_3)(\omega_1^0 + \omega_2^0 - \omega_3^0), \qquad \varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{u(u-1)(u-x)(u-y)}}.$$

Les cinq substitutions fondamentales sont

$$S_1 = |\,\omega_1, \omega_2, \omega_3,\ \omega_1,\ \omega_2 - 2\omega_1,\ \omega_3 - 2\omega_1\,|,$$
$$S_2 = |\,\omega_1, \omega_2, \omega_3,\ 3\omega_1 - 2\omega_3,\ \omega_2,\ 2\omega_1 - \omega_3\,|,$$
$$S_3 = |\,\omega_1, \omega_2, \omega_3,\ 3\omega_1 + 2\omega_2 - 4\omega_3,\ -2\omega_1 - \omega_2 + 4\omega_3,\ \omega_3\,|,$$
$$S_4 = |\,\omega_1, \omega_2, \omega_3,\ \omega_1,\ 3\omega_2 - 2\omega_3,\ 2\omega_2 - \omega_3\,|,$$
$$S_5 = |\,\omega_1, \omega_2, \omega_3,\ -3\omega_1 - 2\omega_3 + 4\omega_3,\ \omega_2,\ -4\omega_1 - 2\omega_2 + 5\omega_3\,|.$$

$$a = b = c = d = \tfrac{3}{4}; \qquad 2a = 1 + \tfrac{1}{2}, \qquad 2 - 3a = -\tfrac{1}{4}, \qquad 4a = 3,$$

$$f = (\omega_1 - \omega_2 + i\omega_3)(\omega_1^0 - \omega_2^0 - i\omega_3^0), \qquad \varphi(u) = \frac{1}{\sqrt[4]{u(u-1)(u-x)(u-y)}}.$$

$$S_1 = |\,\omega_1, \omega_2, \omega_3,\ -\omega_1,\ \omega_2 - (1+i)\omega_1,\ \omega_3 - (1+i)\omega_1\,|,$$
$$S_2 = |\,\omega_1, \omega_2, \omega_3,\ (1+i)\omega_3 - i\omega_1,\ \omega_2,\ (1-i)\omega_1 + i\omega_3\,|,$$
$$S_3 = |\,\omega_1, \omega_2, \omega_3,\ -i\omega_1 + (i-1)\omega_2 + 2\omega_3,\ -(i+1)\omega_1 + i\omega_2 + 2\omega_3,\ \omega_3\,|,$$
$$S_4 = |\,\omega_1, \omega_2, \omega_3,\ \omega_1,\ i\omega_2 + (1-i)\omega_3,\ (1+i)\omega_2 - i\omega_3\,|,$$
$$S_5 = |\,\omega_1, \omega_2, \omega_3,\ -\omega_1 + (i+1)\omega_2 - 2i\omega_3,$$
$$-2(i+1)\omega_1 + (2i+1)\omega_2 + 2(1-i)\omega_3,\ -2\omega_1 + (1+i)\omega_2 + (1-2i)\omega_3\,|.$$

Toutes les autres solutions rentrent dans la deuxième catégorie.

Citons, par exemple, le cas $a = b = c = d = \frac{1}{3}$. Ici

$$f = j(\omega_2\omega_3^0 + \omega_3\omega_1^0) + j^2(\omega_2^0\omega_3 + \omega_3^0\omega_1) + \omega_1\omega_2^0 + \omega_3\omega_1^0,$$

où

$$j = \left(\tfrac{2}{3}\right) = e^{\frac{2i\pi}{3}}, \qquad \delta = -1.$$

On peut écrire

$$f = uu_0 + \tfrac{1}{2}vv_0 - \tfrac{1}{2}ww_0,$$

en posant

$$u = \omega_3,$$
$$v = \omega_1 + \omega_2 - \omega_3,$$
$$w = \omega_2 - \omega_1 + (j - j^2)\omega_3,$$

d'où, inversement,

$$\omega_1 = \tfrac{1}{2}v - \tfrac{1}{2}w - j^2 u,$$
$$\omega_2 = \tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{2}w - ju,$$
$$\omega_3 = u.$$

Voici quelles sont ici les cinq substitutions fondamentales et leurs transformées :

$$S_1 = |\,\omega_1, \omega_2, \omega_3 \quad j^2\omega_1,\ \omega_2 + (j-1)\omega_1,\ \omega_3 + (j-1)\omega_1\,|,$$
$$S_2 = |\,\omega_1, \omega_2, \omega_3 \quad -2j^2\omega_1 + (j^2 - j)\omega_3,\ \omega_2,\ (1 - j^2)\omega_1 + j^2\omega_3\,|,$$
$$S_3 = |\,\omega_1, \omega_2, \omega_3 \quad -2j^2\omega_1 + (j-1)\omega_2 - 3j\omega_3,\ (j-1)\omega_1 + j^2\omega_2 + 3\omega_3,\ \omega_3\,|,$$
$$S_4 = |\,\omega_1, \omega_2, \omega_3 \quad \omega_1,\ -2j\omega_2 + (j - j^2)\omega_3,\ (1 - j)\omega_2 + j\omega_3\,|,$$
$$S_5 = |\,\omega_1, \omega_2, \omega_3 \quad -2\omega_1 + (j^2 - j)\omega_2 - 3j^2\omega_3,\ -6\omega_1 + (j^2 - 3j)\omega_2 - 6j^2\omega_3,$$
$$-3\omega_1 + (j^2 - j)\omega_2 + (1 - 3j^2)\omega_3\,|$$

et

$$S_1 = |\,u, v, w \quad j^2u + \tfrac{1}{2}(j-1)v - \tfrac{1}{2}(j-1)w,\ (j^2 - j)u - \tfrac{1}{2}jv + \tfrac{1}{2}(1 - j^2)w,$$
$$(j^2 - j)u + \tfrac{1}{2}(j^2 - 1)v - \tfrac{1}{2}(j^2 - 3)w\,|$$
$$S_2 = |\,u, v, w \quad ju + \tfrac{1}{2}(1 - j^2)v - \tfrac{1}{2}(1 - j^2)w,\ (j^2 - j)u - \tfrac{1}{2}j^2v + \tfrac{1}{2}(1 - j)w,$$
$$(j^2 - j)u + \tfrac{1}{2}(j - 1)v - \tfrac{1}{2}(j - 3)w\,|,$$
$$S_3 = |\,u, v, w \quad u,\ \tfrac{1}{2}(3j - 1)v - \tfrac{3}{2}(j + 1)w,\ -\tfrac{3}{2}(j + 1)v - \tfrac{1}{2}(j - 3)w\,|,$$
$$S_4 = |\,u, v, w \quad j^2u + \tfrac{1}{2}(1 - j)v + \tfrac{1}{2}(1 - j)w,\ (j - j^2)u - \tfrac{1}{2}jv - \tfrac{1}{2}(j + 2)w,$$
$$(j^2 - j)u + \tfrac{1}{2}(j + 2)v + \tfrac{1}{2}(j + 4)w\,|,$$
$$S_5 = |\,u, v, w \quad j^2u + (j^2 - 1)v + (j^2 + 2)w,\ 2(j^2 - 1)u + (2j^2 - 1)v + 2(j^2 + 2)w,$$
$$2(2j^2 + 1)u + 2(2j^2 + 1)v + (2j + 5)w\,|.$$

Le cas $a = b = c = d = \frac{2}{3}$ est à rapprocher du précédent (il suffit de changer i en $-i$ dans les formules que l'on vient d'écrire). Ce cas a été étudié spécialement par M. Picard (¹).

Je vais me borner, pour les autres cas, à énumérer les solutions (a, b, c, d), telles que, dans le groupe hyperfuchsien correspondant, le

---

(¹) *Sur des fonctions de deux variables analogues aux fonctions modulaires* (*Acta mathematica*, t. II, p. 114).

polyèdre fondamental n'ait aucun point commun avec l'hypersphère limite :

$$a = b = c = d = \frac{5}{9},\quad \frac{7}{12},\quad \frac{5}{8},\quad \frac{3}{5},$$

$a = b = c =$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	7/[illegible]2	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{9}$
$d =$	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{9}{20}$	[illegible]/2	7/[illegible]5	$\frac{5}{12}$	$\frac{17}{18}$	$\frac{4}{9}$

,

$a = b = c =$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{8}$
$d =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{17}{24}$

,

$a = b =$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	7/[illegible]2	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{5}$	5/[illegible]2	$\frac{5}{9}$	7/[illegible]2	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{8}$	7/[illegible]2	$\frac{3}{5}$	7/[illegible]2	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$c =$	7/[illegible]2	$\frac{9}{20}$	5/[illegible]2	$\frac{3}{4}$	[illegible]/4	9/[illegible]0	$\frac{5}{6}$	$\frac{17}{18}$	[illegible]/2	7/[illegible]2	$\frac{7}{24}$	$\frac{2}{3}$	[illegible]/15	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	7/[illegible]2
$d =$	[illegible]/6	3/[illegible]0	[illegible]/3	[illegible]/3	$\frac{7}{8}$	3/[illegible]0	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{18}$	[illegible]/3	[illegible]/3	5/[illegible]2	[illegible]/2	7/[illegible]5	[illegible]/2	5/[illegible]2	[illegible]/2

,

$a = b =$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$
$c = d =$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{12}$

.

En tout...... $4 + 24 \times 4 + 16 \times 12 + 4 \times 6 = 316$ cas.

239. Pour terminer ce travail, je veux dire quelques mots du problème qui consiste à chercher si le système d'équations aux dérivées partielles (8) (n° 6) peut, pour certaines valeurs de α, β, β', γ, avoir son intégrale générale algébrique. Le problème revient à chercher pour quelles valeurs de a, b, λ, μ le groupe dont les cinq substitutions fondamentales sont S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 est un groupe fini.

En premier lieu, cherchons si l'on ne pourrait avoir un groupe dont les substitutions seraient de la forme

$$|\,\omega_1,\quad \omega_2,\quad \omega_3,\quad a\omega_1,\quad b\omega_2,\quad c\omega_3\,|,$$

a, b et c étant des racines de l'unité.

Remarquons tout d'abord que chacune des cinq substitutions S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 doit avoir pour forme canonique précisément une substitution de cette forme. Or les équations déterminantes des cinq substitutions consi-

dérées ont pour racines $(2a+2\lambda)$, $(-2b-2\lambda)$, $(-2\lambda-2\mu)$, $(2b+2\mu)$, $(2a+2\mu)$ (*voir* n° 236).

Soient

$$(2a+2\lambda)=\mathrm{A}, \quad (2b+2\lambda)=\mathrm{B}, \quad (2\lambda+2\mu)=\mathrm{C},$$
$$(2b+2\mu)=\mathrm{D}, \quad (2a+2\mu)=\mathrm{E},$$

A, B, C, D et E étant des racines de l'unité.

On en conclut

$$(2a)=\mathrm{A}(-2\lambda),$$
$$(2b)=\mathrm{B}(-2\lambda),$$
$$(2\mu)=\mathrm{C}(-2\lambda);$$

donc

$$\mathrm{D}=\mathrm{BC}(-4\lambda);$$

donc λ est réel et rationnel, et, par suite, il en est de même de a, b, μ.

La substitution S_1 sera de la forme indiquée si $(2\lambda)=1$, d'où il suit que λ doit être entier. Alors

$$\mathrm{S}_1=|\,\omega_1,\ \ \omega_2,\ \ \omega_3,\ \ (2a)\omega_1,\ \ \omega_2,\ \ \omega_3\,|.$$

La deuxième devient

$$\mathrm{S}_2=\left|\begin{matrix} \omega_1 & (-2b)\omega_1+[1-(-2b)]\omega_3 \\ \omega_2 & \omega_2 \\ \omega_3 & \omega_3 \end{matrix}\right|;$$

on en conclut que b doit être entier, et S_2 devient la substitution identique. Alors

$$\mathrm{S}_3=\left|\begin{matrix} \omega_1 & (-2\mu)\omega_1+[1-(-2\mu)]\omega_2 \\ \omega_2 & \omega_2 \\ \omega_3 & \omega_3 \end{matrix}\right|;$$

on en conclut que μ doit être entier.

S_3 devient la substitution identique.

S_4 dans ces conditions se réduit aussi à la substitution identique, et

$$\mathrm{S}_5=|\,\omega_1,\ \ \omega_2,\ \ \omega_3,\ \ \omega_1,\ \ (2a)\omega_2,\ \ \omega_3\,|.$$

Ainsi on trouve la solution suivante : a rationnel, b, λ, μ entiers. Comme on a

$$\beta+\beta'-\gamma=a-1, \qquad \gamma-\alpha=b, \qquad \beta=1-\lambda, \qquad \beta'=1-\mu,$$

on en conclut que β et β' sont entiers, ainsi que $\gamma-\alpha$, γ et α étant rationnels.

Si, d'une façon plus générale, on cherche si les substitutions du groupe peuvent être de la forme

$$|\omega_1, \quad \omega_2, \quad \omega_3, \quad a\omega_i, \quad b\omega_j, \quad c\omega_k|,$$

où i, j, k représentent l'une quelconque des permutations des indices 1, 2, 3, on retrouve les mêmes résultats.

Enfin si l'on essaye de faire en sorte que les substitutions soient de la forme $|\omega_i, \omega_j, \omega_k, \alpha\omega_i + \beta\omega_j, \gamma\omega_i + \delta\omega_j, \varepsilon\omega_k|$ ε étant racine de l'unité, et le groupe $|\omega_i, \omega_j, \alpha\omega_i + \beta\omega_j, \gamma\omega_i + \delta\omega_j|$ étant un groupe fini à deux variables, on retombe encore sur les mêmes résultats.

D'ailleurs si l'intégrale générale était une fonction algébrique de x et de y, elle serait une fonction algébrique de x seulement (y ayant une valeur constante quelconque). Donc le groupe formé par les trois premières substitutions prises seules devrait être fini. Or les groupes finis à trois variables autres que ceux déjà considérés dérivent de plus de *trois* substitutions fondamentales. Par suite, il n'y a pas d'autre solution que celle que nous avons indiquée plus haut.

240. Supposons maintenant que nous cherchions les cas où le système d'équations aux dérivées partielles (8), n° 6, admet *une seule* intégrale algébrique.

Je n'ai pas encore eu l'occasion d'écrire les équations auxquelles satisfait la série $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)$ considérée soit comme fonction de x seulement, soit comme fonction de y seulement. Ces équations, qui sont du troisième ordre, ont été données par M. Picard ([1]). Les voici

$$\begin{aligned} &x(1-x)(x-y)\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \\ &\quad + [(\beta+\gamma+2)x + (\beta'-\gamma-1)y - (\alpha+2\beta+4)x^2 + (\alpha+\beta-\beta'+3)xy]\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \\ &\qquad + (\beta+1)[\gamma - (2\alpha+\beta+2)x + (\alpha-\beta'+1)y]\frac{\partial z}{\partial x} - \alpha\beta(\beta+1)z = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &y(1-y)(y-x)\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} \\ &\quad + [(\beta'+\gamma+2)y + (\beta-\gamma-1)x - (\alpha+2\beta'+4)y^2 + (\alpha+\beta'-\beta+3)xy]\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\ &\qquad + (\beta'+1)[\gamma - (2\alpha+\beta'+2)y + (\alpha-\beta+1)x]\frac{\partial z}{\partial y} - \alpha\beta'(\beta'+1)z = 0, \end{aligned}$$

([1]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XC, n° 22, p. 1267, 31 mai 1880.

Soit $z = f(x, y)$ une fonction de deux variables qui satisfasse simultanément aux deux équations. Considérée comme fonction de x, elle admettra comme points critiques les points $x = 0$, $x = \infty$, $x = 1$, $x = y$.

Les racines de l'équation déterminante relative aux points........ $\begin{cases} x = 0, \\ x = \infty, \\ x = 1, \\ x = y, \end{cases}$ sont $\begin{cases} a = 0, 1, 1 + \beta' - \gamma, \\ b = \alpha, \beta, \beta + 1, \\ c = 0, 1, \gamma - \alpha - \beta, \\ d = 0, 1, 1 - \beta - \beta'. \end{cases}$

Considérée comme fonction de y, elle admettra comme points critiques les points $y = 0$, $y = \infty$, $y = 1$, $y = x$.

Les racines de l'équation déterminante relative aux points........ $\begin{cases} y = 0, \\ y = \infty, \\ y = 1, \\ y = x, \end{cases}$ sont $\begin{cases} a' = 0, 1, 1 + \beta - \gamma, \\ b' = \alpha, \beta', \beta' + 1, \\ c' = 0, 1, \gamma - \alpha - \beta', \\ d' = 0, 1, 1 - \beta - \beta'. \end{cases}$

Si les équations précédentes admettent une intégrale algébrique unique, ce sera une fonction algébrique de x seul, ou de y seul, les dérivées partielles logarithmiques du premier ordre seront des fonctions rationnelles de x et de y.

L'intégrale sera donc de la forme

$$z = x^a y^{a'} (1 - x)^c (1 - y)^{c'} (x - y)^d g(x, y).$$

a, a', c, c', d étant réels et rationnels, $g(x, y)$ étant un polynôme entier en x et en y, de degré m en x, de degré n en y, et l'on aura

$$b = -(a + c + d + m),$$
$$b' = -(a' + c' + d' + n).$$

Dès lors, le Tableau des intégrales que nous avons donné à la fin du Chapitre II nous fournira aisément des exemples où le système d'équations aux dérivées partielles (8) admet une seule intégrale algébrique.

m étant entier et positif, $F_1(-m, \beta, \beta', \gamma; x, y)$ est un polynôme entier de degré m, en x et en y.

On aura encore, comme intégrales algébriques,

$$(1 - x)^{\frac{p}{q}} (1 - y)^n F_1\left(\gamma + m + n + \frac{p}{q}, -m, -n, \gamma; x, \frac{x - y}{y - 1}\right),$$

en posant $\beta' = -m$, $\gamma - \beta - \beta' = -n$, $\gamma - \alpha - \beta = \frac{p}{q}$, m, n, p, q étant entiers, positifs, puis

$$(1-y)^{\frac{p}{q}}(1-x)^m F_1\left(\gamma + m + n + \frac{p}{q}, -m, -n, \gamma; \frac{x-y}{x-1}, y\right),$$

dans des circonstances analogues.

Si l'on pose $1 + \beta' - \gamma = \frac{p}{q}$, $\beta' = -n$, $1 + \alpha - \gamma = -m$, on aura l'intégrale algébrique

$$x^{\frac{p}{q}} y^n F_1\left(\beta + \frac{p}{q}, -m, -n, \beta - m - n; 1-x, \frac{y-x}{y}\right),$$

et, dans des circonstances analogues

$$y^{\frac{p}{q}} x^m F_1\left(\beta' + \frac{p}{q}, -m, -n, \beta' - m - n; \frac{x-y}{x}, 1-y\right).$$

Si l'on pose $1 - \beta - \beta' = \frac{p}{q}$, $\gamma - \beta - \beta' = -n$, $1 + \alpha - \gamma = -m$, on aura l'intégrale algébrique

$$(y-x)^{\frac{p}{q}}(-x)^n(1-x)^m F_1\left(1-\beta, -m, -n, 1-\beta-m-n-\frac{p}{q}, \frac{1-y}{1-x}, \frac{y}{x}\right).$$

Si l'on pose $1 + \beta - \gamma = \frac{p'}{q'}$, $1 + \beta' - \gamma = \frac{p}{q}$, $1 + \beta + \beta' - \gamma = -m$, on aura l'intégrale algébrique

$$x^{\frac{p}{q}} y^{\frac{p'}{q'}}(y-x)^m F_1\left(-m, \alpha + m + \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'}, 1-\alpha, 1+\frac{p}{q}; \frac{x(1-y)}{x-y}, \frac{x}{x-y}\right).$$

Si l'on pose $1 + \beta' - \gamma = \frac{p}{q}$, $\gamma - \alpha - \beta = \frac{p'}{q'}$, $\beta' = -n$, $1 - \alpha = -m$, on aura l'intégrale algébrique

$$x^{\frac{p}{q}}(1-x)^{\frac{p'}{q'}}(y-x)^n F_1\left[1 + m + n + \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'}, -m, -n, 1 + \frac{p}{q}; x, \frac{x(1-y)}{x-y}\right]$$

et, dans des circonstances analogues,

$$y^{\frac{p}{q}}(1-y)^{\frac{p'}{q'}}(x-y)^m F\left[1 + m + n + \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} - m, -n, 1 + \frac{p}{q}, \frac{y(1-x)}{y-x}, y\right].$$

En posant $\gamma - \alpha - \beta = \frac{p}{q}$, $\gamma - \alpha - \beta' = \frac{p'}{q'}$, $\gamma - \alpha = -m$, on aura l'intégrale algébrique

$$(1-x)^{\frac{p}{q}}(1-y)^{\frac{p'}{q'}}(x-y)^m \mathrm{F}_1\left[-m, 1-\alpha, \gamma-2m-\frac{p}{q}-\frac{p'}{q'}, 1+\frac{p}{q}; \frac{1-x}{y-x}, \frac{y(1-x)}{y-x}\right],$$

et ainsi de suite.

241. Pour finir, démontrons le théorème suivant, qui est une généralisation d'un théorème analogue concernant l'équation différentielle à laquelle satisfait la série hypergéométrique de Gauss ([1]).

Soient z_1, z_2, z_3 trois intégrales particulières, distinctes, du système d'équations aux dérivées partielles (8). Si l'on pose $p_i = \frac{\partial z_i}{\partial x}$, $q_i = \frac{\partial z_i}{\partial y}$, et si Δ désigne le déterminant

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix},$$

on sait que

$$\Delta = \mathrm{A} x^{\beta'-\gamma} y^{\beta-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}(1-y)^{\gamma-\alpha-\beta'-1}(x-y)^{-\beta-\beta}.$$

(*Voir* le Mémoire de M. Appell, déjà cité.)

Si z_1, z_2, z_3 sont des fonctions algébriques de x et de y, il en sera de même de $\omega_1 = \frac{z_1}{z_3}$ et de $\omega_2 = \frac{z_2}{z_3}$. *Réciproquement*, si ω_1 et ω_2 sont des fonctions algébriques de x et de y, et si Δ est aussi une fonction algébrique de x et de y (ce qui aura lieu si α, β, β', γ sont réels et rationnels), z_1, z_2 et z_3 seront aussi des fonctions algébriques de x et de y.

En effet, si ω_1, ω_2 sont des fonctions algébriques, il en sera de même de $\frac{\partial \omega_1}{\partial x}$, $\frac{\partial \omega_1}{\partial y}$, $\frac{\partial \omega_2}{\partial x}$, $\frac{\partial \omega_2}{\partial y}$. Or

$$\Delta = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = z_1 z_2 z_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{p_1}{z_1} & \frac{p_2}{z_2} & \frac{p_3}{z_3} \\ \frac{q_1}{z_1} & \frac{q_2}{z_2} & \frac{q_3}{z_3} \end{vmatrix} = \omega_1 \omega_2 z_3^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{p_1}{z_1} - \frac{p_3}{z_3} & \frac{p_2}{z_2} - \frac{p_3}{z_3} & \frac{p_3}{z_3} \\ \frac{q_1}{z_1} - \frac{q_3}{z_3} & \frac{q_2}{z_2} - \frac{q_3}{z_3} & \frac{q_3}{z_3} \end{vmatrix};$$

([1]) *Voir* le Mémoire de M. Schwarz : *Sur les cas dans lesquels la série hypergéométrique de Gauss représente une fonction algébrique de son quatrième élément* (*Journal de Crelle*, t. LXXV, p. 292, 335).

d'ailleurs

$$\frac{1}{\omega_1}\frac{\partial\omega_1}{\partial x} = \frac{p_1}{z_1} - \frac{p_3}{z_3}, \qquad \frac{1}{\omega_1}\frac{\partial\omega_1}{\partial y} = \frac{q_1}{z_1} - \frac{q_3}{z_3},$$

$$\frac{1}{\omega_2}\frac{\partial\omega_2}{\partial x} = \frac{p_2}{z_2} - \frac{p_3}{z_3}, \qquad \frac{1}{\omega_2}\frac{\partial\omega_2}{\partial y} = \frac{q_2}{z_2} - \frac{q_3}{z_3};$$

donc

$$\Delta = z_3^3\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x}\frac{\partial\omega_2}{\partial y} - \frac{\partial\omega_1}{\partial y}\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\right).$$

Donc z_3 est une fonction algébrique de x et de y, et par suite aussi z_1 et z_2.

LES ACTIONS

ÉLECTRODYNAMIQUES ET ÉLECTROMAGNÉTIQUES,

PAR M. P. DUHEM,

Chargé d'un Cours complémentaire de Physique mathématique et de Cristallographie
à la Faculté des Sciences de Lille.

INTRODUCTION

Dans un récent Mémoire ([1]), nous avons essayé d'établir les lois générales de l'induction électrodynamique, telles qu'elles ont été formulées par M. H. von Helmholtz, sur des hypothèses très simples et qui se présentent pour ainsi dire d'elles-mêmes. Nous allons maintenant, poursuivant cette revision des lois de l'électricité, aborder l'étude des actions électrodynamiques et des actions électromagnétiques. Nous ne nous occuperons que des corps conducteurs, magnétiques ou non magnétiques, et nous remettrons à un autre travail l'étude des corps diélectriques. La méthode que nous emploierons est l'extension de celle que nous avons appliquée aux conducteurs linéaires dans le tome III de nos *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*. Les résultats auxquels nous parviendrons seront en complet accord avec ceux qu'a formulés, parfois presque sans démonstration, M. H. von Helmholtz. Si nos études contribuent à faire partager au lecteur l'admiration que nous inspire l'œuvre de l'illustre physicien, notre but sera atteint.

([1]) P. Duhem, *Sur l'Induction électrodynamique* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. VII, B.; 1893).

CHAPITRE PRÉLIMINAIRE [1].

LES FONCTIONS D'HELMHOLTZ.

§ I. — *Introduction des fonctions d'Helmholtz.*

Changeons les notations qui nous ont servi au dernier Chapitre de notre Mémoire : *Sur l'Induction électrodynamique* [2]. Désignons par Ox, Oy, Oz les axes absolument fixes que nous avions désignés par $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$. Désignons par u, v, w les composantes suivant ces axes du flux électrique au point (x, y, z), composantes que nous avions désignées par φ, ψ, χ.

Posons

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathfrak{U} &= \int\left[\frac{1+\lambda}{2}\frac{u_1}{r} + \frac{1-\lambda}{2}\frac{x_1-x}{r^2}\left(\frac{x_1-x}{r}u_1 + \frac{y_1-y}{r}v_1 + \frac{z_1-z}{r}w_1\right)\right]d\varpi_1,\\
\mathfrak{V} &= \int\left[\frac{1+\lambda}{2}\frac{v_1}{r} + \frac{1-\lambda}{2}\frac{y_1-y}{r^2}\left(\frac{x_1-x}{r}u_1 + \frac{y_1-y}{r}v_1 + \frac{z_1-z}{r}w_1\right)\right]d\varpi_1,\\
\mathfrak{W} &= \int\left[\frac{1+\lambda}{2}\frac{w_1}{r} + \frac{1-\lambda}{2}\frac{z_1-z}{r^2}\left(\frac{x_1-x}{r}u_1 + \frac{y_1-y}{r}v_1 + \frac{z_1-z}{r}w_1\right)\right]d\varpi_1,
\end{aligned}
\right.
$$

les intégrations s'étendant à l'inducteur entier.

Ces quantités $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ changent de valeur, à un instant donné, d'un point à l'autre de l'espace; en un même point de l'espace, par l'effet des changements survenus dans l'inducteur, elles changent de valeur d'un instant à l'autre. Ce sont donc des fonctions des quatre variables x, y, z, t.

Moyennant les égalités (2) du Chapitre I et des égalités (8) et (13 *bis*) du Chapitre II, l'inducteur auquel appartient l'élément $d\varpi_1$ engendre au point (x, y, z) une force électromotrice d'induction dont les compo-

(1) Ce Chapitre est destiné à exposer quelques théorèmes analytiques indispensables. Ces théorèmes sont tous dus à M. H. von Helmholtz.

(2) P. Duhem, *Sur l'Induction électrodynamique* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. VII, B; 1893).



santes $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$ sont données par

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{E}_x dt &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(\delta\mathfrak{V} + \mathfrak{V}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathfrak{V}\frac{\partial g}{\partial x} + \mathfrak{W}\frac{\partial h}{\partial x}\right),\\ \mathcal{E}_y dt &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(\delta\mathfrak{V} + \mathfrak{V}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathfrak{V}\frac{\partial g}{\partial y} + \mathfrak{W}\frac{\partial h}{\partial y}\right),\\ \mathcal{E}_z dt &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(\delta\mathfrak{W} + \mathfrak{V}\frac{\partial f}{\partial z} + \mathfrak{V}\frac{\partial g}{\partial z} + \mathfrak{W}\frac{\partial h}{\partial z}\right). \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs, on a évidemment

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \delta\mathfrak{V} &= \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x} f + \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial y} g + \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z} h + \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial t} dt,\\ \delta\mathfrak{V} &= \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x} f + \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial y} g + \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z} h + \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial t} dt,\\ \delta\mathfrak{W} &= \frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial x} f + \frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial y} g + \frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial z} h + \frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial t} dt. \end{aligned}\right.$$

Soient a, b, c les composantes de la vitesse au point x, y, z. Nous aurons

$$(4)\quad f = a\,dt, \qquad g = b\,dt, \qquad h = w\,dt.$$

En vertu des égalités (3), (4) et (5), les égalités (2) deviendront

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{E}_x &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial t} + a\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x} + b\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial y} + c\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z} + \mathfrak{V}\frac{\partial a}{\partial x} + \mathfrak{V}\frac{\partial b}{\partial x} + w\frac{\partial c}{\partial x}\right),\\ \mathcal{E}_y &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial t} + a\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x} + b\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial y} + c\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z} + \mathfrak{V}\frac{\partial a}{\partial y} + \mathfrak{V}\frac{\partial b}{\partial y} + w\frac{\partial c}{\partial y}\right),\\ \mathcal{E}_z &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial t} + a\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial x} + b\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial y} + c\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial z} + \mathfrak{V}\frac{\partial a}{\partial z} + \mathfrak{V}\frac{\partial b}{\partial z} + w\frac{\partial c}{\partial z}\right). \end{aligned}\right.$$

Posons

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{P} &= \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial y},\\ \mathfrak{Q} &= \frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z},\\ \mathfrak{R} &= \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x}, \end{aligned}\right.$$

et les égalités (5) pourront encore s'écrire

$$
(7)\quad
\left\{
\begin{aligned}
\mathcal{E}_x &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} + b\mathfrak{R} - c\mathfrak{Q} + \frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{U}a + \mathfrak{V}b + \mathfrak{W}c)\right],\\
\mathcal{E}_y &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t} + c\mathfrak{P} - a\mathfrak{R} + \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{U}a + \mathfrak{V}b + \mathfrak{W}c)\right],\\
\mathcal{E}_z &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t} + a\mathfrak{Q} - b\mathfrak{P} + \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{U}a + \mathfrak{V}b + \mathfrak{W}c)\right].
\end{aligned}
\right.
$$

Les formules (6) mettent en évidence le rôle capital que joueront, dans la théorie de l'induction électrodynamique, les fonctions $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ définies par les égalités (1).

Ces fonctions ont été introduites en Physique et leurs propriétés ont été étudiées par M. H. von Helmholtz (¹). Nous allons reproduire les résultats auxquels il est parvenu.

§ 2. — *La fonction* $\Psi(x, y, z, t)$.

Considérons un conducteur dont (x_1, y_1, z_1) est un point et $d\varpi_1$ un élément de volume tracé autour de ce point; soit e_1 la densité de l'électricité libre en ce point; soit dS_1 un élément de surface électrisée appartenant au même conducteur; soit E_1 la densité superficielle en un point de l'élément dS_1.

Au point (x, y, z) de l'espace, et à l'instant t, la fonction potentielle électrostatique a pour valeur

$$
V(x, y, z, t) = \int \frac{e_1}{r}\, d\varpi_1 + \mathbf{S} \frac{E_1}{r}\, dS_1,
$$

la première intégrale s'étendant aux divers volumes électrisés qui font partie du système, et la seconde aux diverses surfaces électrisées; r est la distance du point (x, y, z) à un point de l'élément $d\varpi_1$ ou de l'élément dS_1.

Nous savons que cette fonction est uniforme, finie et continue dans tout

---

(¹) H. Helmholtz, *Ueber die Gesetze der inconstanten elektrischen Ströme in körperlich ausgedehnten Leitern* (*Verhandlungen der Naturhistorisch-Medicinischen Vereins zu Heidelberg*, B. V, p. 84-89; 1870. — *Helmholtz Abhandlungen*, t. I, p. 537). — *Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper* (*Borchardt's Journal*, t. LXXII, p. 57; 1870. — *Helmholtz Abhandlungen*, t. I, p. 545).



l'espace; à l'infini, elle devient égale à o comme $\frac{1}{r}$. Nous savons, en outre, qu'en tout point non situé sur une surface de discontinuité électrisée, cette fonction admet, par rapport à x, y, z, des dérivées partielles du premier ordre qui sont finies et continues.

Désignons par $\frac{\partial V}{\partial t}$ la quantité

$$-\mathrm{S}\left[\begin{array}{l} u_1\cos(N_1,x)+v_1\cos(N_1,y)+w_1\cos(N_1,z) \\ +u_2\cos(N_2,x)+v_2\cos(N_2,y)+w_2\cos(N_2,z)\end{array}\right]\frac{1}{r}\,dS_1$$
$$-\int\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial y_1}+\frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right)\frac{1}{r}\,d\varpi_1,$$

la première intégrale s'étendant aux surfaces de discontinuité que présentent les conducteurs et la seconde au volume de ces conducteurs. $\frac{\partial V}{\partial t}dt$ serait ainsi la variation éprouvée, pendant le temps dt, par la fonction potentielle, si les conducteurs, tout en étant traversés pendant ce temps par les flux électriques qui les traversent à l'instant t, demeuraient immobiles dans la position qu'ils occupent à cet instant.

Au sujet de cette fonction $\frac{\partial V}{\partial t}$, nous admettrons :

1° Que la quantité $\frac{\partial V}{\partial t}$ existe, est uniforme, finie et continue dans tout l'espace; qu'à l'infini, elle est égale à o de la même manière que $\frac{1}{r}$;

2° Qu'en tout point non situé sur l'une des surfaces de discontinuité électrisées que le système renferme, les quantités $\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial t}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial t}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial t}$ existent et sont finies, uniformes et continues.

Cela posé, considérons la fonction

$$(8)\qquad \Psi(x,y,z,t)=-\frac{1}{2\pi}\int\frac{\partial V(x_1,y_1,z_1,t)}{\partial t}\,\frac{1}{r}\,d\varpi_1,$$

l'intégrale s'étendant à tout l'espace. Elle représente la fonction potentielle d'un agent répandu dans tout l'espace, et ayant en chaque point (x_1, y_1, z_1) une densité solide, finie et continue

$$-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial V(x_1,y_1,z_1,t)}{\partial t}.$$

L'étude de la fonction potentielle (¹) nous fait connaître les propriétés de cette fonction, qui sont les suivantes :

1° La fonction $\Psi(x, y, z, t)$ existe, est finie, uniforme et continue en tout point (x, y, z) de l'espace.

2° Les fonctions $\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \frac{\partial \Psi}{\partial z}$ existent, sont finies, uniformes et continues en tout point (x, y, z) de l'espace.

3° Ces fonctions sont définies par les égalités suivantes :

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, y, z, t) &= -\frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial V(x_1, y_1, z_1, t)}{\partial t} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\varpi_1, \\ \frac{\partial}{\partial y} \Psi(x, y, z, t) &= -\frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial V(x_1, y_1, z_1, t)}{\partial t} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} d\varpi_1, \\ \frac{\partial}{\partial z} \Psi(x, y, z, t) &= -\frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial V(x_1, y_1, z_1, t)}{\partial t} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} d\varpi_1. \end{aligned} \right.$$

4° Les fonctions $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}, \ldots$ existent, sont finies, uniformes et continues en tout point de l'espace, même sur les surfaces électrisées.

5° En tout point de l'espace situé ou non sur une surface de discontinuité électrisée, on a

$$(10)\quad \Delta \Psi = 2 \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Les identités

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x_1^2} = \frac{1}{r} - \frac{(x_1 - x)^2}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y_1^2} = \frac{1}{r} - \frac{(y_1 - y)^2}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial z_1^2} = \frac{1}{r} - \frac{(z_1 - z)^2}{r^3}$$

(¹) Les résultats de cette étude ne sont pas *immédiatement* transportables ici, puisque l'agent dont Ψ est la fonction potentielle s'étend dans tout l'espace et que l'étude de la fonction potentielle a été faite en supposant que cette fonction provint de masses limitées; mais les raisonnements qui justifient les applications faites ici de ces propriétés sont si simples, qu'il a semblé inutile de les détailler.

donnent

$$\Delta r = \frac{2}{r}$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = \frac{1}{2} \Delta\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} = \frac{1}{2} \Delta\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} = \frac{1}{2} \Delta\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right),$$

ce qui permet de remplacer les équations (9) par les suivantes :

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, y, z, t) &= -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial V}{\partial t} \Delta\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) d\varpi_1, \\ \frac{\partial}{\partial y} \Psi(x, y, z, t) &= -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial V}{\partial t} \Delta\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) d\varpi_1, \\ \frac{\partial}{\partial z} \Psi(x, y, z, t) &= -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial V}{\partial t} \Delta\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right) d\varpi_1. \end{aligned} \right.$$

Or le théorème de Green donne aisément

$$\int \frac{\partial V(x_1, y_1, z_1, t)}{\partial t} \Delta\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) d\varpi_1 = \int \frac{\partial r}{\partial x} \Delta \frac{\partial V(x_1, y_1, z_1, t)}{\partial t} d\varpi_1$$
$$+ \mathbf{S}\, r \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial V(x_1, y_1, z_1, t)}{\partial N_1} + \frac{\partial V(x_1, y_1, z_1, t)}{\partial N_2}\right] dS_1 ;$$

la dernière intégrale s'étend aux diverses surfaces de discontinuité électrisées; N_1, N_2 sont les deux directions de la normale à l'élément dS_1.

En tout point (x_1, y_1, z_1) qui se trouve soit à l'extérieur, soit à l'intérieur des conducteurs, mais qui n'est pas situé sur une surface de discontinuité électrisée, on peut écrire

$$\Delta V(x_1, y_1, z_1, t) = -4\pi e_1$$

et, par conséquent,

$$\Delta \frac{\partial V(x_1, y_1, z_1, t)}{\partial t} = -4\pi \frac{\partial e_1}{\partial t}.$$

D'autre part, en tout point d'une surface de discontinuité électrisée,

on a

$$\frac{\partial \mathrm{V}(x_1, y_1, z_1, t)}{\partial \mathrm{N}_1} - \frac{\partial \mathrm{V}(x_1, y_1, z_1, t)}{\partial \mathrm{N}_2} = -4\pi \mathrm{E}_1$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \mathrm{V}(x_1, y_1, z_1, t)}{\partial \mathrm{N}_1} - \frac{\partial \mathrm{V}(x_1, y_1, z_1, t)}{\partial \mathrm{N}_2}\right] = -4\pi \frac{\partial \mathrm{E}_1}{\partial t}.$$

On a donc

$$(12) \qquad \int \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} \Delta\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) d\varpi_1 = -4\pi \int \frac{\partial e_1}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} d\varpi_1 - 4\pi\, \mathbf{S} \frac{\partial \mathrm{E}_1}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial x} d\mathrm{S}_1.$$

Mais on a aussi

$$(13) \qquad \frac{\partial e_1}{\partial t} = -\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right),$$

$$(14) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{E}_1}{\partial t} = &-[u_1 \cos(\mathrm{N}_1, x) + v_1 \cos(\mathrm{N}_1, y) + w_1 \cos(\mathrm{N}_1, z)] \\ &-[u_2 \cos(\mathrm{N}_2, x) + v_2 \cos(\mathrm{N}_2, y) + w_2 \cos(\mathrm{N}_2, z)]. \end{aligned}$$

En vertu des égalités (12), (13) et (14), la première des égalités (11) devient la première des égalités

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, y, z, t) = &-\int \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right) \frac{\partial r}{\partial x} d\varpi_1 \\ &- \mathbf{S}\,[\, u_1 \cos(\mathrm{N}_1, x) + v_1 \cos(\mathrm{N}_1, y) + w_1 \cos(\mathrm{N}_1, z) \\ &\quad + u_2 \cos(\mathrm{N}_2, x) + v_2 \cos(\mathrm{N}_2, y) + w_2 \cos(\mathrm{N}_2, z)] \frac{\partial r}{\partial x} d\mathrm{S}_1, \\ \frac{\partial}{\partial y} \Psi(x, y, z, t) = &-\int \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right) \frac{\partial r}{\partial y} d\varpi_1 \\ &- \mathbf{S}\,[\, u_1 \cos(\mathrm{N}_1, x) + v_1 \cos(\mathrm{N}_1, y) + w_1 \cos(\mathrm{N}_1, z) \\ &\quad + u_2 \cos(\mathrm{N}_2, x) + v_2 \cos(\mathrm{N}_2, y) + w_2 \cos(\mathrm{N}_2, z)] \frac{\partial r}{\partial y} d\mathrm{S}_1, \\ \frac{\partial}{\partial z} \Psi(x, y, z, t) = &-\int \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right) \frac{\partial r}{\partial z} d\varpi_1 \\ &- \mathbf{S}\,[\, u_1 \cos(\mathrm{N}_1, x) + v_1 \cos(\mathrm{N}_1, y) + w_1 \cos(\mathrm{N}_1, z) \\ &\quad + u_2 \cos(\mathrm{N}_2, x) + v_2 \cos(\mathrm{N}_2, y) + w_2 \cos(\mathrm{N}_2, z)] \frac{\partial r}{\partial z} d\mathrm{S}_1. \end{aligned} \right.$$

Les deux autres s'établissent d'une manière analogue.

Mais, d'autre part, on a

$$(16)\quad \int\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial y_1}+\frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right)\frac{\partial r}{\partial x}\,d\varpi_1 = -\int\left(u_1\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial x_1}+v_1\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y_1}+w_1\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial z_1}\right)d\varpi_1$$
$$-\mathbf{S}\big[\ u_1\cos(N_1,x)+v_1\cos(N_1,y)+w_1\cos(N_1,z)$$
$$+u_2\cos(N_2,x)+v_2\cos(N_2,y)+w_2\cos(N_2,z)\big]\frac{\partial r}{\partial x}\,dS_1$$

et

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial x_1} = -\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \dfrac{(x_1-x)^2}{r^3}-\dfrac{1}{r}, \\[2mm] \dfrac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y_1} = -\dfrac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{(x_1-x)(y_1-y)}{r^3}, \\[2mm] \dfrac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial z_1} = -\dfrac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial z} = \dfrac{(x_1-x)(z_1-z)}{r^3}, \end{cases}$$

en sorte que la première des égalités (15) devient la première des égalités

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\Psi(x,y,z,t) = -\displaystyle\int\left[\frac{u_1}{r}-\left(u_1\frac{x_1-x}{r}+v_1\frac{y_1-y}{r}+w_1\frac{z_1-z}{r}\right)\frac{x_1-x}{r^2}\right]d\varpi_1, \\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial y}\Psi(x,y,z,t) = -\displaystyle\int\left[\frac{v_1}{r}-\left(u_1\frac{x_1-x}{r}+v_1\frac{y_1-y}{r}+w_1\frac{z_1-z}{r}\right)\frac{y_1-y}{r^2}\right]d\varpi_1, \\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial z}\Psi(x,y,z,t) = -\displaystyle\int\left[\frac{w_1}{r}-\left(u_1\frac{x_1-x}{r}+v_1\frac{y_1-y}{r}+w_1\frac{z_1-z}{r}\right)\frac{z_1-z}{r^2}\right]d\varpi_1. \end{cases}$$

Les deux autres se démontrent d'une manière analogue.

Ces égalités (18) vont nous servir de point de départ dans l'étude des trois fonctions d'Helmholtz $\mathfrak{U}(x,y,z,t)$, $\mathfrak{V}(x,y,z,t)$, $\mathfrak{W}(x,y,z,t)$.

§ 3. — *Propriétés des fonctions* $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$.

Si l'on compare en effet les égalités (1) et (18), on trouve

$$(19)\quad \begin{cases} \mathfrak{U}(x,y,z,t) = \dfrac{1-\lambda}{2}\,\dfrac{\partial\Psi(x,y,z,t)}{\partial x}+\displaystyle\int\frac{u_1}{r}\,d\varpi_1, \\[2mm] \mathfrak{V}(x,y,z,t) = \dfrac{1-\lambda}{2}\,\dfrac{\partial\Psi(x,y,z,t)}{\partial y}+\displaystyle\int\frac{v_1}{r}\,d\varpi_1, \\[2mm] \mathfrak{W}(x,y,z,t) = \dfrac{1-\lambda}{2}\,\dfrac{\partial\Psi(x,y,z,t)}{\partial z}+\displaystyle\int\frac{w_1}{r}\,d\varpi_1. \end{cases}$$

De ces égalités on déduit sans peine

$$(20)\qquad \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z}=\frac{1-\lambda}{2}\Delta\Psi-\int\left(u_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+v_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+w_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)d\varpi_1.$$

Mais on a

$$\begin{aligned}
&\int\left(u_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+v_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+w_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)d\varpi_1\\
&=-\int\left(u_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_1}+v_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y_1}+w_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z_1}\right)d\varpi_1\\
&=\int\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial y_1}+\frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right)\frac{1}{r}d\varpi_1\\
&\quad+\mathbf{S}\left[\;u_1\cos(N_1,x)+v_1\cos(N_1,y)+w_1\cos(N_1,z)\right.\\
&\qquad\left.+u_2\cos(N_2,x)+v_2\cos(N_2,y)+w_2\cos(N_2,z)\right]dS_1,
\end{aligned}$$

ou bien, en vertu des égalités (13) et (14),

$$\int\left(u_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+v_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+w_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)d\varpi_1=-\frac{\partial V}{\partial t}.$$

Si l'on tient compte de cette égalité et de l'égalité (10), on trouve

$$(21)\qquad \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z}=-\lambda\frac{\partial V}{\partial t}.$$

Les égalités (19) donnent également

$$\begin{aligned}
\Delta\mathfrak{V}&=\frac{1-\lambda}{2}\frac{\partial}{\partial x}\Delta\Psi+\Delta\int\frac{u_1}{r}d\varpi_1,\\
\Delta\mathfrak{V}&=\frac{1-\lambda}{2}\frac{\partial}{\partial y}\Delta\Psi+\Delta\int\frac{v_1}{r}d\varpi_1,\\
\Delta\mathfrak{W}&=\frac{1-\lambda}{2}\frac{\partial}{\partial z}\Delta\Psi+\Delta\int\frac{w_1}{r}d\varpi_1.
\end{aligned}$$

Si l'on observe d'ailleurs que l'on a, d'après l'équation de Poisson,

$$\Delta \int \frac{u_1}{r} d\varpi_1 = -4\pi u,$$

$$\Delta \int \frac{v_1}{r} d\varpi_1 = -4\pi v,$$

$$\Delta \int \frac{w_1}{r} d\varpi_1 = -4\pi w,$$

et si l'on tient compte de l'égalité (10), les égalités précédentes deviennent

$$(22) \quad \begin{cases} \Delta \mathfrak{U} = (1-\lambda) \dfrac{\partial^2 V}{\partial x \, \partial t} - 4\pi u, \\ \Delta \mathfrak{V} = (1-\lambda) \dfrac{\partial^2 V}{\partial y \, \partial t} - 4\pi v, \\ \Delta \mathfrak{W} = (1-\lambda) \dfrac{\partial^2 V}{\partial z \, \partial t} - 4\pi w. \end{cases}$$

Les égalités (19) mettent, en outre, en évidence la proposition suivante :

Les fonctions $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ varient d'une manière continue même lorsqu'on traverse une surface de discontinuité électrisée; il en est de même de leurs dérivées partielles du premier ordre par rapport à x, y, z.

Telles sont les diverses propriétés des fonctions $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ dont nous aurons à faire usage par la suite. Ces propriétés, jointes aux formules (5) ou (7) permettent d'établir tout ce que M. H. von Helmholtz a démontré touchant le mouvement de l'électricité dans les conducteurs immobiles. Parmi ces propriétés, il en est qui nous seront utiles par la suite et que nous allons établir au paragraphe suivant.

§ 4. — *Propriétés de la quantité* Π.

Considérons la quantité

$$(23) \qquad \Pi = -\frac{\mathfrak{A}^2}{4} \int (\mathfrak{U} u + \mathfrak{V} v + \mathfrak{W} w) \, d\varpi,$$

dans laquelle l'intégration s'étend à tous les conducteurs parcourus par des courants, ou, ce qui revient au même, à tout l'espace.

Nous savons que l'on a en tout point

$$(22)\qquad \begin{cases} 4\pi u = (1-\lambda)\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial t} - \Delta\mathfrak{U}, \\ 4\pi v = (1-\lambda)\dfrac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial t} - \Delta\mathfrak{V}, \\ 4\pi w = (1-\lambda)\dfrac{\partial^2 V}{\partial z\, \partial t} - \Delta\mathfrak{W}. \end{cases}$$

En vertu de ces égalités (2), l'égalité (1) devient

$$(24)\qquad \begin{aligned} \Pi = {} & \frac{\mathfrak{A}^2}{16\pi}\int(\mathfrak{U}\,\Delta\mathfrak{U} + \mathfrak{V}\,\Delta\mathfrak{V} + \mathfrak{W}\,\Delta\mathfrak{W})\,d\varpi \\ & -(1-\lambda)\frac{\mathfrak{A}^2}{16\pi}\int\left(\mathfrak{U}\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial t} + \mathfrak{V}\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial t} + \mathfrak{W}\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial t}\right)d\varpi. \end{aligned}$$

Or le théorème de Green donne

$$(25)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int \mathfrak{U}\,\Delta\mathfrak{U}\,d\varpi + \mathbf{S}\,\mathfrak{U}\left(\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial N_1} + \frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial N_2}\right)dS = -\int\left[\left(\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi, \\ \displaystyle\int \mathfrak{V}\,\Delta\mathfrak{V}\,d\varpi + \mathbf{S}\,\mathfrak{V}\left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial N_1} + \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial N_2}\right)dS = -\int\left[\left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi, \\ \displaystyle\int \mathfrak{W}\,\Delta\mathfrak{W}\,d\varpi + \mathbf{S}\,\mathfrak{W}\left(\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial N_1} + \frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial N_2}\right)dS = -\int\left[\left(\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi, \end{cases}$$

les signes $\mathbf{S}$ indiquant des intégrations qui s'étendent aux diverses surfaces de discontinuité. Mais nous avons vu, à la fin du § 3, que l'on avait, aux divers points de ces surfaces,

$$\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial N_1} + \frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial N_2} = 0,$$
$$\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial N_1} + \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial N_2} = 0,$$
$$\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial N_1} + \frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial N_2} = 0,$$

en sorte que les égalités (25) donnent

$$(26)\qquad \begin{aligned} & \int(\mathfrak{U}\,\Delta\mathfrak{U} + \mathfrak{V}\,\Delta\mathfrak{V} + \mathfrak{W}\,\Delta\mathfrak{W})\,d\varpi \\ & = -\int\Bigg[\left(\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial z}\right)^2 \\ & \qquad + \left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial z}\right)^2 \\ & \qquad + \left(\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial z}\right)^2\Bigg]d\varpi. \end{aligned}$$

D'autre part, l'égalité (21)

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z} = -\lambda \frac{\partial V}{\partial t}$$

donne

$$\begin{aligned}
&\int \left(\mathfrak{U} \frac{\partial^2 V}{\partial x \, \partial t} + \mathfrak{V} \frac{\partial^2 V}{\partial y \, \partial t} + \mathfrak{W} \frac{\partial^2 V}{\partial z \, \partial t} \right) d\varpi \\
&= -\frac{1}{\lambda} \int \Big[\quad \mathfrak{U} \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial x \, \partial y} + \frac{\partial^2 \mathfrak{W}}{\partial x \, \partial z} \right) \\
&\qquad + \mathfrak{V} \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{U}}{\partial y \, \partial x} + \frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{W}}{\partial y \, \partial z} \right) \\
&\qquad + \mathfrak{W} \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{U}}{\partial z \, \partial x} + \frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial z \, \partial y} + \frac{\partial^2 \mathfrak{W}}{\partial z^2} \right) \Big] d\varpi.
\end{aligned}$$

Si l'on observe que les fonctions $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ et leurs dérivées partielles du premier ordre sont continues dans tout l'espace, on aura, au moyen d'intégrations par parties, la formule suivante

$$(27) \qquad \begin{aligned}
&\int \left(\mathfrak{U} \frac{\partial^2 V}{\partial x \, \partial t} + \mathfrak{V} \frac{\partial^2 V}{\partial y \, \partial t} + \mathfrak{W} \frac{\partial^2 V}{\partial z \, \partial t} \right) d\omega \\
&= \frac{1}{\lambda} \int \left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z} \right)^2 d\varpi.
\end{aligned}$$

Mais on a

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z} \right)^2 &= \left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z} \right)^2 \\
&\quad + 2 \left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z} \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x} \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x} \right),
\end{aligned}$$

en sorte que l'égalité (6) peut s'écrire

$$(28) \qquad \begin{aligned}
&\int \left(\mathfrak{U} \frac{\partial^2 V}{\partial x \, \partial t} + \mathfrak{V} \frac{\partial^2 V}{\partial y \, \partial t} + \mathfrak{W} \frac{\partial^2 V}{\partial z \, \partial t} \right) d\varpi \\
&= \frac{1}{1-\lambda} \int \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z} \right)^2 \right] d\varpi \\
&\quad + \frac{2}{1-\lambda} \int \left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z} \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x} \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} \right) d\varpi \\
&\quad + \frac{1}{\lambda(1-\lambda)} \int \left[\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z} \right]^2 d\varpi.
\end{aligned}$$

Au moyen d'intégrations par parties, on trouve sans peine l'égalité sui-

vante

$$\int\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y}\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z}-\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z}\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z}\right)d\varpi$$
$$=\mathbf{S}\,\mathfrak{W}\left[\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z_1}\cos(N_1,y)+\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z_2}\cos(N_2,y)-\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y_1}\cos(N_1,z)-\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y_2}\cos(N_2,z)\right]dS,$$

l'intégration qui figure au second membre s'étendant aux surfaces de discontinuité. Mais, comme nous l'avons vu à la fin du § 3, les dérivées partielles du premier ordre de la fonction $\mathfrak{V}$ sont continues dans tout l'espace; on a donc

$$\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z_1}\cos(N_1,y)+\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z_2}\cos(N_2\,y)=0,$$
$$\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y_1}\cos(N_1,z)+\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y_2}\cos(N_2,z)=0,$$

et l'égalité précédente devient la première des égalités

$$\int\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y}\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z}d\varpi=\int\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z}\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y}d\varpi,$$
$$\int\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z}\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x}d\varpi=\int\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x}\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z}d\varpi,$$
$$\int\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x}\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y}d\varpi=\int\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y}\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x}d\varpi,$$

qui transforment l'égalité (28) en

$$(29)\qquad \int\left(\mathfrak{U}\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial t}+\mathfrak{V}\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial t}+\mathfrak{W}\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial t}\right)d\varpi$$
$$=-\frac{1}{1-\lambda}\int\left[\left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z}\right)^2+2\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z}\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x}\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z}+\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y}\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x}\right)\right]d\varpi$$
$$+\frac{1}{\lambda(1-\lambda)}\int\left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z}\right)^2d\varpi.$$

Les égalités (24), (26) et (29) donnent

$$(30)\qquad \Pi=-\frac{\mathfrak{A}^2}{16\pi}\left\{\int\left[\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z}-\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x}-\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y}-\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x}\right)^2\right]d\varpi+\frac{1}{\lambda}\int\left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z}\right)^2d\varpi.\right\}$$

Cette formule (30) montre que, *si la constante* λ *d'Helmholtz est positive ou nulle, la quantité* Π *est à coup sûr négative.*

C'est de ce résultat que M. H. von Helmholtz a déduit cet autre :

Sur un système de conducteurs immobiles, l'équilibre électrique est assurément stable si la constante λ *est positive ou nulle.*

Cherchons l'expression de $\frac{\partial \Pi}{\partial t}$, cette dérivée étant prise *en supposant tous les conducteurs immobiles.*

L'égalité (1) donne

$$\begin{aligned}\int \mathcal{V} u \, d\varpi = \int\int\Big[&\frac{1+\lambda}{2}\frac{u_1}{r}\\ &+ \frac{1-\lambda}{2}\frac{x_1-x}{r^2}\Big(\frac{x_1-x}{r}u_1+\frac{y_1-y}{r}v_1+\frac{z_1-z}{r}w_1\Big)\Big] u \, d\varpi \, d\varpi_1\end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathcal{V} u \, d\varpi = &\int\int\Big[\frac{1+\lambda}{2}\frac{u_1}{r}\\ &\quad + \frac{1-\lambda}{2}\frac{x_1-x}{r^2}\Big(\frac{x_1-x}{2}u_1+\frac{y_1-y}{r}v_1+\frac{z_1-z}{r}w_1\Big)\Big]\frac{\partial u}{\partial t} d\varpi \, d\varpi_1\\ &+\int\int\Big[\frac{1+\lambda}{2r}\frac{\partial u_1}{\partial t}\\ &\quad + \frac{1-\lambda}{2}\frac{x_1-x}{r^2}\Big(\frac{x_1-x}{r}\frac{\partial u_1}{\partial t}+\frac{y_1-y}{r}\frac{\partial v_1}{\partial t}+\frac{z_1-z}{r}\frac{\partial w_1}{\partial t}\Big)\Big] u \, d\varpi \, d\varpi_1.\end{aligned}$$

Mais on a évidemment

$$\begin{aligned}&\int\int\Big[\frac{1+\lambda}{2r}\frac{\partial u_1}{\partial t}+\frac{1-\lambda}{2}\frac{(x_1-x)^2}{r^3}\frac{\partial u_1}{\partial t}\Big] u \, d\varpi \, d\varpi_1\\ &=\int\int\Big[\frac{1+\lambda}{2}\frac{u_1}{r}+\frac{1-\lambda}{2}\frac{(x_1-x)^2}{r^3}u_1\Big]\frac{\partial u}{\partial t} d\varpi \, d\varpi_1.\end{aligned}$$

Nous aurons donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathcal{V} u \, d\varpi = 2&\int\int\Big[\frac{1+\lambda}{2r}\frac{\partial u_1}{\partial t}+\frac{1-\lambda}{2}\frac{(x_1-x)^2}{r^3}\frac{\partial u_1}{\partial t}\Big] d\varpi \, d\varpi_1\\ &+\int\int\frac{1-\lambda}{2}\frac{(x_1-x)(y_1-y)}{r^3}\Big(v_1\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial v_1}{\partial t}\Big) d\varpi \, d\varpi_1\\ &+\int\int\frac{1-\lambda}{2}\frac{(x_1-x)(z_1-z)}{r^3}\Big(w_1\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial w_1}{\partial t}\Big) d\varpi \, d\varpi_1.\end{aligned}$$

De même

$$\frac{d}{dt}\int \mathcal{V} v\, d\varpi = 2\iint\left[\frac{1+\lambda}{2r}\frac{dv_1}{dt} - \frac{1-\lambda}{2}\frac{(y_1-y)^2}{r^3}\frac{dv_1}{dt}\right]d\varpi\, d\varpi_1$$
$$+\iint \frac{1-\lambda}{2}\frac{(y_1-y)(z_1-z)}{r^3}\left(w_1\frac{dv}{dt} - v\frac{dw_1}{dt}\right)d\varpi\, d\varpi_1$$
$$+\iint \frac{1-\lambda}{2}\frac{(y_1-y)(x_1-x)}{r^3}\left(u_1\frac{dv}{dt} - v\frac{du_1}{dt}\right)d\varpi\, d\varpi_1,$$

$$\frac{d}{dt}\int \mathcal{W} w\, d\varpi = 2\iint\left[\frac{1+\lambda}{2r}\frac{dw_1}{dt} - \frac{1-\lambda}{2}\frac{(z_1-z)^2}{r^3}\frac{dw_1}{dt}\right]d\varpi\, d\varpi_1$$
$$+\iint \frac{1-\lambda}{2}\frac{(z_1-z)(x_1-x)}{r^3}\left(u_1\frac{dw}{dt} - w\frac{du_1}{dt}\right)d\varpi\, d\varpi_1$$
$$+\iint \frac{1-\lambda}{2}\frac{(z_1-z)(y_1-y)}{r^3}\left(v_1\frac{dw}{dt} + w\frac{dv_1}{dt}\right)d\varpi\, d\varpi_1.$$

Ajoutons membre à membre ces trois égalités en observant que

$$\iint \frac{(y_1-y)(z_1-z)}{r^3}w_1\frac{\partial v}{\partial t}\,d\varpi\, d\varpi_1 = \iint \frac{(z_1-z)(y_1-y)}{r^3}w\frac{\partial v_1}{\partial t}\,d\varpi\, d\varpi_1,$$
$$\iint \frac{(z_1-z)(y_1-y)}{r^3}v_1\frac{\partial w}{\partial t}\,d\varpi\, d\varpi_1 = \iint \frac{(y_1-y)(z_1-z)}{r^3}v\frac{\partial w_1}{\partial t}\,d\varpi\, d\varpi_1,$$
$$\iint \frac{(z_1-z)(x_1-x)}{r^3}u_1\frac{\partial w}{\partial t}\,d\varpi\, d\varpi_1 = \iint \frac{(x_1-x)(z_1-z)}{r^3}u\frac{\partial w_1}{\partial t}\,d\varpi\, d\varpi_1,$$
$$\iint \frac{(x_1-x)(z_1-z)}{r^3}w_1\frac{\partial u}{\partial t}\,d\varpi\, d\varpi_1 = \iint \frac{(z_1-z)(x_1-x)}{r^3}w\frac{\partial u_1}{\partial t}\,d\varpi\, d\varpi_1,$$
$$\iint \frac{(x_1-x)(y_1-y)}{r^3}v_1\frac{\partial u}{\partial t}\,d\varpi\, d\varpi_1 = \iint \frac{(y_1-y)(x_1-x)}{r^3}v\frac{\partial u_1}{\partial t}\,d\varpi\, d\varpi_1,$$
$$\iint \frac{(y_1-y)(x_1-x)}{r^3}u_1\frac{\partial v}{\partial t}\,d\varpi\, d\varpi_1 = \iint \frac{(x_1-x)(y_1-y)}{r^3}u\frac{\partial v_1}{\partial t}\,d\varpi\, d\varpi_1,$$

et nous obtiendrons le résultat suivant :

$$\frac{d}{dt}\int(\mathcal{U}u + \mathcal{V}v + \mathcal{W}w)\,d\varpi$$
$$= 2\iint\left[\frac{1+\lambda}{2}\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1-\lambda}{2}\frac{x_1-x}{r^2}\left(\frac{x_1-x}{r}\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{y_1-y}{r}\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{z_1-z}{r}\frac{\partial w_1}{\partial t}\right)\right]u\,d\varpi\, d\varpi_1$$
$$+ 2\iint\left[\frac{1+\lambda}{2}\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{1-\lambda}{2}\frac{y_1-y}{r^2}\left(\frac{x_1-x}{r}\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{y_1-y}{r}\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{z_1-z}{r}\frac{\partial w_1}{\partial t}\right)\right]v\,d\varpi\, d\varpi_1$$
$$+ 2\iint\left[\frac{1+\lambda}{2}\frac{\partial w_1}{\partial t} + \frac{1-\lambda}{2}\frac{z_1-z}{r^2}\left(\frac{x_1-x}{r}\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{y_1-y}{r}\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{z_1-z}{r}\frac{\partial w_1}{\partial t}\right)\right]w\,d\varpi\, d\varpi_1,$$

résultat qui peut encore s'écrire, en vertu des égalités (1),

$$(31) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\int(\mathfrak{U}u + \mathfrak{V}v + \mathfrak{W}w)\,d\varpi = 2\int\left(\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial t}u + \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial t}v + \frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial t}w\right)d\varpi.$$

Les égalités (23) et (31) donnent

$$(32) \qquad \frac{\partial\Pi}{\partial t} = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int\left(\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial t}u + \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial t}v + \frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial t}w\right)d\varpi.$$

Nous ferons usage de cette égalité au prochain Chapitre.

§ 5. — *Influence de la constante λ d'Helmholtz sur les phénomènes d'induction.*

Dans quel cas les trois composantes $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$ [égalités (2)] de la force électromotrice d'induction en un point d'un système conducteur ont-elles des valeurs indépendantes de la valeur attribuée à la constante λ?

Les égalités (19)

$$\mathfrak{U} = \int\frac{u_1}{r}\,d\varpi_1 + \frac{1-\lambda}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial x},$$
$$\mathfrak{V} = \int\frac{v_1}{r}\,d\varpi_1 + \frac{1-\lambda}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial y},$$
$$\mathfrak{W} = \int\frac{w_1}{r}\,d\varpi_1 + \frac{1-\lambda}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial z},$$

qui sont vraies à chaque instant t, que les conducteurs soient en repos ou en mouvement, résolvent immédiatement la question posée. Elles nous montrent que, *pour que les forces électromotrices d'induction engendrées par un conducteur mobile ou non soient indépendantes de la constante d'Helmholtz, il faut et il suffit que l'on ait dans tout l'espace*

$$(33) \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial z} = 0,$$

ou, en d'autres termes, que la valeur de la fonction Ψ au même instant, en tous les points de l'espace, soit la même.

Ces conditions peuvent se transformer.

Avec É. Mathieu ([1]), réservons le nom de *seconde fonction poten-*

([1]) E. Mathieu, *Théorie du Potentiel et ses applications à l'électrostatique et au magnétisme*, t. I, p. 77; Paris, 1885.

tielle de la distribution dont les densités solide et superficielle sont ρ et à la quantité

$$V = \int \frac{\rho_1}{r} d\varpi_1 + \mathbf{S} \frac{\sigma_1}{r} dS_1$$

et nommons *première fonction potentielle* la quantité

$$J = \int \rho_1 r \, d\varpi_1 + \mathbf{S} \sigma_1 r \, dS_1.$$

Considérons la distribution qui a pour densité solide

$$\rho = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

et pour densité superficielle

$$\begin{aligned}\sigma = -[\ & u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z) \\ & + u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z)].\end{aligned}$$

Sa première fonction potentielle sera

$$(34) \qquad \begin{aligned} J = & -\int \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right) r \, d\varpi_1 \\ & - \mathbf{S} [\ u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z) \\ & \qquad + u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z)] \, r \, dS_1. \end{aligned}$$

Les égalités (15) donneront

$$(35) \qquad \frac{d\Psi}{\partial x} = \frac{\partial J}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial J}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{\partial J}{\partial z},$$

en sorte que les égalités (33) pourront s'écrire

$$(33\ bis) \qquad \frac{\partial J}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial J}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial J}{dz} = 0.$$

La quantité J est elle-même susceptible d'une interprétation intéressante. Considérons la première fonction potentielle de la distribution électrique que porte le système :

$$(36) \qquad K = \int e_1 r \, d\varpi_1 + \mathbf{S} E_1 r \, dS_1.$$

On a

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{dy} + \frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial t} = -[&\quad u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z) \\ &+ u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z)].\end{aligned}$$

Supposons que les conducteurs qui forment le système demeurent immobiles, mais parcourus par les flux (u, v, w); dans le temps dt, K éprouverait une variation

$$\frac{\partial K}{\partial t} dt = dt \int \frac{\partial e_1}{\partial t} r \, d\varpi_1 + dt \,\mathbf{S} \frac{\partial E_1}{\partial t} r \, dS_1.$$

On voit que l'on a

$$J = \frac{\partial K}{\partial t}. \tag{37}$$

Pour les courants uniformes, on a, à chaque instant,

$$\frac{\partial e}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial E}{\partial t} = 0;$$

on voit alors que les égalités (7 *bis*) sont toujours vérifiées pour de semblables courants.

Sous cette forme, on voit que les quantités $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ ont des valeurs indépendantes de λ, même lorsque les conducteurs sont mobiles, pourvu que les courants soient uniformes. *La valeur de λ n'influe donc pas sur les phénomènes d'induction produits dans des conducteurs quelconques, pourvu que les courants qui les parcourent soient uniformes.*

PREMIÈRE PARTIE.

LES FORCES ÉLECTRODYNAMIQUES.

CHAPITRE I.

L'ÉNERGIE INTERNE D'UN SYSTÈME DE CONDUCTEURS PARCOURUS PAR DES COURANTS.

§ I. — *Détermination de l'énergie interne d'un système de conducteurs parcourus par des courants.*

Nous savons que cette énergie interne U est donnée par la formule

$$EU = E\Upsilon + W + \sum\left(\Theta - T\frac{\partial\Theta}{\partial T}\right)q + EU', \tag{1}$$

ces diverses lettres ayant une signification et des propriétés qui ont été précisées dans nos *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme* au Livre XIV, Chapitre I, § I.

Il s'agit de déterminer la forme de la quantité U'.

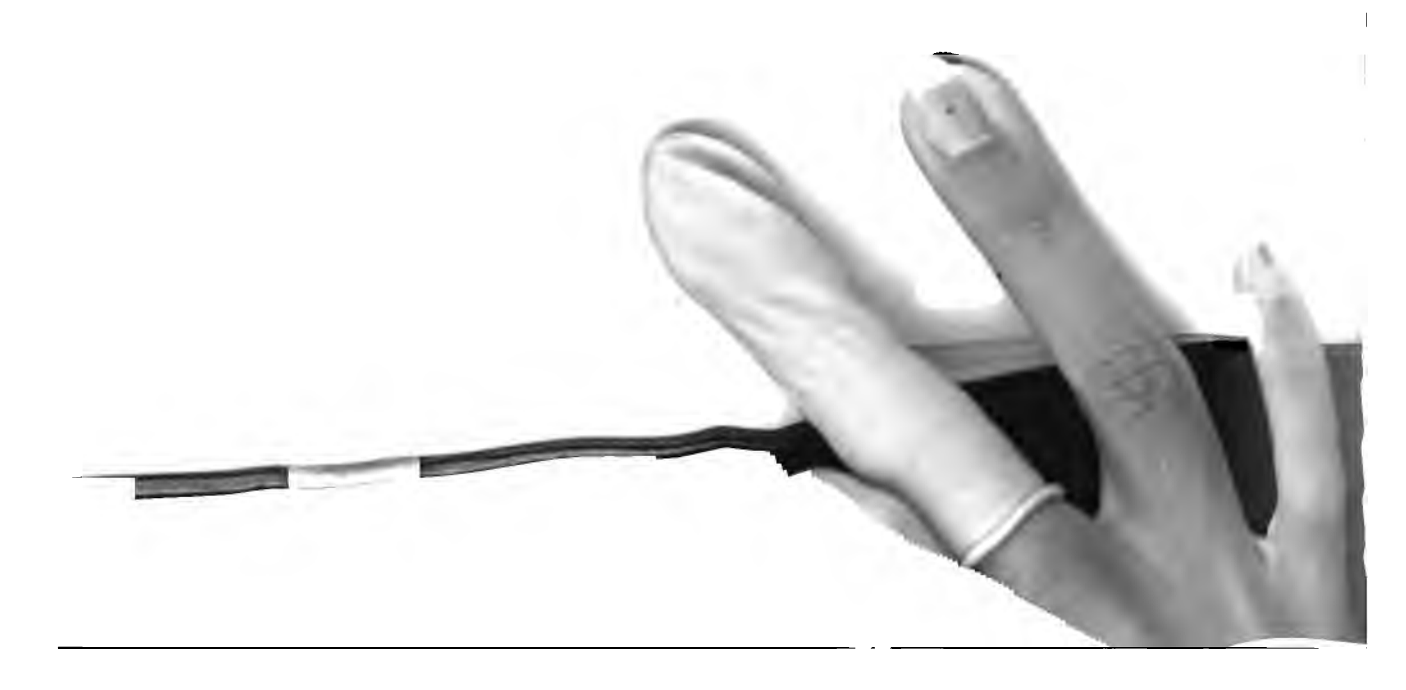
Nous ferons usage, pour cela, d'une extension de la loi de Joule.

Soient, dans un système parcouru par des courants, u, v, w les composantes du flux au point (x, y, z) et ρ la résistance spécifique en ce point. Posons

$$\rho u = E_x, \qquad \rho v = E_y, \qquad \rho w = E_z. \tag{2}$$

Nous admettrons que, *pendant le temps dt, le système dégage une quantité de chaleur* d*Q donnée par l'égalité*

$$E\,dQ = dt\int\Big[\left(E_x - T\frac{\partial E_x}{\partial T}\right)u + \left(E_y - T\frac{\partial E_y}{\partial T}\right)v + \left(E_z - T\frac{\partial E_z}{\partial T}\right)w\Big]d\varpi. \tag{3}$$



Cette loi est l'extension naturelle aux conducteurs d'étendue finie en tout sens de la loi énoncée (*Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, Livre XIV, Chapitre II) pour les conducteurs linéaires.

L'application de cette loi aux conducteurs immobiles va nous servir à déterminer la forme de la quantité U'.

Ces conducteurs étant immobiles, nous aurons

$$dQ = -dU,$$

ou bien, en vertu de l'égalité (1),

$$(4)\qquad E\,dQ = -\left[E\,d\Upsilon + dW + d\sum\left(\Theta - T\frac{\partial\Theta}{\partial T}\right)q + E\,dU'\right].$$

La loi dont l'égalité (3) représente la généralisation a été établie en négligeant les variations que les changements d'état du système font éprouver à la quantité Θ. Il est alors aisé de voir que l'on a

$$(5)\qquad \begin{aligned} &dW + d\sum\left(\Theta - T\frac{\partial\Theta}{\partial T}\right)q \\ &\quad = dt\int\Bigg[\frac{\partial(\varepsilon V+\Theta)}{\partial x}u + \frac{\partial(\varepsilon V+\Theta)}{\partial y}v + \frac{\partial(\varepsilon V+\Theta)}{\partial z}w \\ &\qquad\qquad - T\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\,\partial T}u + \frac{\partial^2\Theta}{\partial y\,\partial T}v + \frac{\partial^2\Theta}{\partial z\,\partial T}w\right)\Bigg]d\varpi. \end{aligned}$$

D'autre part, la théorie des courants hydro-électriques montre que l'on a, en général,

$$(6)\qquad E\,d\Upsilon = -dt\int\left[\left(\varphi_x - T\frac{\partial\varphi_x}{\partial T}\right)u + \left(\varphi_y - T\frac{\partial\varphi_y}{\partial T}\right)v + \left(\varphi_z - T\frac{\partial\varphi_z}{\partial T}\right)w\right]d\varpi.$$

Les égalités (4), (5), (6) donnent donc

$$(7)\qquad \begin{aligned} E\,dQ = dt\int\Bigg\{ &\left[\varphi_x - T\frac{\partial\varphi_x}{\partial T} - \varepsilon\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\Theta - T\frac{\partial\Theta}{\partial T}\right)\right]u \\ &+ \left[\varphi_y - T\frac{\partial\varphi_y}{\partial T} - \varepsilon\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\Theta - T\frac{\partial\Theta}{\partial T}\right)\right]v \\ &+ \left[\varphi_z - T\frac{\partial\varphi_z}{\partial T} - \varepsilon\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\Theta - T\frac{\partial\Theta}{\partial T}\right)\right]w\Bigg\}d\varpi - E\,dU'. \end{aligned}$$

D'autre part, les égalités (2), jointes aux égalités (5) du Chapitre pré-

liminaire, donnent, dans le cas où les conducteurs sont immobiles,

$$\begin{aligned}
E_x &= -\frac{\partial(\varepsilon V + \Theta)}{\partial x} + \varphi_x - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t},\\
E_y &= -\frac{\partial(\varepsilon V + \Theta)}{\partial y} + \varphi_y - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t},\\
E_z &= -\frac{\partial(\varepsilon V + \Theta)}{\partial z} + \varphi_z - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Ces égalités, jointes à l'égalité (3), donnent

$$(8)\quad \begin{aligned}
\mathrm{E}\, dQ = dt \int \Big\{ & \left[\varphi_x - T\frac{\partial \varphi_x}{\partial T} - \varepsilon\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\Theta - T\frac{\partial \Theta}{\partial T}\right) - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t}\right] u \\
+ & \left[\varphi_y - T\frac{\partial \varphi_y}{\partial T} - \varepsilon\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\Theta - T\frac{\partial \Theta}{\partial T}\right) - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t}\right] v \\
+ & \left[\varphi_z - T\frac{\partial \varphi_z}{\partial T} - \varepsilon\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\Theta - T\frac{\partial \Theta}{\partial T}\right) - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t}\right] w \Big\}\, d\varpi.
\end{aligned}$$

La comparaison des égalités (7) et (8) donne

$$(9)\qquad \mathrm{E}\, dU' = \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\, dt \int \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} u + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} v + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} w\right) d\varpi.$$

Cette égalité est établie en supposant immobiles tous les conducteurs du système.

Or, dans ces conditions, si l'on pose [Chapitre préliminaire, égalité (23)]

$$(10)\qquad \Pi = -\frac{\mathfrak{A}^2}{4}\int (\mathcal{U} u + \mathcal{V} v + \mathcal{W} w)\, d\varpi,$$

nous avons vu que l'on avait [*ibid.*, égalité (32)]

$$(11)\qquad \frac{\partial \Pi}{\partial t} = \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} u + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} v + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} w\right) d\varpi.$$

Si l'on compare les égalités (9) et (11), on trouve

$$\mathrm{E}\frac{dU'}{dt} = \frac{\partial \Pi}{\partial t}.$$

Cette égalité doit avoir lieu quelles que soient les variations subies par les flux électriques sur les divers conducteurs; elle exige seulement que



ceux-ci soient immobiles. De cette égalité on déduit

$$\mathrm{EU}' = -\Pi + \mathrm{C},$$

C étant une quantité qui peut dépendre de la forme et de la position des divers conducteurs dont le système est composé, mais qui ne dépend pas des flux électriques dont le système est le siège.

Mais, si l'on observe que les quantités Π et U' s'annulent toutes deux lorsque, sur le système, tous les flux deviennent égaux à o, on voit que l'on a nécessairement $C = 0$ et

$$\mathrm{EU}' = -\Pi. \tag{12}$$

Les égalités (1), (10) et (11) déterminent complètement l'énergie interne d'un système parcouru par des courants quelconques.

§ 2. — *Variation que la quantité* Π *subit dans une modification quelconque.*

Les relations qu'a l'énergie interne d'un système parcouru par des courants avec la quantité Π déterminée par l'égalité (10) nous amènent nécessairement à la question suivante : ***Étudier la variation que subit la quantité*** Π ***lorsqu'on fait varier d'une manière quelconque la forme et la position des conducteurs que renferme le système et les flux électriques qui traversent ces conducteurs.***

Posons

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{U}_1 &= \frac{1+\lambda}{2}\frac{u_1}{r} + \frac{1-\lambda}{2}\frac{x_1-x}{r^2}\left(\frac{x_1-x}{r}u_1 + \frac{y_1-y}{r}v_1 + \frac{z_1-z}{r}w_1\right),\\ \mathrm{V}_1 &= \frac{1+\lambda}{2}\frac{v_1}{r} + \frac{1-\lambda}{2}\frac{y_1-y}{r^2}\left(\frac{x_1-x}{r}u_1 + \frac{y_1-y}{r}v_1 + \frac{z_1-z}{r}w_1\right),\\ \mathrm{W}_1 &= \frac{1+\lambda}{2}\frac{w_1}{2} + \frac{1-\lambda}{2}\frac{z_1-z}{r^2}\left(\frac{x_1-x}{r}u_1 + \frac{y_1-y}{r}v_1 + \frac{z_1-z}{r}w_1\right).\end{aligned}\right.$$

Il est facile de voir que la quantité

$$\mathrm{U}_1 u + \mathrm{V}_1 v + \mathrm{W}_1 w$$

sera une quantité où figureront symétriquement les variables relatives aux éléments $d\varpi$, $d\varpi_1$, en sorte que l'on aura

$$\mathrm{U}_1 u + \mathrm{V}_1 v + \mathrm{W}_1 w = \mathrm{U} u_1 + \mathrm{V} v_1 + \mathrm{W} w_1 \tag{14}$$

et que l'on pourra écrire

$$(13)\qquad \Pi = \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\sum (U_1 u + V_1 v + W_1 w)\, d\varpi\, d\varpi_1,$$

le signe $\sum$ indiquant une sommation qui s'étend à toutes les combinaisons distinctes des éléments du système deux à deux.

Si l'élément $d\varpi$ variait seul, tout, dans l'élément $d\varpi_1$, demeurant invariable, la quantité

$$(U_1 u + V_1 v + W_1 w)\, d\varpi\, d\varpi_1$$

subirait une variation

$$\delta[(U_1 u + V_1 v + W_1 w)\, d\varpi]\, d\varpi_1$$

qui pourrait encore s'écrire, à cause de l'égalité (12),

$$\delta[(U u_1 + V v_1 + W w_1)\, d\varpi]\, d\varpi_1.$$

Si, au contraire, l'élément $d\varpi_1$ variait seul, tout, dans l'élément $d\varpi$, demeurant invariable, la quantité

$$(U_1 u + V_1 v + W_1 w)\, d\varpi\, d\varpi_1$$

subirait une variation

$$\delta_1[(U_1 u + V_1 v + W_1 w)\, d\varpi_1]\, d\varpi$$

qui peut encore s'écrire, en vertu de l'égalité (12),

$$\delta_1[(U u_1 + V v_1 + W w_1)\, d\varpi_1]\, d\varpi.$$

La variation totale de la quantité

$$(U_1 u + V_1 v + W_1 w)\, d\varpi\, d\varpi_1$$

est donc

$$\delta[(U u_1 + V v_1 + W w_1)\, d\varpi]\, d\varpi_1 + \delta_1[(U_1 u + V_1 v + W_1 w)\, d\varpi_1]\, d\varpi$$

ou, si l'on préfère,

$$\delta[(U_1 u + V_1 v + W_1 w)\, d\varpi]\, d\varpi_1 + \delta_1[(U u_1 + V v_1 + W w_1)\, d\varpi_1]\, d\varpi.$$

On a donc, d'après l'égalité (15),

$$\delta\Pi = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\sum\left\{\delta[(U u_1 + V v_1 + W w_1)\, d\varpi]\, d\varpi_1 + \delta_1[(U_1 u + V_1 v + W_1 w)\, d\varpi_1]\, d\varpi\right\}$$

ou

$$\delta\Pi = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\sum\left\{\delta[(U_1 u + V_1 v + W_1 w)\, d\varpi]\, d\varpi_1 + \delta_1[(U u_1 + V v_1 + W w_1)\, d\varpi_1]\, d\varpi\right\}.$$

D'ailleurs, on voit sans peine que ces égalités peuvent s'écrire

$$(16)\qquad \delta\Pi = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int d\varpi_1 \int \delta[(U_1 u + V_1 v + W_1 w)\, d\varpi],$$

$$(16\ bis)\qquad \delta\Pi = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int d\varpi_1 \int \delta[(U u_1 + V v_1 + W w_1)\, d\varpi],$$

les intégrations s'étendant toutes au système tout entier. On doit se souvenir que δ indique une variation où l'élément $d\varpi$ varie seul, tout, en l'élément $d\varpi_1$, demeurant invariable.

C'est la forme (16) qui va nous servir au calcul explicite de $\delta\Pi$.

Soient δx, δy, δz les composantes du déplacement subi par l'élément $d\varpi$. D'après la définition de la caractéristique δ, il est évident qu'on aura simplement

$$(17)\qquad \begin{cases} \delta U_1 = \dfrac{\partial U_1}{\partial x}\,\delta x + \dfrac{\partial U_1}{\partial y}\,\delta y + \dfrac{\partial U_1}{\partial z}\,\delta z, \\ \delta V_1 = \dfrac{\partial V_1}{\partial x}\,\delta x + \dfrac{\partial V_1}{\partial y}\,\delta y + \dfrac{\partial V_1}{\partial z}\,\delta z, \\ \delta W_1 = \dfrac{\partial W_1}{\partial x}\,\delta x + \dfrac{\partial W_1}{\partial y}\,\delta y + \dfrac{\partial W_1}{\partial z}\,\delta z. \end{cases}$$

Si l'élément $d\varpi$ se déplaçait en entraînant avec lui le flux électrique dont il est le siège, sans que ce flux changeât ni de grandeur ni de direction par rapport à des axes invariablement liés à l'élément $d\varpi$, les composantes u, v, w de ce flux par rapport aux axes Ox, Oy, Oz qui sont invariables subiraient des variations $\delta' u$, $\delta' v$, $\delta' w$. Nous pouvons poser

$$(18)\qquad \begin{cases} \delta u = \delta' u + \dfrac{\partial u}{\partial t}\, dt, \\ \delta v = \delta' v + \dfrac{\partial v}{\partial t}\, dt, \\ \delta w = \delta' w + \dfrac{\partial w}{\partial t}\, dt. \end{cases}$$

On voit que $\frac{\partial u}{\partial t}dt$, $\frac{\partial v}{\partial t}dt$, $\frac{\partial w}{\partial t}dt$ sont les variations qu'éprouveraient, pendant le temps dt, les composantes u, v, w du flux en un point de l'élément $d\varpi$, si celui-ci demeurait immobile.

Calculons $\delta' u$, $\delta' v$, $\delta' w$.

Pour cela, prenons trois axes rectangulaires $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ dont l'orientation soit invariablement liée à celle de la matière qui forme l'élément $d\varpi$. Soient φ, ψ, χ les composantes par rapport à $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ du flux en un point de l'élément $d\varpi$. Nous aurons

$$\left\{\begin{aligned} u &= \varphi\cos(\xi,x) + \psi\cos(\eta,x) + \chi\cos(\zeta,x),\\ v &= \varphi\cos(\xi,y) + \psi\cos(\eta,y) + \chi\cos(\zeta,y),\\ w &= \varphi\cos(\xi,z) + \psi\cos(\eta,z) + \chi\cos(\zeta,z).\end{aligned}\right. \tag{19}$$

Si l'élément $d\varpi$ se déplace en entraînant le flux qui le traverse, les quantités φ, ψ, χ demeurent invariables; elles doivent donc être comptées comme constantes dans le calcul des quantités $\delta' u$, $\delta' v$, $\delta' w$, en sorte que l'on aura

$$\left\{\begin{aligned} \delta' u &= \varphi\,\delta\cos(\xi,x) + \psi\,\delta\cos(\eta,x) + \chi\,\delta\cos(\zeta,x),\\ \delta' v &= \varphi\,\delta\cos(\xi,y) + \psi\,\delta\cos(\eta,y) + \chi\,\delta\cos(\zeta,y),\\ \delta' w &= \varphi\,\delta\cos(\xi,z) + \psi\,\delta\cos(\eta,z) + \chi\,\delta\cos(\zeta,z).\end{aligned}\right. \tag{20}$$

Soient ω, ω', ω'' les composantes relatives à Ox, Oy, Oz de la rotation instantanée de la particule $d\varpi$. On voit facilement que l'on a

$$\left\{\begin{aligned} \delta\cos(\xi,x) &= \cos(\xi,z)\,\omega' - \cos(\xi,y)\,\omega'',\\ \delta\cos(\xi,y) &= \cos(\xi,x)\,\omega'' - \cos(\xi,z)\,\omega,\\ \delta\cos(\xi,z) &= \cos(\xi,y)\,\omega\ - \cos(\xi,x)\,\omega',\\ \delta\cos(\eta,x) &= \cos(\eta,z)\,\omega' - \cos(\eta,y)\,\omega'',\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right. \tag{21}$$

Les égalités (19), (20), (21) donnent

$$\left\{\begin{aligned} \delta' u &= w\omega' - v\omega'',\\ \delta' v &= u\omega'' - w\omega,\\ \delta' w &= v\omega\ - u\omega'.\end{aligned}\right. \tag{22}$$

Les égalités (16), (17), (18), (22) donnent

$$\begin{aligned}
\delta\Pi = &-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int d\varpi_1 \int\Big[\quad u\left(\frac{\partial \mathrm{U}_1}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial \mathrm{U}_1}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial \mathrm{U}_1}{\partial z}\,\delta z\right)\\
&\qquad\qquad\qquad + v\left(\frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial \mathrm{V}_1}{\partial z}\,\delta z\right)\\
&\qquad\qquad\qquad + w\left(\frac{\partial \mathrm{W}_1}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial \mathrm{W}_1}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial \mathrm{W}_1}{\partial z}\,\delta z\right)\Big]\,d\varpi\\
&-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int d\varpi_1 \int\Big[\quad \mathrm{U}_1\left(\frac{\partial u}{\partial t}\,dt + w\omega' - v\omega''\right)\\
&\qquad\qquad\qquad + \mathrm{V}_1\left(\frac{\partial v}{\partial t}\,dt + u\omega'' - w\omega\right)\\
&\qquad\qquad\qquad + \mathrm{W}_1\left(\frac{\partial w}{\partial t}\,dt + v\omega - u\omega'\right)\Big]\,d\varpi\\
&-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int d\varpi_1 \int(\mathrm{U}_1 u + \mathrm{V}_1 v + \mathrm{W}_1 w)\,\delta(d\varpi).
\end{aligned}$$

Si l'on observe que l'on a

$$\begin{aligned}
\mathfrak{U} &= \int \mathrm{U}_1\,d\varpi_1,\\
\mathfrak{V} &= \int \mathrm{V}_1\,d\varpi_1,\\
\mathfrak{W} &= \int \mathrm{W}_1\,d\varpi_1,
\end{aligned}$$

on pourra écrire

$$\begin{aligned}
(23)\quad \delta\Pi = &-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int\Big[\quad u\left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z}\,\delta z\right)\\
&\qquad\qquad + v\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z}\,\delta z\right)\\
&\qquad\qquad + w\left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x}\,\delta x + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z}\,\delta z\right)\Big]\,d\varpi\\
&-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,dt\int\left(\mathfrak{U}\frac{\partial u}{\partial t} + \mathfrak{V}\frac{\partial v}{\partial t} + \mathfrak{W}\frac{\partial w}{\partial t}\right)d\varpi\\
&-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int[(\mathfrak{V}\omega'' - \mathfrak{W}\omega')u + (\mathfrak{W}\omega - \mathfrak{U}\omega'')v + (\mathfrak{U}\omega' - \mathfrak{V}\omega)w]\,d\varpi\\
&-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int(\mathfrak{U}u + \mathfrak{V}v + \mathfrak{W}w)\,\delta(d\varpi).
\end{aligned}$$

Cette égalité (23) nous sera d'un grand usage dans le calcul des forces électrodynamiques.

CHAPITRE II.

LES FORCES ÉLECTRODYNAMIQUES ENTRE CONDUCTEURS D'ÉTENDUE FINIE EN TOUT SENS.

§ 1. — *Travail élémentaire des actions électrodynamiques.*

Considérons un système de conducteurs d'étendue finie en tout sens, parcourus par des courants quelconques. Imaginons que ce système éprouve une modification infiniment petite quelconque.

Son énergie interne croît de δU ; sa force vive de $\delta \sum \frac{mv^2}{2}$; les forces extérieures qui le sollicitent effectuent un travail $d\mathfrak{T}_e$; il dégage une quantité de chaleur dQ et l'on a

$$(1) \qquad E\,dQ + d\sum \frac{mv^2}{2} = -E\,\delta U + d\mathfrak{T}_e.$$

D'autre part, la loi de Joule [Chapitre I, égalité (3)] donne

$$(2) \qquad E\,dQ = dt \int \left[\left(E_x - T\frac{\partial E_x}{\partial T} \right) u + \left(E_y - T\frac{\partial E_y}{\partial T} \right) v + \left(E_z - T\frac{\partial E_z}{\partial T} \right) w \right] d\varpi.$$

On peut dire que les forces intérieures au système effectuent un travail

$$(3) \qquad d\mathfrak{T}_i = \delta \sum \frac{mv^2}{2} - d\mathfrak{T}_e.$$

L'ensemble des égalités (1), (2) et (3) donne

$$(4) \qquad d\mathfrak{T}_i = -E\,\delta U + dt \int \left[\left(E_x - T\frac{\partial E_x}{\partial T} \right) u + \left(E_y - T\frac{\partial E_y}{\partial T} \right) v + \left(E_z - T\frac{\partial E_z}{\partial T} \right) w \right] d\varpi.$$

Dans notre Mémoire sur l'*Induction électrodynamique* (¹) [Chapitre I, égalités (1 *bis*)], nous avons donné des égalités qui, jointes à la définition des quantités E_x, E_y, E_z données par les égalités (2) du Chapitre précédent, nous permettent d'écrire

$$(5)\quad \begin{cases} E_x = -\varepsilon \dfrac{\partial V}{\partial x} - \dfrac{\partial \Theta}{\partial x} + \varphi_x + \mathcal{E}_x, \\ E_y = -\varepsilon \dfrac{\partial V}{\partial y} - \dfrac{\partial \Theta}{\partial y} + \varphi_y + \mathcal{E}_y, \\ E_z = -\varepsilon \dfrac{\partial V}{\partial z} - \dfrac{\partial \Theta}{\partial z} + \varphi_z + \mathcal{E}_z. \end{cases}$$

Les égalités (4) et (5), jointes aux égalités (1) et (12) du Chapitre précédent, permettent d'écrire

$$(6)\quad \begin{aligned} d\mathfrak{T}_i = {} & dt \int \left[\left(\varphi_x - T \frac{\partial \varphi_x}{\partial T} \right) u + \left(\varphi_y - T \frac{\partial \varphi_y}{\partial T} \right) v + \left(\varphi_z - T \frac{\partial \varphi_z}{\partial T} \right) w \right] d\varpi \\ & - E\,\delta \Upsilon \\ & - \varepsilon\, dt \int \left(\frac{\partial V}{\partial x} u + \frac{\partial V}{\partial y} v + \frac{\partial V}{\partial x} w \right) d\varpi - \delta W \\ & - dt \int \left[\left(\frac{\partial \Theta}{\partial x} - T \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x\, \partial T} \right) u + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} - T \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y\, \partial T} \right) v \right. \\ & \qquad \left. + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} - T \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z\, \partial T} \right) w \right] d\varpi \\ & - \delta \sum \left(\Theta - T \frac{\partial \Theta}{\partial T} \right) q \\ & + dt \int (\mathcal{E}_x u + \mathcal{E}_y v + \mathcal{E}_z w)\, d\varpi + \delta \Pi. \end{aligned}$$

Or les diverses théories exposées au Tome I de nos *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme* nous laissent facilement reconnaître :

1° Que la quantité

$$-\varepsilon\, dt \int \left(\frac{\partial V}{\partial x} u + \frac{\partial V}{\partial y} v + \frac{\partial V}{\partial z} w \right) d\varpi - \delta W$$

représente le travail élémentaire des actions électrostatiques qui s'exercent entre les diverses parties du système conformément aux lois de Coulomb;

2° Que, si l'on néglige les variations qu'éprouve la quantité Θ par suite

(¹) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. VII, B.; 1893.

du changement d'état des diverses parties du système (approximation que nous sommes convenu de faire) la quantité

$$dt \int \left[\left(\frac{\partial \Theta}{\partial x} - T \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \, \partial T} \right) u + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y} - T \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \, \partial T} \right) v + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} - T \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z \, \partial T} \right) w \right] d\varpi$$
$$+ \sum \left(\Theta - T \frac{\partial \Theta}{\partial T} \right) q$$

représente le travail élémentaire des actions moléculaires imaginées par M. H. von Helmholtz;

3° Que la quantité

$$dt \int \left[\left(\varphi_x - T \frac{\partial \varphi_x}{\partial T} \right) u + \left(\varphi_y - T \frac{\partial \varphi_y}{\partial T} \right) v + \left(\varphi_z - T \frac{\partial \varphi_z}{\partial T} \right) w \right] d\varpi$$
$$E \, \partial T$$

représente le travail élémentaire des forces qui s'exerceraient entre les diverses parties du système si on les ramenait à l'état neutre.

On voit donc que la présence de courants électriques dans le système a pour effet d'ajouter aux forces intérieures déjà connues de nouvelles forces, dont le travail élémentaire a pour valeur

$$(7) \qquad d\tau = - dt \int (\mathcal{E}_x u + \mathcal{E}_y v + \mathcal{E}_z w) \, d\varpi + \delta \Pi.$$

Ce sont les *forces électrodynamiques*.

§ 2. — *Calcul plus complet de ce travail.*

La quantité $\delta \Pi$ nous est donnée par l'égalité (23) du Chapitre précédent. Il s'agit donc de calculer plus complètement la quantité

$$dt \int (\mathcal{E}_x u + \mathcal{E}_y v + \mathcal{E}_z w) \, dt.$$

Nous aurons

$$(8) \qquad \begin{cases} \mathcal{E}_x \, dt = \delta L_1 + \delta L_2 + \ldots, \\ \mathcal{E}_y \, dt = \delta M_1 + \delta M_2 + \ldots, \\ \mathcal{E}_z \, dt = \delta N_1 + \delta N_2 + \ldots, \end{cases}$$

les quantités δL, δM, δN ayant les valeurs données dans notre Mémoire

sur l'*Induction électrodynamique*, Chapitre II, égalités (13). Seulement, dans ces dernières égalités, les notations ne sont pas les mêmes que dans le présent Chapitre. Pour faire concorder ces notations, il faudra remplacer

$$\begin{array}{lllclll} \Phi_1, & \Psi_1, & X_1 & \text{par} & U_1, & V_1, & W_1, \\ \xi, & \eta, & \zeta & \text{par} & x, & y, & z, \\ f, & g, & h & \text{par} & \delta x, & \delta y, & \delta z. \end{array}$$

On aura alors, par exemple,

$$\delta L_1 = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[\delta(U_1\ d\varpi_1) + \left(U_1\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + V_1\frac{\partial\,\delta y}{\partial x} + W_1\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}\right)d\varpi_1\right],$$
$$\delta M_1 = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[\delta(V_1\ d\varpi_1) + \left(U_1\frac{\partial\,\delta x}{\partial y} + V_1\frac{\partial\,\delta y}{\partial y} + W_1\frac{\partial\,\delta z}{\partial y}\right)d\varpi_1\right],$$
$$\delta N_1 = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[\delta(W_1\, d\varpi_1) + \left(U_1\frac{\partial\,\delta x}{\partial z} + V_1\frac{\partial\,\delta y}{\partial z} + W_1\frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right)d\varpi_1\right].$$

Si l'on observe que l'on a

$$\mathfrak{V} = \int U_1\ d\varpi_1,$$
$$\mathfrak{V}' = \int V_1\ d\varpi_1,$$
$$\mathfrak{W} = \int W_1\, d\varpi_1,$$

on peut écrire les égalités (8)

$$\mathcal{E}_x\, dt = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(\delta\mathfrak{V} + \mathfrak{V}\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \mathfrak{V}'\frac{\partial\,\delta y}{\partial x} + \mathfrak{W}\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}\right),$$
$$\mathcal{E}_y\, dt = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(\delta\mathfrak{V}' + \mathfrak{V}\frac{\partial\,\delta x}{\partial y} + \mathfrak{V}'\frac{\partial\,\delta y}{\partial y} + \mathfrak{W}\frac{\partial\,\delta z}{\partial y}\right),$$
$$\mathcal{E}_z\, dt = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(\delta\mathfrak{W} + \mathfrak{V}\frac{\partial\,\delta x}{\partial z} + \mathfrak{V}'\frac{\partial\,\delta y}{\partial z} + \mathfrak{W}\frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right).$$

On a donc

$$(9)\qquad \begin{aligned} dt \int (\mathcal{E}_x u + \mathcal{E}_y v + \mathcal{E}_z w)\, d\varpi & \\ = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int (u\,\delta\mathfrak{V} + v\,\delta\mathfrak{V}' + w\,\delta\mathfrak{W})\, d\varpi & \\ -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int\Big[\ \left(\mathfrak{V}\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \mathfrak{V}'\frac{\partial\,\delta y}{\partial x} + \mathfrak{W}\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}\right)u & \\ + \left(\mathfrak{V}\frac{\partial\,\delta x}{\partial y} + \mathfrak{V}'\frac{\partial\,\delta y}{\partial y} + \mathfrak{W}\frac{\partial\,\delta z}{\partial y}\right)v & \\ + \left(\mathfrak{V}\frac{\partial\,\delta x}{\partial z} + \mathfrak{V}'\frac{\partial\,\delta y}{\partial z} + \mathfrak{W}\frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right)w\Big]\, d\varpi. & \end{aligned}$$

L'égalité

$$2\Pi = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int(\mathfrak{U}u+\mathfrak{V}v+\mathfrak{W}w)\,d\varpi$$

donne

$$\begin{aligned}2\,\delta\Pi = &-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int(u\,\delta\mathfrak{U}+v\,\delta\mathfrak{V}+w\,\delta\mathfrak{W})\,d\varpi\\ &-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int(\mathfrak{U}\,\delta u+\mathfrak{V}\,\delta v+\mathfrak{W}\,\delta w)\,d\varpi\\ &-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int(\mathfrak{U}u+\mathfrak{V}v+\mathfrak{W}w)\,\delta(d\varpi).\end{aligned}$$

Si l'on remplace δu, δv, δw par leurs valeurs déduites des égalités (18) et (22) du Chapitre précédent, on trouve

$$\begin{aligned}(10)\quad -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int(u\,\delta\mathfrak{U}+v\,\delta\mathfrak{V}+w\,\delta\mathfrak{W})\,d\varpi\\ = 2\,\delta\Pi+\frac{\mathfrak{A}^2}{2}dt\int\left(\mathfrak{U}\frac{\partial u}{\partial t}+\mathfrak{V}\frac{\partial v}{\partial t}+\mathfrak{W}\frac{\partial w}{\partial t}\right)d\varpi\\ +\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int[u(\mathfrak{V}\omega''-\mathfrak{W}\omega')+v(\mathfrak{W}\omega-\mathfrak{U}\omega'')+w(\mathfrak{U}\omega'-\mathfrak{V}\omega)]\,d\varpi\\ +\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int(\mathfrak{U}u+\mathfrak{V}v+\mathfrak{W}w)\,\delta(d\varpi).\end{aligned}$$

Les égalités (7), (9) et (10) donnent

$$\begin{aligned}(11)\quad d\tau = -\delta\Pi &-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}dt\int\left(\mathfrak{U}\frac{\partial u}{\partial t}+\mathfrak{V}\frac{\partial v}{\partial t}+\mathfrak{W}\frac{\partial w}{\partial t}\right)d\varpi\\ &-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int(\mathfrak{U}u+\mathfrak{V}v+\mathfrak{W}w)\,\delta(d\varpi)\\ &-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int[(\mathfrak{V}\omega''-\mathfrak{W}\omega')u+(\mathfrak{W}\omega-\mathfrak{U}\omega'')v+(\mathfrak{U}\omega'-\mathfrak{V}\omega)w]\,d\varpi\\ &+\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int\Big[\left(\mathfrak{U}\frac{\partial\,\delta x}{\partial x}+\mathfrak{V}\frac{\partial\,\delta y}{\partial x}+\mathfrak{W}\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}\right)u\\ &\qquad+\left(\mathfrak{U}\frac{\partial\,\delta x}{\partial y}+\mathfrak{V}\frac{\partial\,\delta y}{\partial y}+\mathfrak{W}\frac{\partial\,\delta z}{\partial y}\right)v\\ &\qquad+\left(\mathfrak{U}\frac{\partial\,\delta x}{\partial z}+\mathfrak{V}\frac{\partial\,\delta y}{\partial z}+\mathfrak{W}\frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right)w\Big]\,d\varpi.\end{aligned}$$

Remplaçons maintenant $\delta\Pi$ par son expression, déduite de l'égalité (23)

du Chapitre précédent, et nous trouverons

$$
(11\,bis)\qquad
\begin{aligned}
d\tau = \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int\Big[& \;u\left(\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial x}\,\delta x+\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial y}\,\delta y+\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial z}\,\delta z\right)\\
&+v\left(\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\,\delta x+\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\,\delta y+\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\,\delta z\right)\\
&+w\left(\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial x}\,\delta x+\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial y}\,\delta y+\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial z}\,\delta z\right)\Big]\,d\varpi\\
+\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int\Big[& \;u\left(\mathcal{U}\,\frac{\partial\,\delta x}{\partial x}+\mathcal{V}\,\frac{\partial\,\delta y}{\partial x}+\mathcal{W}\,\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}\right)\\
&+v\left(\mathcal{U}\,\frac{\partial\,\delta x}{\partial y}+\mathcal{V}\,\frac{\partial\,\delta y}{\partial y}+\mathcal{W}\,\frac{\partial\,\delta z}{\partial y}\right)\\
&+w\left(\mathcal{U}\,\frac{\partial\,\delta x}{\partial z}+\mathcal{V}\,\frac{\partial\,\delta y}{\partial z}+\mathcal{W}\,\frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right)\Big]\,d\varpi.
\end{aligned}
$$

§ 3. — *Transformation de l'expression précédente; calcul des forces électrodynamiques.*

Conservant le premier terme de l'expression de $d\tau$, nous allons transformer le dernier au moyen d'intégrations par parties.

Soit S une surface de discontinuité qui sépare deux milieux conducteurs 1 et 2. Les composantes du mouvement ne sont pas forcément les mêmes de part et d'autre de cette surface; d'un côté, elles seront δx_1, δy_1, δz_1; de l'autre, δx_2, δy_2, δz_2.

On voit sans peine que l'on peut écrire

$$
(12)\qquad
\begin{aligned}
\int\Big[& \;u\left(\mathcal{U}\,\frac{\partial\,\delta x}{\partial x}+\mathcal{V}\,\frac{\partial\,\delta y}{\partial x}+\mathcal{W}\,\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}\right)\\
&+v\left(\mathcal{U}\,\frac{\partial\,\delta x}{\partial y}+\mathcal{V}\,\frac{\partial\,\delta y}{\partial y}+\mathcal{W}\,\frac{\partial\,\delta z}{\partial y}\right)\\
&+w\left(\mathcal{U}\,\frac{\partial\,\delta x}{\partial z}+\mathcal{V}\,\frac{\partial\,\delta y}{\partial z}+\mathcal{W}\,\frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right)\Big]\,d\varpi\\
=-\mathbf{S}\Big\{ & \;[u_1\cos(N_1,x)+v_1\cos(N_1,y)+w_1\cos(N_1,z)]\,(\mathcal{U}\,\delta x_1+\mathcal{V}\,\delta y_1+\mathcal{W}\,\delta z_1)\\
&+[u_2\cos(N_2,x)+v_2\cos(N_2,y)+w_2\cos(N_2,z)]\,(\mathcal{U}\,\delta x_2+\mathcal{V}\,\delta y_2+\mathcal{W}\,\delta z_2)\Big\}\,dS\\
-\int\Big[& \;u\left(\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial x}\,\delta x+\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\,\delta y+\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial x}\,\delta z\right)\\
&+v\left(\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial y}\,\delta x+\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial y}\,\delta y+\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial y}\,\delta z\right)\\
&+w\left(\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial z}\,\delta x+\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial z}\,\delta y+\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial z}\,\delta z\right)\Big]\,d\varpi\\
-\int & \left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)(\mathcal{U}\,\delta x+\mathcal{V}\,\delta y+\mathcal{W}\,\delta z)\,d\varpi.
\end{aligned}
$$

Les égalités (11 *bis*) et (12) donnent

$$(13)\quad \begin{aligned} d\tau = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2} \mathrm{S} \Big\{ & [u_1 \cos(N_1,x) + v_1 \cos(N_1,y) + w_1 \cos(N_1,z)](\mathfrak{U}\,\delta x_1 + \mathfrak{V}\,\delta y_1 + \mathfrak{W}\,\delta z_1) \\ & + [u_2 \cos(N_2,x) + v_2 \cos(N_2,y) + w_2 \cos(N_2,z)](\mathfrak{U}\,\delta x_2 + \mathfrak{V}\,\delta y_2 + \mathfrak{W}\,\delta z_2)\Big\}\, dS \\ + \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int \Big\{ & \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y}\right) v - \left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x}\right) w - \mathfrak{U}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] \delta x \\ & + \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z}\right) w - \left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y}\right) u - \mathfrak{V}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] \delta y \\ & + \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x}\right) u - \left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z}\right) v - \mathfrak{W}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] \delta z \Big\}\, d\varpi. \end{aligned}$$

Posons

$$(14)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{P} &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y}\right), \\ \mathfrak{Q} &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z}\right), \\ \mathfrak{R} &= -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x}\right), \end{aligned} \right.$$

et l'égalité (13) nous permettra d'énoncer les résultats suivants :

Un conducteur continu quelconque, traversé par des courants quelconques, subit deux sortes de forces électrodynamiques :

1° *Des forces appliquées à chacun des éléments des surfaces de discontinuité qui le terminent. L'élément* dS *subit une force dont les composantes sont* $\mathfrak{X}\,dS$, $\mathfrak{Y}\,dS$, $\mathfrak{Z}\,dS$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ *ayant les valeurs suivantes :*

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{X} &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\mathfrak{U}[u\cos(N_i,x) + v\cos(N_i,y) + w\cos(N_i,z)], \\ \mathfrak{Y} &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\mathfrak{V}[u\cos(N_i,x) + v\cos(N_i,y) + w\cos(N_i,z)], \\ \mathfrak{Z} &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\mathfrak{W}[u\cos(N_i,x) + v\cos(N_i,y) + w\cos(N_i,z)], \end{aligned} \right.$$

N_i *étant la normale à l'élément* dS *vers l'intérieur du conducteur.*

2° *Des forces appliquées à chacun des éléments de volume du conducteur. L'élément* $d\varpi$ *subit une force dont les composantes sont* $X\,d\varpi$,

$\mathrm{Y}\,d\varpi$, $\mathrm{Z}\,d\varpi$. X, Y, Z *ayant les valeurs suivantes :*

$$(16)\quad \begin{cases} \mathrm{X} = \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left[\mathfrak{R}v - \mathfrak{Q}w - \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{U}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right)\right], \\ \mathrm{Y} = \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left[\mathfrak{P}w - \mathfrak{R}u - \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{V}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right)\right], \\ \mathrm{Z} = \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left[\mathfrak{Q}u - \mathfrak{P}v - \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathfrak{W}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right)\right]. \end{cases}$$

Ces formules sont dues à M. H. von Helmholtz (¹).

§ 4. — *Remarque relative aux forces appliquées à la surface d'un conducteur.*

Imaginons qu'une surface de discontinuité S sépare deux conducteurs 1 et 2; supposons, en outre, que les deux conducteurs *adhèrent* l'un à l'autre le long de la surface S, en sorte que les composantes δx_1, δy_1, δz_1 d'un point M_1 du conducteur 1 infiniment voisin de la surface S diffèrent infiniment peu des composantes δx_2, δy_2, δz_2, d'un point M_2, appartenant au conducteur 2, mais infiniment voisin du point M_1. Dans ces conditions, la force appliquée à un point de la surface S, considéré comme faisant partie du conducteur 1, et la force appliquée au même point de la surface S, considéré comme faisant partie du conducteur 2, se composent en une force unique dont les composantes sont

$$\begin{aligned} \xi = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\mathfrak{U}[\; & u_1\cos(N_1,x) + v_1\cos(N_1,y) + w_1\cos(N_1,z) \\ & + u_2\cos(N_2,x) + v_2\cos(N_2,y) + w_2\cos(N_2,z)], \\ \eta = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\mathfrak{V}[\; & u_1\cos(N_1,x) + v_1\cos(N_1,y) + w_1\cos(N_1,z) \\ & + u_2\cos(N_2,x) + v_2\cos(N_2,y) + w_2\cos(N_2,z)], \\ \zeta = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\mathfrak{W}[\; & u_1\cos(N_1,x) + v_1\cos(N_1,y) + w_1\cos(N_1,z) \\ & + u_2\cos(N_2,x) + v_2\cos(N_2,y) + w_2\cos(N_2,z)]. \end{aligned}$$

(¹) H. VON HELMHOLTZ, *Ueber die Theorie der Elektrodynamik*. IIIᵗᵉ Abhandlung. *Die elektrodynamischen Kräfte in bewegten Leitern* (*Borchardt's Journal*, t. LXXVIII, p. 300; 1874. — HELMHOLTZ, *Wissenschaftliche Abhandlungen*, t. I, p. 734).

Soit E la densité électrique en un point de l'élément dS; nous aurons

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\left[u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z) \right. \\ \left. + u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z) \right],$$

et les composantes précédentes pourront s'écrire

$$(17) \qquad \begin{cases} \xi = \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \mathfrak{U} \frac{\partial E}{\partial t}, \\ \eta = \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \mathfrak{V} \frac{\partial E}{\partial t}, \\ \zeta = \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \mathfrak{W} \frac{\partial E}{\partial t}. \end{cases}$$

Si, en particulier, les courants qui traversent la surface S sont des courants uniformes, et ce cas est le seul qui puisse être soumis à des observations précises, la force dont ξ, η, ζ sont les composantes s'évanouira.

Si la surface S est la surface de contact d'un conducteur avec un isolant, les composantes $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ de la force appliquée en un point de la surface S pourront s'écrire

$$(18) \qquad \begin{cases} \mathfrak{X} = \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \mathfrak{U} \frac{\partial E}{\partial t}, \\ \mathfrak{Y} = \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \mathfrak{V} \frac{\partial E}{\partial t}, \\ \mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \mathfrak{W} \frac{\partial E}{\partial t}. \end{cases}$$

On voit que cette force s'évanouira, elle aussi, dans le cas où le conducteur est traversé par des courants uniformes.

On serait tenté de croire que les forces représentées par les formules (15) peuvent devenir observables dans le cas où deux conducteurs 1 et 2 confinent l'un à l'autre par une surface S sans adhérer le long de cette surface.

Dans ce cas, en effet, en un point du conducteur 1 situé sur la surface S agit une force dont la composante suivant Ox a pour valeur

$$\mathfrak{X}_1 = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2} \mathfrak{U} [u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z)].$$

En un point du conducteur 2, situé également sur la surface S, agit une force dont la composante suivant Ox a pour valeur

$$\mathfrak{X}_2 = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2} \mathfrak{U} [u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z)].$$

Supposons uniformes les courants qui traversent la surface S, et soit J $dS\,dt$ la quantité d'électricité qui traverse l'élément dS, dans le temps dt, du conducteur 1 vers le conducteur 2; nous aurons

$$\begin{aligned} J &= -[u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z)], \\ &= \quad u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z), \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$(19) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{X}_1 &= \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \mathfrak{U} J, & \mathfrak{X}_2 &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2} \mathfrak{U} J, \\ \mathfrak{Y}_1 &= \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \mathfrak{V} J, & \mathfrak{Y}_2 &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2} \mathfrak{V} J, \\ \mathfrak{Z}_1 &= \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \mathfrak{W} J, & \mathfrak{Z}_2 &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2} \mathfrak{W} J. \end{aligned} \right.$$

D'après ces égalités (19), les deux forces $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Z}_1)$ et $(\mathfrak{X}_2, \mathfrak{Y}_2, \mathfrak{Z}_2)$ qui correspondent à un même point de la surface S sont égales et de sens contraires; les actions électrodynamiques tendent donc à entraîner en sens contraire les parties superficielles contiguës de deux conducteurs que parcourent des courants uniformes.

On pourrait donc espérer d'observer les effets des forces représentées par les égalités (19), si l'on pouvait faire glisser deux conducteurs l'un sur l'autre, sans qu'ils adhèrent le long de leur surface de contact.

Mais une pareille surface de glissement paraît irréalisable. Si, par exemple, on essaye de la réaliser en faisant mouvoir un conducteur solide dans un conducteur fluide, l'effet du frottement sera tel qu'une mince couche fluide adhérera au solide et sera entraînée dans son mouvement; si l'on passe de l'intérieur du solide à l'intérieur du fluide, on observera une variation rapide des vitesses au travers d'une couche de faible épaisseur, mais non une variation discontinue des vitesses à la traversée d'une surface d'épaisseur nulle. Dès lors, les forces $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Z}_1)$ et $(\mathfrak{X}_2, \mathfrak{Y}_2, \mathfrak{Z}_2)$, représentées par les égalités (19), se détruiront.

Il en sera encore de même si l'on essaye de faire glisser deux conducteurs solides l'un sur l'autre. En réalité, ces deux conducteurs seront en contact non pas directement, mais par l'intermédiaire de l'air interposé, et nous pourrons répéter ce que nous venons de dire.

Les forces représentées par les égalités (15) paraissent donc échapper aux prises de l'expérience.

CHAPITRE III.

THÉORÈMES DIVERS SUR LES FORCES ÉLECTRODYNAMIQUES.

§ 1. — *Simplification des fonctions* $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$.

Les forces appliquées aux divers éléments de volume d'un conducteur dépendent des fonctions $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, définies par les égalités [Chapitre II, égalités (14)],

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathfrak{P} = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y}\right), \\[2ex] \mathfrak{Q} = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z}\right), \\[2ex] \mathfrak{R} = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x}\right). \end{cases}$$

Posons

$$(2)\qquad \Psi = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial V}{\partial t}\,\frac{1}{r}\,d\varpi_1,$$

$\dfrac{\partial V}{\partial t}\,dt$ désignant la variation que la fonction potentielle électrostatique du système éprouverait pendant le temps dt, par suite du changement de distribution qu'engendrent les flux (u, v, w), si les divers conducteurs du système demeuraient immobiles; en sorte que

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} = -\,\mathrm{S}\,[\,& u_1\cos(N_1, x) + v_1\cos(N_1, y) + w_1\cos(N_1, z) \\ &+ u_2\cos(N_2, x) + v_2\cos(N_2, y) + w_2\cos(N_2, z)]\,\frac{1}{r}\,dS \\ &- \int\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right)\frac{1}{r}\,d\varpi_1. \end{aligned}$$

Nous aurons [Chapitre préliminaire, égalités (19)]

$$(3)\qquad \begin{cases} \mathfrak{U} = \displaystyle\int \frac{u_1}{r}\,d\varpi_1 + \frac{1-\lambda}{2}\,\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \\[2ex] \mathfrak{V} = \displaystyle\int \frac{v_1}{r}\,d\varpi_1 + \frac{1-\lambda}{2}\,\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \\[2ex] \mathfrak{W} = \displaystyle\int \frac{w_1}{r}\,d\varpi_1 + \frac{1-\lambda}{2}\,\frac{\partial \Psi}{\partial z}. \end{cases}$$

Moyennant ces égalités (3), les égalités (1) prennent la forme très simple

$$(4)\quad \begin{cases} \mathfrak{P} = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\displaystyle\int \dfrac{v_1}{r}\,d\varpi_1 - \dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int \dfrac{w_1}{r}\,d\varpi_1\right), \\ \mathfrak{Q} = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int \dfrac{w_1}{r}\,d\varpi_1 - \dfrac{\partial}{\partial z}\displaystyle\int \dfrac{u_1}{r}\,d\varpi_1\right), \\ \mathfrak{R} = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int \dfrac{u_1}{r}\,d\varpi_1 - \dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int \dfrac{v_1}{r}\,d\varpi_1\right), \end{cases}$$

ou encore, d'après les propriétés connues des fonctions potentielles ordinaires,

$$(5)\quad \begin{cases} \mathfrak{P} = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\displaystyle\int\left(v_1\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} - w_1\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right)d\varpi_1, \\ \mathfrak{Q} = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\displaystyle\int\left(w_1\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} - u_1\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)d\varpi_1, \\ \mathfrak{R} = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\displaystyle\int\left(u_1\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} - v_1\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right)d\varpi_1. \end{cases}$$

Ces expressions de $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ mettent en évidence un résultat fondamental; c'est que *les trois fonctions* $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ *ne dépendent pas de la constante* λ *d'Helmholtz.*

Si l'on observe qu'en tout point d'un conducteur parcouru par des courants uniformes on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

on voit que les égalités (16) du Chapitre précédent, jointes au résultat précédent, conduisent à la conclusion suivante :

La valeur de la constante λ *d'Helmholtz est sans influence sur les forces électrodynamiques qui sollicitent les éléments de volume d'un conducteur traversé par des courants uniformes, quel que soit d'ailleurs le courant agissant.*

Nous avons vu, au § 4 du Chapitre précédent, qu'aucune disposition expérimentale réalisable ne permettait de constater les forces électrodynamiques appliquées aux divers points des surfaces de discontinuité d'un

conducteur traversé par des courants uniformes. Nous pouvons donc dire que *la constante d'Helmholtz est sans influence sur les actions électrodynamiques subies par un conducteur que traversent des courants uniformes de la part d'un conducteur que traversent des courants quelconques.*

Pour un conducteur traversé par des courants uniformes, les fonctions $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ ont, en chaque point de l'espace et à chaque instant, des valeurs indépendantes de la valeur attribuée à la constante λ (Chapitre préliminaire, § 5). Dès lors, les égalités (15) et (16) du Chapitre précédent nous montrent que *la valeur attribuée à la constante λ d'Helmholtz est sans influence sur les actions électrodynamiques qu'un conducteur traversé par des courants uniformes exerce sur un conducteur traversé par des courants quelconques.*

Si nous rapprochons ces conclusions de celle-ci, que nous avons déjà obtenue (Chapitre préliminaire, § 5) : *La constante λ est sans influence sur les phénomènes d'induction engendrés dans un conducteur quelconque par un conducteur que traversent des courants uniformes,* nous pourrons donner cet énoncé entièrement général :

Les propriétés électrodynamiques des conducteurs traversés par des courants uniformes sont indépendantes de la valeur attribuée à la constante λ d'Helmholtz.

Si l'on cherchait les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un conducteur exerce sur un autre conducteur, traversé par des courants quelconques, des actions indépendantes de la valeur attribuée à la constante λ, on serait immédiatement ramené à chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour que les trois quantités $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ soient indépendantes de cette valeur; or ces conditions nous sont connues; elles s'expriment par les égalités [Chapitre préliminaire, égalité (33)]

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0$$

ou encore par les égalités [Chapitre préliminaire, égalité (33 *bis*)]

$$\frac{\partial J}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial J}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial J}{\partial z} = 0.$$

Les courants qui produisent des forces électrodynamiques indépendantes

de la valeur de la constante λ sont donc aussi ceux qui engendrent des forces électromotrices d'induction indépendantes de la valeur attribuée à cette constante.

§ 2. — *Retour au cas des courants linéaires; loi de Grassmann.*

La première des égalités (16) du Chapitre précédent devient, en vertu des égalités (5),

$$(6)\quad \begin{aligned} \mathrm{X} = &-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int\left[v\left(u_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} - v_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right) - w\left(w_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} - u_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)\right]d\varpi_1 \\ &-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ &\times\int\left[\frac{1+\lambda}{2}\frac{u_1}{r} + \frac{1-\lambda}{2}\frac{x-x'_1}{r^2}\left(\frac{x-x_1}{r}u_1 + \frac{y-y_1}{r}v_1 + \frac{z-z_1}{r}w_1\right)\right]d\varpi_1. \end{aligned}$$

Nous pouvons évidemment écrire

$$(7)\quad \begin{aligned} &\int\left[v\left(u_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} - v_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right) - w\left(w_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} - u_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)\right]d\varpi_1 \\ &= \int\left[u_1\left(u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + w\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right) - (uu_1 + vv_1 + ww_1)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right]d\varpi_1. \end{aligned}$$

Soient f et f_1 les flux qui ont respectivement pour composantes u, v, w et u_1, v_1, w_1; soient s et s'_1 les directions de ces flux; nous aurons

$$uu_1 + vv_1 + wv_1 = ff_1\cos(s, s_1),$$

$$u_1 = f_1\frac{dx_1}{ds_1},$$

$$u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + w\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} = f\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s},$$

$$u_1\frac{x-x_1}{r^3} + v_1\frac{y-y_1}{r^3} + w_1\frac{z-z_1}{r^3} = f_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s_1}.$$

Les égalités (6) et (7) fournissent donc l'égalité

$$X = \frac{\mathfrak{A}^2}{2} f \int \left[\cos(s, s_1) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{dx_1}{ds_1} \right] f_1 \, d\varpi_1$$

$$+ \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \int \left[\frac{1+\lambda}{2} \frac{\frac{dx_1}{ds_1}}{r} + \frac{1-\lambda}{2} (x - x_1) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s_1} \right] f_1 \, d\varpi_1.$$

Supposons maintenant que les courants agissants soient des courants linéaires, d'intensités J et J_1, de sections ω et ω_1. Nous aurons

$$d\varpi = \omega \, ds, \qquad d\varpi_1 = \omega_1 \, ds_1,$$

$$J = f\omega, \qquad J_1 = f_1 \omega_1,$$

$$\frac{dJ}{ds} ds = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\varpi.$$

L'égalité précédente deviendra alors la première des égalités

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} X \, d\varpi &= \frac{\mathfrak{A}^2}{2} J \, ds \int \left[\cos(s, s_1) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{dx_1}{ds_1} \right] J_1 \, ds_1 \\ &\quad + \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \frac{dJ}{ds} ds \int \left[\frac{1+\lambda}{2} \frac{\frac{dx_1}{ds_1}}{r} + \frac{1-\lambda}{2} (x - x_1) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s_1} \right] J_1 \, ds_1, \\ Y \, d\varpi &= \frac{\mathfrak{A}^2}{2} J \, ds \int \left[\cos(s, s_1) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s_1} \frac{dy_1}{ds_1} \right] J_1 \, ds_1 \\ &\quad + \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \frac{dJ}{ds} ds \int \left[\frac{1+\lambda}{2} \frac{\frac{dy_1}{ds_1}}{r} + \frac{1-\lambda}{2} (y - y_1) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s_1} \right] J_1 \, ds_1, \\ Z \, d\varpi &= \frac{\mathfrak{A}^2}{2} J \, ds \int \left[\cos(s, s_1) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s_1} \frac{dz_1}{ds_1} \right] J_1 \, ds_1 \\ &\quad + \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \frac{dJ}{ds} ds \int \left[\frac{1+\lambda}{2} \frac{\frac{dz_1}{ds_1}}{r} + \frac{1+\lambda}{2} (z - z_1) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s_1} \right] J_1 \, ds_1. \end{aligned} \right.$$

Ces égalités (8) redonnent l'expression déjà trouvée [*Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, t. III, p. 266, égalités (1)] des forces qu'un courant linéaire exerce sur un élément de courant linéaire (1).

(1) C'est ici le lieu de rectifier une erreur qui s'est glissée dans cette partie du Tome III

Les forces appliquées aux divers éléments de volume d'un conducteur et définies par les égalités (16) du Chapitre précédent ne sont pas les seules qui soient appliquées à un conducteur. La surface de ce conducteur est, en outre, sollicitée par des forces que définissent les égalités (15) du Chapitre précédent.

Dans le cas où les circuits agissants sont linéaires, ces forces se réduisent à des forces appliquées soit aux extrémités libres des conducteurs ouverts, soit aux points par lesquels deux conducteurs linéaires glissent l'un sur l'autre. Si l'on désigne par M un de ces points d'application, par J

---

de nos *Leçons*. A la page 257, nous avons écrit l'égalité erronée

$$\cos\theta\cos\theta' = \cos\omega - r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}$$

à la place de l'égalité

$$\cos\theta\cos\theta' = \cos\omega + r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\cdot$$

L'égalité (2) (p. 257) doit alors être remplacée par l'égalité

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{dM(r)}{dr}\right] = -\frac{1}{r}f(r)$$

et l'égalité (3) par l'égalité

$$N(r) = g(r) + \frac{1}{r}\frac{dM(r)}{dr}.$$

Il en résulte qu'à la page 265, on devra faire

$$M(r) = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{1-\lambda}{2}r,$$

au lieu de

$$M(r) = \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{1-\lambda}{2}r.$$

Le terme qui, dans X [(p. 265, égalités (10)], renferme en facteur $\frac{dJ}{ds}ds$ deviendra alors

$$X_2 = \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{dJ}{ds}ds\sum\int\left[\frac{1-\lambda}{2}(x-x')\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s'} + \frac{1+\lambda}{2}\frac{\frac{dx'}{ds'}}{r}\right]J'\,ds'.$$

Une correction analogue, consistant à remplacer le facteur $-\left(\frac{3-\lambda}{2}\right)$, partout où il figure, par le facteur $\frac{1+\lambda}{2}$, devra être faite aux pages 266, 271, 272, 273, 275, 276.

A cette dernière page, dans l'égalité (10), le terme indépendant de r devra s'écrire $-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{1+\lambda}{2}\frac{dJ}{ds}\frac{dJ'}{ds'}ds\,ds'$ et non pas $\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{3-\lambda}{2}\frac{dJ}{ds}\frac{dJ'}{ds'}ds\,ds'$. C'est pour la valeur $\lambda = -1$, et non pour la valeur $\lambda = 3$, de λ que ce terme disparaîtrait.

l'intensité du courant qu'y *amène* le conducteur, la force appliquée au point M aura pour composantes

$$X = \frac{\mathfrak{A}^2}{2} J \int \left[\frac{1-\lambda}{2}(x - x_1)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s_1} + \frac{1+\lambda}{2} \frac{\frac{dx_1}{ds_1}}{r} \right] J_1\, ds_1,$$

$$Y = \frac{\mathfrak{A}^2}{2} J \int \left[\frac{1-\lambda}{2}(y - y_1)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s_1} + \frac{1+\lambda}{2} \frac{\frac{dy_1}{ds_1}}{r} \right] J_1\, ds_1,$$

$$Z = \frac{\mathfrak{A}^2}{2} J \int \left[\frac{1-\lambda}{2}(z - z_1)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s_1} + \frac{1+\lambda}{2} \frac{\frac{dz_1}{ds_1}}{r} \right] J_1\, ds_1.$$

Les forces de ce genre, appliquées aux extrémités libres d'un conducteur ouvert, disparaîtront si, comme nous l'avons constamment admis au Tome III de nos *Leçons*, l'intensité du courant ouvert est nulle aux deux extrémités du conducteur.

Quant aux forces de ce genre appliquées aux contacts glissants, elles ne seront pas observables si, en un pareil contact, la continuité du mouvement est rétablie, comme nous l'avons expliqué au § 4 du Chapitre précédent, et si, en outre, comme nous l'avons sans cesse admis au Tome III de nos *Leçons*, l'intensité du courant ne subit pas de variation brusque en traversant ce contact. Ainsi la théorie générale des courants, exposée dans le présent travail, conduit aux mêmes conclusions, dans le cas des courants linéaires, que la théorie exposée au Tome III de nos *Leçons*.

Les rapprochements que nous venons de faire nous permettent de dire que les formules

$$(9) \quad \begin{cases} X_1\, d\varpi = \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}(\mathfrak{R} v - \mathfrak{Q} w)\, d\varpi, \\ Y_1\, d\varpi = \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}(\mathfrak{P} w - \mathfrak{R} u)\, d\varpi, \\ Z_1\, d\varpi = \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}(\mathfrak{Q} u - \mathfrak{P} v)\, d\varpi, \end{cases}$$

représentant une force appliquée à l'élément $d\varpi$, sont, pour des courants quelconques, l'expression de la *loi de Grassmann*. Les égalités (16) du Chapitre précédent nous permettent alors d'énoncer la proposition suivante :

Les actions électrodynamiques qu'un courant quelconque exerce sur

chacun des éléments de volume d'un courant uniforme sont données par la loi de Grassmann.

Si l'on observe en outre, comme nous l'avons fait remarquer au § 4, que les forces électrodynamiques appliquées aux surfaces de discontinuité d'un conducteur parcouru par des courants uniformes peuvent toutes être pratiquement négligées, on voit que l'on peut énoncer le théorème suivant :

Un conducteur traversé par des courants quelconques agit sur un conducteur traversé par des courants uniformes comme si chaque élément $d\varpi_1$ *du premier exerçait sur chaque élément* $d\varpi$ *du second une force ayant pour composantes*

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}
\xi\, d\varpi\, d\varpi_1 &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[\left(u_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} - v_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right)v - \left(w_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} - u_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)w\right] d\varpi\, d\varpi_1,\\
\eta\, d\varpi\, d\varpi_1 &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[\left(v_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} - w_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right)w - \left(u_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} - v_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right)u\right] d\varpi\, d\varpi_1,\\
\zeta\, d\varpi\, d\varpi_1 &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[\left(w_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} - u_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)u - \left(v_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} - w_1\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right)v\right] d\varpi\, d\varpi_1.
\end{aligned}\right.$$

§ 3. — *Loi d'Ampère.*

Si l'on se reporte à l'une des égalités qui expriment la loi d'Ampère [*Leçons,* t. III, p. 288, égalité (6)], on voit sans peine que cette loi d'Ampère donne l'expression suivante pour la composante parallèle à Ox de l'action que l'élément $d\varpi_1$ exerce sur l'élément $d\varpi$

$$(11)\quad \begin{aligned}
\xi'\, d\varpi\, d\varpi_1 = &-\frac{\mathfrak{A}^2(x-x_1)}{r^3}\\
&\times\left[uu_1 + vv_1 + ww_1 - \frac{3}{2}\left(\frac{x-x_1}{r}u + \frac{y-y_1}{r}v + \frac{z-z_1}{r}w\right)\right.\\
&\qquad\left.\times\left(\frac{x-x_1}{r}u_1 + \frac{y-y_1}{r}v_1 + \frac{z-z_1}{r}w_1\right)\right] d\varpi\, d\varpi_1.
\end{aligned}$$

Si l'on compare cette égalité à la première des égalités (10), on trouve sans peine que l'on a

$$(12)\qquad (\xi' - \xi)\, d\varpi\, d\varpi_1 = \frac{\mathfrak{A}^2}{2}(\alpha u + \beta v + \gamma w)\, d\varpi\, d\varpi_1$$

avec

$$
(12\ bis)\quad \left\{
\begin{aligned}
\alpha &= u_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\left[(x_1 - x)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right] + v_1 \frac{\partial}{\partial y_1}\left[(x_1 - x)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right] + w_1 \frac{\partial}{\partial z_1}\left[(x_1 - x)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right],\\
\beta &= u_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\left[(x_1 - x)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\right] + v_1 \frac{\partial}{\partial y_1}\left[(x_1 - x)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\right] + w_1 \frac{\partial}{\partial z_1}\left[(x_1 - x)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\right],\\
\gamma &= u_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\left[(x_1 - x)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right] + v_1 \frac{\partial}{\partial y_1}\left[(x_1 - x)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right] + w_1 \frac{\partial}{\partial z_1}\left[(x_1 - x)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right].
\end{aligned}
\right.
$$

L'égalité (12) montre que si l'on veut que la loi d'Ampère et la loi de Grassmann donnent le même résultat lorsqu'on les applique au calcul de l'action exercée sur un élément de courant $d\varpi$ par le conducteur auquel appartient l'élément $d\varpi_1$, il sera nécessaire et suffisant que l'on ait

$$
(13)\qquad \int \alpha\, d\varpi_1 = 0, \qquad \int \beta\, d\varpi_1 = 0, \qquad \int \gamma\, d\varpi_1 = 0,
$$

et six autres égalités analogues obtenues en considérant les composantes parallèles à Oy et à Oz.

Or il est aisé de voir que l'on peut écrire

$$
\begin{aligned}
\int \alpha\, d\varpi_1 = -\mathop{\mathbf{S}} (x_1 - x)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\big[\ & u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z)\\
& + u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z)\big]\, dS_1\\
-\int (x_1 - x)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}&\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right) d\varpi_1
\end{aligned}
$$

ou bien

$$
\begin{aligned}
\int \alpha\, d\varpi_1 = -\mathop{\mathbf{S}} \frac{(x_1 - x)^2}{r^3}\big[\ & u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z)\\
& + u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z)\big]\, dS_1\\
-\int \frac{(x_1 - x)^2}{r^3}&\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right) d\varpi_1.
\end{aligned}
$$

La première des équations (13) devient donc la première des équa-

tions

$$(14)\quad \begin{cases} \mathbf{S}\dfrac{(x_1-x)^2}{r^3}\dfrac{\partial \mathrm{E}_1}{\partial t}d\mathrm{S}_1+\displaystyle\int\dfrac{(x_1-x)^2}{r^3}\dfrac{\partial e_1}{\partial t}d\varpi_1=0,\\ \mathbf{S}\dfrac{(y_1-y)^2}{r^3}\dfrac{\partial \mathrm{E}_1}{\partial t}d\mathrm{S}_1+\displaystyle\int\dfrac{(y_1-y)^2}{r^3}\dfrac{\partial e_1}{\partial t}d\varpi_1=0,\\ \mathbf{S}\dfrac{(z_1-z)^2}{r^3}\dfrac{\partial \mathrm{E}_1}{\partial t}d\mathrm{S}_1+\displaystyle\int\dfrac{(z_1-z)^2}{r^3}\dfrac{\partial e_1}{\partial t}d\varpi_1=0, \end{cases}$$

$$(15)\quad \begin{cases} \mathbf{S}\dfrac{(y_1-y)(z_1-z)}{r^3}\dfrac{\partial \mathrm{E}_1}{\partial t}d\mathrm{S}_1+\displaystyle\int\dfrac{(y_1-y)(z_1-z)}{r^3}\dfrac{\partial e_1}{\partial t}d\varpi_1=0,\\ \mathbf{S}\dfrac{(z_1-z)(x_1-x)}{r^3}\dfrac{\partial \mathrm{E}_1}{\partial t}d\mathrm{S}_1+\displaystyle\int\dfrac{(z_1-z)(x_1-x)}{r^3}\dfrac{\partial e_1}{\partial t}d\varpi_1=0,\\ \mathbf{S}\dfrac{(x_1-x)(y_1-y)}{r^3}\dfrac{\partial \mathrm{E}_1}{\partial t}d\mathrm{S}_1+\displaystyle\int\dfrac{(x_1-x)(y_1-y)}{r^3}\dfrac{\partial e_1}{\partial t}d\varpi_1=0. \end{cases}$$

Ajoutons membre à membre les égalités (14), en tenant compte de la relation

$$r^2=(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2.$$

Nous aurons

$$(16)\quad \mathbf{S}\frac{1}{1}\frac{\partial \mathrm{E}_1}{\partial t}d\mathrm{S}_1+\int\frac{1}{r}\frac{\partial e_1}{\partial t}d\varpi_1=0.$$

Moyennant cette égalité, nous pourrons donner aux égalités (14) la forme

$$(17)\quad \begin{cases} \mathbf{S}\left[\dfrac{(x_1-x)^2}{r^3}-\dfrac{1}{r}\right]\dfrac{\partial \mathrm{E}_1}{\partial t}d\mathrm{S}_1+\displaystyle\int\left[\dfrac{(x_1-x)^2}{r^3}-\dfrac{1}{r}\right]\dfrac{\partial e_1}{\partial t}d\mathrm{S}_1,\\ \mathbf{S}\left[\dfrac{(y_1-y)^2}{r^3}-\dfrac{1}{r}\right]\dfrac{\partial \mathrm{E}_1}{\partial t}d\mathrm{S}_1+\displaystyle\int\left[\dfrac{(y_1-y)^2}{r^3}-\dfrac{1}{r}\right]\dfrac{\partial e_1}{\partial t}d\mathrm{S}_1,\\ \mathbf{S}\left[\dfrac{(z_1-z)^2}{r^3}-\dfrac{1}{r}\right]\dfrac{\partial \mathrm{E}_1}{\partial t}d\mathrm{S}_1+\displaystyle\int\left[\dfrac{(z_1-z)^2}{r^3}-\dfrac{1}{r}\right]\dfrac{\partial e_1}{\partial t}d\mathrm{S}_1. \end{cases}$$

Si l'on définit la quantité J comme elle a été définie au Chapitre préliminaire, égalité (34), les égalités (15) et (17) deviendront

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathrm{J}}{\partial x^2}=0, & \dfrac{\partial^2 \mathrm{J}}{\partial y^2}=0, & \dfrac{\partial^2 \mathrm{J}}{\partial z^2}=0,\\ \dfrac{\partial^2 \mathrm{J}}{\partial y\,\partial z}=0, & \dfrac{\partial^2 \mathrm{J}}{\partial z\,\partial x}=0, & \dfrac{\partial^2 \mathrm{J}}{\partial x\,\partial y}=0. \end{cases}$$

Si ces égalités sont vérifiées en tout point extérieur au conducteur agissant, la loi de Grassmann et la loi d'Ampère, appliquées au calcul de l'action exercée par ce conducteur sur un élément de volume d'un

avec:

$$
(12\ bis)\quad
\left\{
\begin{aligned}
\alpha &= u_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\left[(x_1 - x)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right] + v_1 \frac{\partial}{\partial y_1}\left[(x_1 - x)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right] + w_1 \frac{\partial}{\partial z_1}\left[(x_1 - x)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right],\\
\beta &= u_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\left[(x_1 - x)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\right] + v_1 \frac{\partial}{\partial y_1}\left[(x_1 - x)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\right] + w_1 \frac{\partial}{\partial z_1}\left[(x_1 - x)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\right],\\
\gamma &= u_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\left[(x_1 - x)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right] + v_1 \frac{\partial}{\partial y_1}\left[(x_1 - x)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right] + w_1 \frac{\partial}{\partial z_1}\left[(x_1 - x)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right].
\end{aligned}
\right.
$$

L'égalité (12) montre que si l'on veut que la loi d'Ampère et la loi de Grassmann donnent le même résultat lorsqu'on les applique au calcul de l'action exercée sur un élément de courant $d\varpi$ par le conducteur auquel appartient l'élément $d\varpi_1$, il sera nécessaire et suffisant que l'on ait

$$
(13)\qquad \int \alpha\, d\varpi_1 = 0, \qquad \int \beta\, d\varpi_1 = 0, \qquad \int \gamma\, d\varpi_1 = 0,
$$

et six autres égalités analogues obtenues en considérant les composantes parallèles à Oy et à Oz.

Or il est aisé de voir que l'on peut écrire

$$
\begin{aligned}
\int \alpha\, d\varpi_1 = -\mathbf{S}(x_1 - x)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\,[\, & u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z)\\
& + u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z)]\, dS_1\\
& - \int (x_1 - x)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right) d\varpi_1
\end{aligned}
$$

ou bien

$$
\begin{aligned}
\int \alpha\, d\varpi_1 = -\mathbf{S}\frac{(x_1 - x)^2}{r^3}\,[\, & u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z)\\
& + u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z)]\, dS_1\\
& - \int \frac{(x_1 - x)^2}{r^3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right) d\varpi_1.
\end{aligned}
$$

La première des équations (13) devient donc la première des équa-



D'autre part, l'égalité qui définit $\mathfrak{V}$ [Chapitre préliminaire, égalités (1)] donne sans peine

$$(21)\quad \mathfrak{V} = \frac{1+\lambda}{2}\int\left[u_1\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{x_1-x}{r}\right)+v_1\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{x_1-x}{r}\right)+w_1\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{x_1-x}{r}\right)\right]d\varpi_1$$
$$+\int\frac{x-x_1}{r}\left(u_1\frac{x-x_1}{r^2}+v_1\frac{y-y_1}{r^2}+w_1\frac{z-z_1}{r^2}\right)d\varpi_1.$$

On a, d'ailleurs,

$$(22)\quad \int\left[u_1\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{x_1-x}{r}\right)+v_1\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{x_1-x}{r}\right)+w_1\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{x_1-x}{r}\right)\right]d\varpi_1$$
$$= \mathsf{S}\,\frac{x-x_1}{r}\,[\;u_1\cos(N_1,x)+v_1\cos(N_1,y)+w_1\cos(N_1,z)$$
$$+u_2\cos(N_2,x)+v_2\cos(N_2,y)+w_2\cos(N_2,z)]\,dS_1$$
$$+\int\frac{x-x_1}{r}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial y_1}+\frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right)d\varpi_1.$$

Moyennant les égalités (20), (21) et (22), l'égalité (19) devient

$$(23)\quad \Xi\,d\varpi = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\Bigg\{\int\frac{x-x_1}{r}\left(u\frac{x-x_1}{r^2}+v\frac{y-y_1}{r^2}+w\frac{z-z_1}{r^2}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial y_1}+\frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right)d\varpi_1$$
$$+\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\int\frac{x-x_1}{r}\left(u_1\frac{x-x_1}{r^2}+v_1\frac{y-y_1}{r^2}+w_1\frac{z-z_1}{r^2}\right)d\varpi_1$$
$$+\frac{1+\lambda}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\int\frac{x-x_1}{r}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial y_1}+\frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right)d\varpi_1$$
$$+\mathsf{S}\,\frac{x-x_1}{r}\left(u\frac{x-x_1}{r^2}+v\frac{y-y_1}{r^2}+w\frac{z-z_1}{r^2}\right)$$
$$\times[\;u_1\cos(N_1,x)+v_1\cos(N_1,y)+w_1\cos(N_1,z)$$
$$+u_2\cos(N_2,x)+v_2\cos(N_2,y)+w_2\cos(N_2,z)]\,dS_1$$
$$+\frac{1+\lambda}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$
$$\times\,\mathsf{S}\,\frac{x-x_1}{r}\,[\;u_1\cos(N_1,x)+v_1\cos(N_1,y)+w_1\cos(N_1,z)$$
$$+u_2\cos(N_2,x)+v_2\cos(N_2,y)+w_2\cos(N_2,z)]\,dS_1\Bigg\}\,d\varpi_1.$$

Les égalités (12) et (23) nous font connaître la loi des forces appliquées aux divers éléments de volume $d\varpi$ du conducteur.

Un élément dS de l'une des surfaces qui terminent ce conducteur subit

conducteur parcouru par des courants, conduiront à des résultats identiques.

En particulier, si le conducteur sur lequel s'exerce l'action est parcouru par des courants uniformes, la loi d'Ampère conduira à l'exacte expression de l'action exercée sur ce conducteur par le courant agissant.

Il est évident que les conditions (18) sont remplies lorsque le courant agissant est uniforme. Ainsi :

La loi d'Ampère est équivalente à la loi de Grassmann dans le calcul de l'action exercée par un courant uniforme sur un élément d'un conducteur parcouru par des courants quelconques; elle donne l'expression exacte de cette action si ces derniers courants sont aussi uniformes.

§ 4. — *Généralisation de la loi d'Ampère.*

La loi d'Ampère, exprimée par la formule (11) et par deux autres formules analogues, possède cette propriété que les actions mutuelles de deux éléments de volume, découpés dans deux conducteurs que traversent des courants, sont soumis à la règle de l'égalité entre l'action et la réaction. Nous allons nous proposer, dans le cas le plus général, de réduire les actions électrodynamiques à des forces élémentaires soumises au principe de l'égalité entre l'action et la réaction.

Les égalités (16) du Chapitre précédent et (12) du présent Chapitre montrent que l'élément $d\varpi$ peut être regardé comme soumis :

1° A des forces émanées de chacun des éléments $d\varpi_1$ et données par la loi d'Ampère [égalité (11)];

2° A une force dont la composante parallèle à Ox a pour valeur

$$(19)\quad \Xi\, d\varpi = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[u\int \alpha\, d\varpi_1 + v\int \beta\, d\varpi_1 + w\int \gamma\, d\varpi_1 + \mho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] d\varpi.$$

Si l'on fait usage des formules (12 *bis*), on trouve sans peine

$$(20)\quad \begin{aligned} &u\int \alpha\, d\varpi_1 + v\int \beta\, d\varpi_1 + w\int \gamma\, d\varpi_1 \\ &= \mathbf{S}\frac{x-x_1}{r}\left(u\frac{x-x_1}{r^2}+v\frac{y-y_1}{r^2}+w\frac{z-z_1}{r^2}\right) \\ &\quad\times[\quad u_1\cos(N_1,x)+v_1\cos(N_1,y)+w_1\cos(N_1,z) \\ &\quad\quad + u_2\cos(N_2,x)+v_2\cos(N_2,y)+w_2\cos(N_2,z)]\,dS_1 \\ &\quad+\int\frac{x-x_1}{r}\left(u\frac{x-x_1}{r^2}+v\frac{y-y_1}{r^2}+w\frac{z-z_1}{r^2}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial y_1}+\frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right)d\varpi. \end{aligned}$$

D'autre part, l'égalité qui définit $\mathfrak{V}$ [Chapitre préliminaire, égalités (1)] donne sans peine

$$(21)\quad \mathfrak{V} = \frac{1+\lambda}{2}\int\left[u_1\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{x_1-x}{r}\right)+v_1\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{x_1-x}{r}\right)+w_1\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{x_1-x}{r}\right)\right]d\varpi_1$$
$$+\int\frac{x-x_1}{r}\left(u_1\frac{x-x_1}{r^2}+v_1\frac{y-y_1}{r^2}+w_1\frac{z-z_1}{r^2}\right)d\varpi_1.$$

On a, d'ailleurs,

$$(22)\quad \int\left[u_1\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{x_1-x}{r}\right)+v_1\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{x_1-x}{r}\right)+w_1\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{x_1-x}{r}\right)\right]d\varpi_1$$
$$=\mathbf{S}\,\frac{x-x_1}{r}\,[\ u_1\cos(N_1,x)+v_1\cos(N_1,y)+w_1\cos(N_1,z)$$
$$+u_2\cos(N_2,x)+v_2\cos(N_2,y)+w_2\cos(N_2,z)]\,dS_1$$
$$+\int\frac{x-x_1}{r}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial y_1}+\frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right)d\varpi_1.$$

Moyennant les égalités (20), (21) et (22), l'égalité (19) devient

$$(23)\quad \Xi\,d\varpi = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left\{\int\frac{x-x_1}{r}\left(u\frac{x-x_1}{r^2}+v\frac{y-y_1}{r^2}+w\frac{z-z_1}{r^2}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial y_1}+\frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right)d\varpi_1\right.$$
$$+\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\int\frac{x-x_1}{r}\left(u_1\frac{x-x_1}{r^2}+v_1\frac{y-y_1}{r^2}+w_1\frac{z-z_1}{r^2}\right)d\varpi_1$$
$$+\frac{1+\lambda}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\int\frac{x-x_1}{r}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial y_1}+\frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right)d\varpi_1$$
$$+\mathbf{S}\,\frac{x-x_1}{r}\left(u\frac{x-x_1}{r^2}+v\frac{y-y_1}{r^2}+w\frac{z-z_1}{r^2}\right)$$
$$\times[\ u_1\cos(N_1,x)+v_1\cos(N_1,y)+w_1\cos(N_1,z)$$
$$+u_2\cos(N_2,x)+v_2\cos(N_2,y)+w_2\cos(N_2,z)]\,dS_1$$
$$+\frac{1+\lambda}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$
$$\times\,\mathbf{S}\,\frac{x-x_1}{r}\,[\ u_1\cos(N_1,x)+v_1\cos(N_1,y)+w_1\cos(N_1,z)$$
$$\left.+u_2\cos(N_2,x)+v_2\cos(N_2,y)+w_2\cos(N_2,z)]\,dS_1\right\}d\varpi_1.$$

Les égalités (12) et (23) nous font connaître la loi des forces appliquées aux divers éléments de volume $d\varpi$ du conducteur.

Un élément dS de l'une des surfaces qui terminent ce conducteur subit

une force dont la composante parallèle à Ox est [Chapitre II, égalité (15)]

$$\mathcal{X}\, dS = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\, \upsilon\,[u\cos(N_i, x) + v\cos(N_i, y) + w\cos(N_i, z)]\, dS.$$

En vertu des égalités (21) et (22) cette égalité peut s'écrire

$$(24)\quad \begin{aligned} \mathcal{X}\, dS = &-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}[u\cos(N_i, x) + v\cos(N_i, y) + w\cos(N_i, z)] \\ &\times \left\{ \int \frac{x - x_1}{r}\left(u_1 \frac{x - x_1}{r^2} + v_1 \frac{y - y_1}{r^2} + w_1 \frac{z - z_1}{r^2}\right) d\varpi_1 \right. \\ &+ \frac{1+\lambda}{2} \int \frac{x - x_1}{r}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right) d\varpi_1 \\ &+ \frac{1+\lambda}{2} \mathbf{S} \frac{x - x_1}{r}[\ u_1\cos(N_1, x) + v_1\cos(N_1, y) + w_1\cos(N_1, z) \\ &\qquad\left. + u_2\cos(N_2, x) + v_2\cos(N_2, y) + w_2\cos(N_2, z)]\, dS_1 \right\} dS. \end{aligned}$$

Des égalités (12), (22), (24), et des égalités analogues auxquelles donneraient lieu les composantes des forces suivant les directions Oy et Oz, on déduit sans peine la conclusion suivante :

Les actions qu'un conducteur quelconque C_1 exerce sur un autre conducteur quelconque C peuvent se décomposer en actions élémentaires de la manière que voici :

1° *Tout élément de volume $d\varpi_1$ du conducteur C_1 exerce sur tout élément de volume $d\varpi$ du conducteur C une action dirigée d'un point de l'élément $d\varpi_1$ vers un point de l'élément $d\varpi$ et ayant pour grandeur*

$$\begin{aligned} -\mathfrak{A}^2 \left\{ \frac{1}{r^2} \right. &\left[uu_1 + vv_1 + ww_1 - \frac{3}{2}\left(\frac{x_1 - x}{r} u + \frac{y_1 - y}{r} v + \frac{z_1 - z}{r} w\right) \right. \\ &\qquad \left. \times \left(\frac{x_1 - x}{r} u_1 + \frac{y_1 - y}{r} v_1 + \frac{z_1 - z}{r} w_1\right)\right] \\ &- \frac{1}{2r}\left(u \frac{x_1 - x}{r} + v \frac{y_1 - y}{r} + w \frac{z_1 - z}{r}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right) \\ &- \frac{1}{2r}\left(u_1 \frac{x_1 - x}{r} + v_1 \frac{y_1 - y}{r} + w_1 \frac{z_1 - z}{r}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ &\left. + \frac{1+\lambda}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right) \right\} d\varpi\, d\varpi_1. \end{aligned}$$

2° *Tout élément dS_1, appartenant à une surface de discontinuité du*

conducteur C_1, *exerce sur tout élément de volume* $d\varpi$ *du conducteur* C, *une force dirigée d'un point de l'élément* dS_1 *vers un point de l'élément* $d\varpi$ *et ayant pour grandeur*

$$
\begin{aligned}
-\mathfrak{A}^2\Big\{ -\frac{1}{2r}\big[& u_1\cos(N_1,x)+v_1\cos(N_1,y)+w_1\cos(N_1,z) \\
& + u_2\cos(N_2,x)+v_2\cos(N_2,y)+w_2\cos(N_2,z)\big] \\
& \qquad \times\left(u\,\frac{x_1-x}{r}+v\,\frac{y_1+y}{r}+w\,\frac{z_1-z}{r}\right) \\
+\frac{1+\lambda}{4}\big[& u_1\cos(N_1,x)+v_1\cos(N_1,y)+w_1\cos(N_1,z) \\
& + u_2\cos(N_2,x)+v_2\cos(N_2,y)+w_2\cos(N_2,z)\big] \\
& \qquad \times\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\Big\}\, dS_1\, d\varpi.
\end{aligned}
$$

3° *Tout élément de volume* $d\varpi_1$, *appartenant au conducteur* C_1, *exerce sur tout élément* dS *de l'une des surfaces qui terminent le conducteur* C *une action dirigée d'un point de l'élément* $d\varpi_1$ *vers un point de l'élément* dS *et ayant pour grandeur*

$$
\begin{aligned}
-\mathfrak{A}^2\Big\{ & -\frac{1}{2r}\big[u\cos(N_i,x)+v\cos(N_i,y)+w\cos(N_i,z)\big] \\
& \times\left(u_1\,\frac{x_1-x}{r}+v_1\,\frac{y_1-y}{r}+w_1\,\frac{z_1-z}{r}\right) \\
& +\frac{1+\lambda}{4}\big[u\cos(N_i,x)+v\cos(N_i,y)+w\cos(N_i,z)\big]\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial y_1}+\frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right)\Big\}\, dS\, d\varpi_1.
\end{aligned}
$$

4° *Tout élément* dS_1, *appartenant à l'une des surfaces de discontinuité du conducteur* C_1, *exerce sur tout élément* dS, *appartenant à l'une des surfaces qui terminent le conducteur* C, *une action dirigée d'un point de l'élément* dS_1 *vers un point de l'élément* dS *et ayant pour grandeur*

$$
\begin{aligned}
-\mathfrak{A}^2\,\frac{1+\lambda}{4}\big[& u\cos(N_i,x)+v\cos(N_i,y)+w\cos(N_i,z)\big] \\
\times\big[& u_1\cos(N_1,x)+v_1\cos(N_1,y)+w_1\cos(N_1,z) \\
& + u_2\cos(N_2,x)+v_2\cos(N_2,y)+w_2\cos(N_2,z)\big]\, dS\, dS_1.
\end{aligned}
$$

Il est visible que *toutes ces actions élémentaires satisfont à la règle de l'égalité entre l'action et la réaction*.

La loi que nous venons d'établir est évidemment la généralisation de

celle que nous avons trouvée [1] pour les courants linéaires [*Leçons sur l'Électricité*, t. III, p. 276, égalité (10)], loi d'après laquelle deux éléments *ds*, *ds'* de courants se repoussent avec une force

$$\begin{aligned} \mathrm{R} = &- \frac{\mathfrak{A}^2 \mathrm{J}\mathrm{J}'\, ds\, ds'}{r^2} \left(\cos\omega - \frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right) \\ &- \frac{\mathfrak{A}^2}{2r}\mathrm{J}\, ds\, \frac{d\mathrm{J}'}{ds'}\, ds' \cos\theta - \frac{\mathfrak{A}^2}{2r}\mathrm{J}'\, ds'\, \frac{d\mathrm{J}}{ds}\, ds \cos\theta' - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\, \frac{1+\lambda}{2}\, \frac{d\mathrm{J}}{ds}\, \frac{d\mathrm{J}'}{ds'}\, ds\, ds'. \end{aligned}$$

L'existence de forces indépendantes de la distance parmi ces actions élémentaires constitue un paradoxe aussi facile à expliquer dans le cas général que dans le cas particulier des courants linéaires (voir *Leçons sur l'Électricité*, t. III, p. 276).

---

[1] Celle-ci étant corrigée comme nous l'avons indiqué plus haut (page 43, en note).

ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE.

LA

GÉOMÉTRIE RÉGLÉE

ET SES APPLICATIONS,

PAR M. G. KOENIGS,

Professeur suppléant au Collège de France.

CHAPITRE V.

COORDONNÉES DE KLEIN. — GÉOMÉTRIE ANALLAGMATIQUE.

Coordonnées tétraédriques. — Forme caractéristique de $\omega(x)$; réciproque. — Forme de M. Klein. — Système de six complexes linéaires en involution deux à deux. — Configuration remarquable qu'ils forment. — Propriétés des quinze congruences C_{ij}. — Notation particulière pour leurs directrices. — Les demi-quadriques Q_{ijk}. — Les dix quadriques fondamentales. — Les tétraèdres fondamentaux. — Relations remarquables entre les quadriques et les tétraèdres. — Digression sur une configuration offerte par trois complexes linéaires en involution deux à deux. — Groupement des sommets et des faces des tétraèdres. — Propriétés des permutations de six lettres. — Les tétraèdres desmiques. — Distribution sur une conique des six pôles d'un même plan. — Configuration des seize points et des seize plans. — Transformations qui font revenir sur elle-même la forme fondamentale. — Quelques généralités sur les espaces à n dimensions. — Représentation d'une quadrique sur un plan. — La projection stéréographique. — Correspondance entre la Géométrie projective sur une quadrique et la Géométrie anallagmatique dans un plan. — La Géométrie de l'espace réglé est identique à la Géométrie anallagmatique d'un espace à quatre dimensions.

74. Nous avons défini au n° 3 un système particulier de coordonnées r_{ik} de la ligne droite, dont la notion se trouve liée à celle d'un certain tétraèdre de coordonnées.

Nous avons indiqué ensuite comment on pouvait substituer à ces coordonnées de nouvelles coordonnées au moyen des formules de transformation

$$r_{ik} = A_{ik,1}x_1 + A_{ik,2}x_2 + \ldots + A_{ik,6}x_6,$$

dans lesquelles le déterminant de la transformation n'est pas nul. Les équations

$$x_i = 0$$

représentent chacune un complexe linéaire, et ces six complexes ne font pas évidemment partie d'un même système à cinq termes.

Les variables r_{ik} vérifient la relation

$$r_{12}r_{34} + r_{13}r_{42} + r_{14}r_{23} = 0,$$

et, si on leur substitue les variables x_i, le premier membre de cette équation devient une forme quadratique en $x_1, x_2, \ldots, x_6$,

$$\omega(x).$$

La forme de la fonction $\omega(x)$ caractérise les coordonnées. Il y a deux types particulièrement importants et qui ont, d'ailleurs, entre eux les liens les plus étroits. Le premier est le suivant

$$x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6,$$

et le second, qui a été considéré par M. Klein en premier lieu, et qui est la base des recherches de ce géomètre, consiste dans la somme de carrés

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_6^2.$$

Nous allons étudier successivement ces deux types.

Nous observerons d'abord que les coordonnées r_{ik} réalisent le premier, et nous allons montrer que, réciproquement, *si les coordonnées réduisent la forme* $\omega(x)$ *au type*

$$\omega(x) = x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6$$

(somme de trois rectangles), *les* x_ρ *sont des coordonnées* r_{ik} *par rapport à un certain tétraèdre.*

En effet, si nous cherchons la forme adjointe $\Omega(a)$, nous trouverons

$$\Omega(a) = a_4a_1 + a_5a_2 + a_6a_3,$$

c'est-à-dire $\omega(a)$. C'est un de ces cas où la forme adjointe reproduit la forme primitive. Pour le complexe $x_\rho = 0$, tous les coefficients a_i sont nuls, sauf a_ρ, et, par suite, $\Omega(a) = 0$; *les complexes coordonnés sont donc tous spéciaux.*

Montrons maintenant que les directrices de ces complexes sont les arêtes d'un tétraèdre.

La condition d'involution de deux complexes A, B s'écrit ici

$$a_4 b_1 + b_4 a_1 + a_5 b_2 + b_5 a_2 + a_6 b_3 + b_6 a_3 = 0;$$

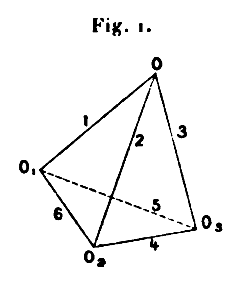
elle est vérifiée pour chaque couple $x_\rho = 0$, $x_\sigma = 0$ de complexes coordonnés, sauf pour les trois couples d'indices 1 et 4, 2 et 5, 3 et 6.

Prenons, par exemple, les complexes d'indices 1, 2, 3 (*fig.* 1), puisqu'ils sont spéciaux et en involution deux à deux, et qu'ils ne font pas partie d'un même système à deux termes, il en résulte que leurs directrices forment un trièdre ou un triangle : par exemple, un trièdre de sommet O.

Les directrices des complexes 2, 3, 4 forment de même un trièdre ou un triangle; mais si elles formaient un trièdre, la directrice de 4 devrait passer au point de rencontre O des directrices de 2 et de 3; la directrice de 4 couperait donc en O celle du complexe 1, ce qui ne se peut, attendu que 1 et 4 ne sont pas en involution. Donc les directrices de 2, 3, 4 forment un triangle, et la directrice de 4 coupe celle de 2 en un point O_2, celle de 3 en un point O_3.

Si l'on prend ensuite la directrice de 5, elle forme avec celles de 3 et 4 un trièdre ou un triangle. Si elle formait un triangle, elle serait dans le plan OO_2O_3

Fig. 1.



et couperait la directrice de 2, ce qui ne se peut, attendu que 2 et 5 ne sont pas en involution. Donc les directrices de 5, 3, 4 forment un trièdre, et, par suite, la directrice de 5 passe en O_3; de même la directrice de 6 passe en O_2.

Il ne reste plus qu'à prouver que les directrices de 5, 6, 1 se coupent en un même point O_1, c'est-à-dire forment un trièdre. Or, en effet, ces trois directrices se coupent deux à deux; elles forment donc un trièdre ou un triangle. On ne peut admettre qu'elles forment un triangle, car la directrice de 1, étant alors dans le plan des directrices de 5 et de 6, couperait la directrice de 4; et cela ne se peut, puisque 1 et 4 ne sont pas en involution. C'est donc un trièdre que forment les droites directrices des complexes 1, 6, 5.

Il est ainsi établi que les directrices des complexes coordonnés forment un

tétraèdre, dans lequel les couples d'arêtes opposées sont les directrices des complexes 1 et 4, 2 et 5, 3 et 6.

On serait arrivé évidemment au même résultat si l'on était parti de l'hypothèse que les directrices de 1, 2, 3 forment un triangle et non un trièdre. On aurait obtenu une configuration dualistique au point de vue des notations de celle que nous avons trouvée.

Ceci posé, affectons de l'indice 1 le point O_1, de l'indice 2 le point O_2, de l'indice 3 le point O_3 et de l'indice 4 le point O; puis considérons les coordonnées r_{ik} définies au n° 4 et prises par rapport à ce tétraèdre.

La directrice du complexe

1	est la droite	$O\,O_1$	ou	41,
2	»	$O\,O_2$	»	42,
3	»	$O\,O_3$	»	43,
4	»	O_2O_3	»	23,
5	»	O_3O_1	»	31,
6	»	O_1O_2	»	12.

Or l'équation

$$r_{ik} = 0$$

est la condition de rencontre d'une droite avec la droite ik; donc, avec le système des r_{ik}, l'équation du complexe

1	sera	$r_{41} = 0$,
2	»	$r_{42} = 0$,
3	»	$r_{43} = 0$,
4	»	$r_{23} = 0$,
5	»	$r_{31} = 0$,
6	»	$r_{12} = 0$,

et, comme les r_{ik} sont des fonctions linéaires de x_ρ, on devra avoir

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 r_{41},\\ x_2 &= \alpha_2 r_{42},\\ x_3 &= \alpha_3 r_{43},\\ x_4 &= \alpha'_1 r_{23},\\ x_5 &= \alpha'_2 r_{31},\\ x_6 &= \alpha'_3 r_{12}, \end{aligned}\right.$$

où les α, α' sont des constantes. Si l'on forme

$$x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6 = \alpha_1\alpha'_1\, r_{41}r_{23} + \alpha_2\alpha'_2\, r_{42}r_{31} + \alpha_3\alpha'_3\, r_{43}r_{12};$$

cette forme ne devant différer que par un facteur de

$$r_{41}r_{23} + r_{42}r_{31} + r_{43}r_{12},$$

on voit que

(2) $$\alpha_1\alpha'_1 = \alpha_2\alpha'_2 = \alpha_3\alpha'_3 :$$

mais, et c'est là le point essentiel, les formules (1) montrent bien qu'aux facteurs α près, les x_ρ sont des coordonnées r_{ik} prises par rapport à un certain tétraèdre.

La présence des facteurs α est sans importance, puisque, eu égard aux relations (2), on peut les faire rentrer dans les x sans changer la forme

$$x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6.$$

En somme, effectuer une transformation qui ramène de la forme ci-dessus à cette même forme revient à changer le tétraèdre de référence.

Le lecteur prouvera aisément, comme application des formules qui définissent les r_{ik} au n° **4**, que réciproquement tout changement de titres ou de coordonnées se traduit par une transformation linéaire des coordonnées r_{ik}.

75. Les autres coordonnées dont nous allons parler sont dues à M. Klein.

Supposons qu'on ait un système de coordonnées de l'espèce précédente, c'est-à-dire *tétraédriques,* et désignons dès lors ces coordonnées, comme au n° **4**, par le symbole r_{ik}. Nous aurons

$$r_{41}r_{23} + r_{42}r_{31} + r_{43}r_{12} = 0,$$

ou encore

$$(r_{41} + r_{23})^2 + (r_{42} + r_{31})^2 + (r_{43} + r_{12})^2 - (r_{41} - r_{23})^2 - (r_{42} - r_{31})^2 - (r_{43} - r_{12})^2 = 0.$$

La forme fondamentale, *si l'on a égard à la réalité,* est donc décomposable en six carrés, dont trois positifs et trois négatifs.

Effectuons la transformation *réelle*

(3) $$\begin{cases} r_{41} + r_{23} = x_1, \\ r_{42} + r_{31} = x_2, \\ r_{43} + r_{12} = x_3, \\ r_{41} - r_{23} = x_4, \\ r_{42} - r_{31} = x_5, \\ r_{43} - r_{12} = x_6, \end{cases}$$

et il viendra, pour la forme fondamentale,

(4) $$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_6^2.$$

Mais des raisons de *symétrie,* qui se présentent aussi dans la théorie des coordonnées penta ou hexasphériques, font désirer de ramener (4) à une **somme** de carrés ([1]). Ce but ne peut être atteint évidemment que par une transformation imaginaire.

Par exemple, aux équations (3) on peut substituer les suivantes :

$$(5)\quad \begin{cases} r_{41}+r_{23}=x_1, & r_{41}-r_{12}=x_4\sqrt{-1}, \\ r_{42}+r_{31}=x_2, & r_{42}-r_{31}=x_5\sqrt{-1}, \\ r_{43}+r_{12}=x_3, & r_{43}-r_{12}=x_6\sqrt{-1}, \end{cases}$$

et, au lieu de (4), nous aurons

$$(6)\qquad x_1^2+x_2^2+\ldots+x_6^2,$$

formule symétrique, mais compliquée d'imaginaires.

Cependant, dans l'hypothèse où nous nous sommes placé, les six complexes coordonnés sont réels, attendu que x_1, x_2, x_3 sont réels, et que $\sqrt{-1}$ est en facteur dans x_4, x_5, x_6.

Mais cette circonstance n'aura pas lieu *nécessairement* si nous effectuons *toute autre* transformation linéaire ramenant la forme fondamentale à une somme de six carrés.

76. Une forme quadratique, somme de carrés (mettons six carrés), étant donnée

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_6^2,$$

on appelle *substitution orthogonale* toute transformation linéaire qui conserve à la forme son type, en sorte qu'en vertu des équations de transformation

$$x_i=\alpha_{i,1}y_1+\alpha_{i,2}y_2+\ldots+\alpha_{i,6}y_6 \qquad (i=1,2,\ldots,6),$$

on doit avoir

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_6^2=y_1^2+y_2^2+\ldots+y_6^2.$$

En conséquence, en effectuant sur les variables x_i, définies avec précision par les formules (5), une substitution orthogonale quelconque, on aura le type général des coordonnées qui attribuent à la fonction ω la forme d'une somme de carrés.

Les coordonnées ainsi définies sont celles de M. Klein; mais il est aisé de

---

[1] Consulter à cet égard les travaux de M. Darboux : *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces; Sur les groupes de points, de cercles,* et les *Leçons sur la théorie des surfaces.*

constater que ces coordonnées ne sont pas essentiellement distinctes des coordonnées, en apparence moins générales, que définissent les formules (5).

Ayons, en effet, des coordonnées y_i ramenant ω à la forme

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_6^2,$$

et effectuons la transformation linéaire

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{ll} z_1 = y_1 + y_2\sqrt{-1}, & z_4 = y_1 - y_2\sqrt{-1}, \\ z_2 = y_3 + y_4\sqrt{-1}, & z_5 = y_3 - y_4\sqrt{-1}, \\ z_3 = y_5 + y_6\sqrt{-1}, & z_6 = y_5 - y_6\sqrt{-1}, \end{array}\right.$$

l'emploi des variables z ainsi définies ramènera la forme au type tétraédrique

$$z_1 z_4 + z_2 z_5 + z_3 z_6;$$

en sorte que les z_i sont les coordonnées r_{ik} relativement à un certain tétraèdre, tandis que les y, d'après les formules (7), sont celles qui s'en déduiraient précisément par application des formules (5).

Il y a cependant une différence, car ici le tétraèdre auquel se rapportent les coordonnées z_i *peut fort bien être imaginaire*. On conçoit que cette distinction n'ait rien de bien essentiel.

Par cette remarque, le passage d'un système de coordonnées de M. Klein à un autre système analogue peut se ramener au passage d'un système de coordonnées tétraédriques à un autre système tétraédrique, précédé et suivi de la transformation définie par les formules (5).

77. Le système de coordonnées de M. Klein présente une configuration remarquable dont nous allons exposer les principales propriétés.

Il y figure six complexes coordonnés C_1, C_2, ..., C_6, représentés par les équations respectives

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \ldots, \quad x_6 = 0.$$

Aucun de ces complexes n'est spécial, car la forme adjointe de $\omega(x)$ est ici

$$\Omega(a) = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_6^2;$$

elle n'est nulle pour aucun des complexes C_i.

La condition d'involution des deux complexes

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_6 x_6 = 0,$$
$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_6 x_6 = 0$$

s'écrit

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_6 b_6 = 0.$$

On reconnaît ainsi que les complexes C_i, pris deux à deux, sont en involution ou orthogonaux. De là le nom de *sextuplement orthogonal* que l'on donne quelquefois à ce système de coordonnées. M. Klein a donné à l'ensemble des six complexes C_i le nom de *système fondamental*.

Supposons que, réciproquement, les complexes coordonnés $x_1, x_2, \ldots, x_6$ soient en involution deux à deux.

La forme adjointe de la forme fondamentale s'écrivant

$$\Omega(a) = \Sigma A_{ij} a_i a_j,$$

l'involution des complexes

$$x_i = 0, \qquad x_j = 0$$

exige que $A_{ij} = 0$; tous les rectangles doivent manquer dans $\Omega(a)$, et aucun complexe coordonné ne peut être spécial, car, si $x_i = 0$ était spécial, on aurait

$$A_{ii} = 0,$$

et $\Omega(a)$ serait réductible à moins de six carrés. En faisant rentrer dans les a des facteurs constants, on peut donc écrire

$$\Omega(a) = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_6^2,$$

et alors on a

$$\omega(x) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_6^2;$$

le système de coordonnées est celui de M. Klein.

Ceci nous permet de compter le nombre de paramètres contenus dans un système fondamental.

Donnons-nous arbitrairement C_1, nous introduisons ainsi cinq paramètres, car un complexe linéaire dépend de cinq paramètres. Nous prendrons C_2 en involution avec C_1, mais quelconque d'ailleurs : nous introduisons ainsi quatre nouveaux paramètres. C_3 devra être en involution avec C_1 et C_2, mais il contient encore trois paramètres nouveaux. C_4 apportera seulement deux paramètres, car il est assujetti à être en involution avec C_1, C_2, C_3; C_5 contient enfin un seul paramètre, car il doit être en involution avec C_1, C_2, C_3, C_4. Quant à C_6, il est pleinement défini par la condition d'être en involution avec C_1, C_2, C_3, C_4, C_5. Nous avons ainsi construit un système fondamental, et, en vérité, *le plus général*. Nous avons dû introduire dans notre construction

$$5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$$

paramètres. Tel est le nombre de paramètres que contient le système fondamental.

On observera que, après avoir pris $C_1, C_2, \ldots, C_p$ réels, nous pouvons prendre ensuite $C_{p+1}, \ldots, C_6$ avec des coefficients imaginaires quelconques, en sorte que, *dans un système fondamental, le nombre des complexes imaginaires est arbitraire*. Toutefois, il est impossible qu'il n'y en ait qu'un seul d'imaginaire, car si $C_1, C_2, \ldots, C_5$ sont réels, le complexe C_6 est forcément réel; mais il peut y en avoir deux, trois, quatre, cinq ou même six d'imaginaires.

Un tel système exige évidemment, pour être obtenu, une transformation imaginaire.

78. Prenons p des complexes C_i, savoir $C_1, C_2, \ldots, C_p$ et formons le système à p termes

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_p x_p = 0;$$

il est clair que, $x_{p+1} = 0, \ldots, x_6 = 0$ étant $(6 - p)$ complexes en involution avec $C_1, C_2, \ldots, C_p$, le système complémentaire du système précédent sera

$$\lambda_{p+1} x_{p+1} + \ldots + \lambda_6 x_6 = 0.$$

De là de nombreuses conséquences, comme on va le voir.

Soit C_{ij} la congruence commune aux complexes C_i et C_j; elle n'est pas singulière, car son invariant est égal à l'unité. Je désigne par Δ_{ij} et Δ_{ji} ses directrices, qui sont toujours distinctes. J'observe que le système à deux termes formé des complexes qui contiennent la congruence C_{ij} a pour équation

$$x_i + \lambda x_j = 0;$$

son invariant est égal à $1 + \lambda^2$; donc les complexes spéciaux du système auront pour équations

$$\sqrt{-1}\, x_i + x_j = 0,$$
$$\sqrt{-1}\, x_j + x_i = 0.$$

Les coordonnées des directrices de la congruence C_{ij} seront toutes nulles, sauf x_i et x_j, qui seront proportionnelles à $\pm\sqrt{-1}$ et à 1.

VOICI COMMENT JE FIXE LES NOTATIONS :

Je désigne par Δ_{ij} la directrice dont les coordonnées sont $x_i = \sqrt{-1}$, $x_j = 1$, les autres coordonnées étant nulles; dès lors Δ_{ji} aura pour coordonnées $x_j = \sqrt{-1}$, $x_i = 1$, les autres coordonnées étant nulles.

On va voir combien est importante cette fixation des notations au point de vue de la correspondance à établir entre les propriétés de la configuration des six complexes fondamentaux et celles des permutations de six lettres.

Il y a quinze combinaisons de six indices deux à deux; il y a donc quinze congruences C_{ij} et, par suite, trente droites $\Delta_{\rho\sigma}$.

On observera que : *toute droite* Δ_{ij} *appartient à tout complexe* C_k *qui n'a avec elle aucun indice commun.* Il y a quatre de ces complexes C_k, C_l, C_m, C_n; ils ont en commun deux droites, Δ_{ij} et Δ_{ji}.

Prenons deux congruences C_{ij}, C_{kl} n'ayant aucun indice commun. *Leurs directrices forment un quadrilatère gauche.* En effet, Δ_{ij}, par exemple, appartient, d'après ce qui précède, aux complexes C_k et C_l: donc Δ_{ij} appartient à la congruence C_{kl} et coupe, en conséquence, Δ_{kl} et Δ_{lk}.

Supposons, au contraire, que C_{ij} et C_{ik} aient un indice commun i; dans ce cas, les directrices ne sauraient se couper; en effet, soient l, m, n les trois indices autres que i, j, k; les complexes C_l, C_m, C_n contiennent les directrices de C_{ij}, C_{ik}; donc ces directrices appartiennent à la demi-quadrique Q_{lmn} commune à ces trois complexes.

Les complexes C_i, associés par trois, donnent lieu à vingt demi-quadriques. Ces demi-quadriques vont par couples de demi-quadriques complémentaires. Il est clair, en effet, que les deux demi-quadriques

$$Q_{ijk},\quad Q_{lmn},$$

sans indice commun, sont complémentaires; elles sont portées par une même quadrique que je représente par le symbole

$$(Q_{ijk},\quad Q_{lmn}).$$

Il y a donc dix de ces quadriques. M. Klein leur a donné le nom de *quadriques fondamentales.*

Deux demi-quadriques ayant un indice commun

$$Q_{ikl},\quad Q_{imn}$$

n'ont en commun aucune droite, car si une droite commune existait, elle serait commune aux cinq complexes C_i, C_k, C_l, C_m, C_n. Les complémentaires de ces deux demi-quadriques sont

$$Q_{jmn},\quad Q_{jkl},$$

et elles ont aussi un indice j commun.

Considérons, au contraire, deux demi-quadriques ayant deux indices communs

$$Q_{ijk},\quad Q_{ijl},$$

ces demi-quadriques ont en commun les droites Δ_{mn}, Δ_{nm}, directrices de C_{mn}.

Leurs complémentaires seront

$$Q_{mnl}, \quad Q_{mnk},$$

et ces complémentaires ont en commun Δ_{ij}, Δ_{ji}.

Donc les deux quadriques fondamentales

$$(Q_{ijk}, Q_{mnl}), \quad (Q_{ijl}, Q_{mnk})$$

se coupent suivant le quadrilatère gauche, formé par les droites Δ_{ij}, Δ_{ji}, Δ_{mn}, Δ_{nm}.

Si une congruence C_{ij} n'a aucun indice commun avec une demi-quadrique Q_{lmn}, elle en a deux communs avec la demi-quadrique complémentaire Q_{ijk} et ses directrices sont portées par cette demi-quadrique; elles sont donc tracées sur la quadrique

$$(Q_{ijk}, Q_{lmn}).$$

Ainsi, *pour qu'une congruence ait ses directrices sur une quadrique fondamentale, il faut et il suffit qu'elle ait deux ou zéro indices communs avec l'une ou l'autre des demi-quadriques qui constituent la quadrique fondamentale proposée.*

Mais il peut arriver que la congruence C_{ij} ait un indice commun avec chacune de ces demi-quadriques

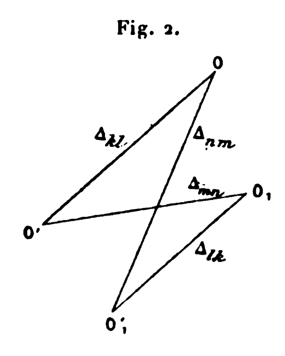
$$Q_{ikl}, \quad Q_{jmn};$$

on peut prouver que, *dans ce cas, les droites Δ_{ij}, Δ_{ji} sont conjuguées par rapport à la quadrique fondamentale proposée*

$$(Q_{ikl}, \quad Q_{jmn}).$$

En effet, Δ_{mn}, Δ_{nm}, Δ_{kl}, Δ_{lk} forment un quadrilatère gauche sur cette qua-

Fig. 2.



drique; Δ_{kl} coupe Δ_{mn} et Δ_{nm} en deux points O, O', et Δ_{lk} coupe ces deux mêmes droites en O_1, O'_1. La droite Δ_{ij} coupe les quatre droites Δ_{kl}, Δ_{lk}, Δ_{mn}, Δ_{nm};

donc, puisque Δ_{ij} n'est pas tracée sur la quadrique, il faut que les points où elle perce cette surface soient deux des quatre points O, O′, O_1, O'_1; ils ne peuvent être que O, O_1 ou O′, O'_1. De même pour Δ_{ji}. Donc les droites Δ_{ij}, Δ_{ji} sont précisément celles qui joignent O et O_1, O′ et O'_1 : ce sont donc les diagonales du quadrilatère gauche. En conséquence, elles sont bien conjuguées par rapport à la quadrique proposée.

Mais notre raisonnement nous prouve quelque chose de plus.

Les droites Δ_{ij}, Δ_{ji}, Δ_{kl}, Δ_{lk}, Δ_{mn}, Δ_{nm} sont les arêtes d'un tétraèdre.

Ainsi :

Les directrices de trois congruences C_{ij}, C_{kl}, C_{mn} sans indices communs forment un tétraèdre.

Je désigne par $T(ij, kl, mn)$ ce tétraèdre.

On peut donner de ce fait une autre démonstration.

Je rappelle que le complexe spécial dont $\Delta_{\rho\sigma}$ est la directrice a pour équation

$$\sqrt{-1}\,x_\rho + x_\sigma = 0.$$

Posons, en conséquence, d'une façon générale,

$$Z_{\rho\sigma} = \sqrt{-1}\,x_\rho + x_\sigma.$$

On aura

$$\begin{aligned}
Z_{ij}Z_{ji} + Z_{kl}Z_{lk} + Z_{mn}Z_{nm} &= (\sqrt{-1}\,x_i + x_j)(\sqrt{-1}\,x_j + x_i) \\
&\quad + (\sqrt{-1}\,x_k + x_l)(\sqrt{-1}\,x_l + x_k) + (\sqrt{-1}\,x_m + x_n)(\sqrt{-1}\,x_n + x_m) \\
&= -(x_i x_j + x_k x_l + x_m x_n) \\
&\quad + \sqrt{-1}\,(x_i^2 + x_j^2 + x_k^2 + x_l^2 + x_m^2 + x_n^2) + (x_i x_j + x_k x_l + x_m x_n) \\
&= \sqrt{-1}\,(x_i^2 + x_j^2 + x_k^2 + x_l^2 + x_m^2 + x_n^2).
\end{aligned}$$

Les formules de transformation

$$\begin{aligned}
Z_{ij} &= \sqrt{-1}\,x_i + x_j, \\
Z_{ji} &= \sqrt{-1}\,x_j + x_i, \\
Z_{kl} &= \sqrt{-1}\,x_k + x_l, \\
Z_{lk} &= \sqrt{-1}\,x_l + x_k, \\
Z_{mn} &= \sqrt{-1}\,x_m + x_n, \\
Z_{nm} &= \sqrt{-1}\,x_n + x_m
\end{aligned}$$

attribuent donc à la formule quadratique $\omega(x)$ la forme *tétraédrique*

$$Z_{ij}Z_{ji} + Z_{kl}Z_{lk} + Z_{mn}Z_{nm}.$$

et, par suite, conformément au n° **74**, les axes des six complexes spéciaux

$$Z_{ij} = 0, \quad Z_{ji} = 0, \quad Z_{kl} = 0, \quad Z_{lk} = 0, \quad Z_{mn} = 0, \quad Z_{nm} = 0,$$

c'est-à-dire les directrices des congruences C_{ij}, C_{kl}, C_{mn} forment un tétraèdre.

79. Disposons les directrices de ces congruences suivant le Tableau ci-après :

$$\begin{array}{lll} \Delta_{ij}, & \Delta_{kl}, & \Delta_{mn}, \\ \Delta_{ji}, & \Delta_{lk}, & \Delta_{nm}; \end{array}$$

il est clair que toutes les droites de ce Tableau se coupent, sauf celles qui sont sur une même verticale, et qui constituent précisément les couples d'arêtes opposées du tétraèdre $T(ij, kl, mn)$.

On peut, en groupant par trois les droites du Tableau précédent, sans en prendre jamais deux sur une verticale, procéder de plusieurs manières. On peut les prendre toutes trois sur la première ligne, ou deux sur la première et une sur la seconde, ou une sur la première et deux sur la seconde, ou bien enfin toutes les trois sur la seconde. Nous obtiendrons ainsi huit groupes différents de trois droites se coupant deux à deux et formant, en conséquence, soit trièdre, soit triangle.

Nous réalisons de la sorte les quatre trièdres et les quatre triangles de face de notre tétraèdre $T(ij, kl, mn)$.

Supposons, pour fixer les idées, que les droites placées dans la première ligne

$$(\Delta_{ij}, \quad \Delta_{kl}, \quad \Delta_{mn})$$

forment un trièdre de sommet O; les trois autres droites, celles de la seconde ligne

$$(\Delta_{ji}, \quad \Delta_{lk}, \quad \Delta_{nm}),$$

formeront évidemment un triangle qui constitue la face opposée au point de concours des trois premières arêtes.

Si maintenant nous remplaçons dans le symbole

$$(\Delta_{ij}, \quad \Delta_{kl}, \quad \Delta_{mn})$$

une des droites, par exemple Δ_{mn} par la droite de la seconde ligne Δ_{nm}, qui est placée au-dessous, nous obtenons trois droites

$$(\Delta_{ij}, \quad \Delta_{kl}, \quad \Delta_{nm}),$$

qui forment une des faces qui aboutissent au point O.

On voit donc qu'on obtiendra les quatre faces du tétraèdre en prenant un

nombre impair (1 ou 3) de droites dans la seconde ligne et un nombre pair (2 ou zéro) dans la première.

On aura, au contraire, les quatre trièdres du tétraèdre en prenant un nombre impair (1 ou 3) de droites dans la première ligne et un nombre pair (2 ou zéro) dans la seconde.

Donc, si les droites

$$(\Delta_{ij}, \quad \Delta_{kl}, \quad \Delta_{mn})$$

forment un trièdre, il en est de même des triples de droites

$$(\Delta_{ij}, \quad \Delta_{kl}, \quad \Delta_{nm}),$$
$$(\Delta_{ji}, \quad \Delta_{kl}, \quad \Delta_{nm}),$$
$$(\Delta_{ji}, \quad \Delta_{lk}, \quad \Delta_{mn}).$$

tandis que les triples de droites

$$(\Delta_{ji}, \quad \Delta_{lk}, \quad \Delta_{nm}),$$
$$(\Delta_{ji}, \quad \Delta_{kl}, \quad \Delta_{mn}).$$
$$(\Delta_{ij}, \quad \Delta_{lk}, \quad \Delta_{mn}),$$
$$(\Delta_{ij}, \quad \Delta_{kl}, \quad \Delta_{nm})$$

forment des triangles.

On peut résumer ces faits dans un énoncé très laconique :

Soit le triple de droites

$$(\Delta_{ij}, \quad \Delta_{kl}, \quad \Delta_{mn}).$$

Ces droites forment trièdre ou triangle; si l'on permute dans l'une de ces droites les deux indices, on a encore trois droites qui se coupent deux à deux et forment encore trièdre ou triangle, *seulement l'espèce de la configuration est changée, c'est-à-dire que si le premier triple formait triangle, le nouveau forme trièdre, et réciproquement.*

Nous appellerons *fondamentaux* les tétraèdres $T(ij, kl, mn)$. Il y a quinze de ces tétraèdres. Chacun est, en effet, caractérisé par une distribution en trois couples

$$(ij), \quad (kl), \quad (mn)$$

des indices 1, 2, ..., 6. L'ordre de ces couples importe peu, ainsi que l'ordre des indices dans un couple.

Observons que l'indice 1 figure dans l'un de ces couples. Soit $i = 1$, alors j peut être 2, 3, 4, 5 ou 6, ce qui nous fournit déjà cinq classes de groupements. L'indice associé à l'indice 1 étant choisi, il reste à distribuer les quatre autres in-

dices en deux couples; le nombre des dispositions possibles est égal à la moitié du nombre des combinaisons de quatre objets deux à deux, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}\frac{4.3}{2} = 3$. Chaque classe comprend donc 3 dispositions; il y a 5 classes, il y a donc $3 \times 5 = 15$ tétraèdres.

Considérons une directrice Δ_{ij} de la congruence C_{ij}; cette directrice est coupée par les directrices des congruences

$$C_{kl} \text{ et } C_{mn}, \qquad C_{km} \text{ et } C_{ln}, \qquad C_{kn} \text{ et } C_{lm}.$$

Nous associons par deux ces congruences, parce que les directrices de C_{kl} et C_{mn}, par exemple, coupent Δ_{ij} aux deux mêmes points. Sur chaque droite Δ_{ij} nous avons donc trois couples de sommets de tétraèdres fondamentaux. *Ces trois couples, pris deux à deux, sont en relation harmonique.*

Par exemple, les deux points où Δ_{kl}, Δ_{lk} coupent Δ_{ij} forment une proportion harmonique avec ceux où Δ_{ij} est coupée par Δ_{km} et Δ_{mk}. En effet, les deux premiers points sont deux sommets du tétraèdre $T(ij, kl, mn)$, et les deux autres sont ceux où l'arête Δ_{ij}, qui les porte, perce la quadrique

$$(Q_{ikl}, \quad Q_{jmn}).$$

Donc, puisque le tétraèdre $T(ij, kl, mn)$ est conjugué par rapport à cette conique, la propriété harmonique a bien lieu.

80. Nous avons vu que le tétraèdre $T(ij, kl, mn)$ a deux de ses couples d'arêtes opposées Δ_{kl}, Δ_{lk}, Δ_{mn}, Δ_{nm} sur la quadrique

$$(Q_{ikl}, \quad Q_{jmn}),$$

tandis que les arêtes opposées Δ_{ij}, Δ_{ji} sont conjuguées par rapport à cette quadrique.

On a formé cette quadrique au moyen du groupement des indices en trois couples

$$ij, \quad kl, \quad mn,$$

en prenant pour Q_{ikl} un indice dans un de ces couples (l'indice i), deux dans un autre (k et l) et zéro dans le dernier (m et n); Q_{jmn} est formé de même en prenant un indice dans un des deux couples, deux dans un second et zéro dans le troisième.

Il y a visiblement six quadriques fondamentales qui contiennent ainsi chacune deux couples d'arêtes opposées de $T(ij, kl, mn)$ en effet; contiennent tous les couples d'arêtes opposées, sauf Δ_{ij}, Δ_{ji}, les deux quadriques

$$(Q_{ikl}, \quad Q_{jmn}), \qquad (Q_{imn}, \quad Q_{jkl});$$

item, sauf Δ_{kl}, Δ_{lk}, les deux quadriques

$$(Q_{kli},\ Q_{lmn}),\qquad (Q_{kmn},\ Q_{lij});$$

item, sauf Δ_{mn}, Δ_{nm}, les deux quadriques

$$(Q_{mlj},\ Q_{nkl}),\qquad (Q_{mkl},\ Q_{nlj}).$$

Restent quatre autres quadriques fondamentales qui ne contiennent aucune arête du tétraèdre proposé : ce sont les quadriques que l'on obtient en prenant pour chacune des demi-quadriques composantes un des trois indices (et un seulement) dans chacun des couples

$$ij,\quad kl,\quad mn.$$

On trouve ainsi les quadriques fondamentales

$$(Q_{ikm},\ Q_{jln}),$$
$$(Q_{ilm},\ Q_{jkn}),$$
$$(Q_{ikn},\ Q_{jlm}),$$
$$(Q_{iln},\ Q_{jkm}).$$

Ces quatre quadriques admettent le tétraèdre $T(ij,\ kl,\ mn)$ comme tétraèdre conjugué commun.

Nous avons vu en effet qu'une quadrique fondamentale étant donnée, par exemple,

$$(Q_{ikm},\ Q_{jln}),$$

toute congruence qui a un indice commun avec ses deux demi-quadriques composantes Q_{ikm}, Q_{jln}, par exemple C_{ij}, a ses deux directrices conjuguées par rapport à la quadrique.

Donc, eu égard précisément au mode de formation de nos quatre quadriques, on voit que les directrices de C_{ij}, C_{kl}, C_{mn} forment autant de couples de droites conjuguées communes à ces quatre quadriques; ces droites formant le tétraèdre $T(ij,\ kl,\ mn)$, on voit bien que ce tétraèdre est conjugué à la fois par rapport à ces quatre quadriques.

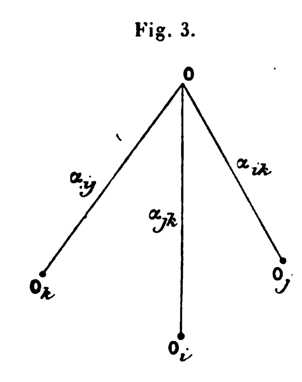
On peut rattacher cette propriété à une autre qui concerne trois complexes linéaires en involution.

Soient trois complexes linéaires C_i, C_j, C_k en involution deux à deux; O un point de l'espace; π_i, π_j, π_k ses plans polaires dans les trois complexes; α_{ij}, α_{jk}, α_{ik} les intersections de ces plans.

Sur la droite α_{ij} est le point O_k, pôle de π_i dans le complexe C_j et sur α_{ik} est le point O_j, pôle de π_i dans le complexe C_k.

Puisque O et O_k sont pôles d'un même plan π_i, dans C_i et C_j respectivement, il en résulte que O_k et O (eu égard à l'involution) sont pôles d'un même plan dans ces deux complexes C_i et C_j respectivement (*fig.* 3).

Fig. 3.



Comme π_j est le plan polaire de O dans C_j, on voit que π_j est le plan polaire de O_k dans C_i. Ainsi O_k est pôle de π_i dans C_j et de π_j dans C_i. De même le point O_j est le pôle de π_k dans C_i et de π_i dans C_k.

On verra de même qu'il existe sur α_{jk} un point O_i, qui est à la fois le pôle de π_k dans C_j et de π_j dans C_k. Enfin le plan π des points O_i, O_j, O_k est le pôle de ces points dans chacun des complexes C_i, C_j, C_k respectivement.

En effet, prouvons par exemple que O_i est le pôle du plan π dans le complexe C_i. Il suffit de prouver que O_iO_k et O_iO_j sont deux droites de ce complexe. Or, en effet, O_iO_k est issue du point O_k dans le plan π_j polaire de O_k dans C_i, et O_iO_j est issue de O_j dans le plan π_k polaire de O_j dans C_i.

Nous avons ainsi formé un tétraèdre tel que chaque plan de faces admet comme pôles dans les trois complexes précisément les trois sommets qu'il contient.

La loi de répartition des pôles et des plans polaires donne lieu au schéma suivant :

	O	O_i	O_j	O_k
π	★	C_i	C_j	C_k
π_i	C_i	★	C_k	C_j
π_j	C_j	C_k	★	C_i
π_k	C_k	C_j	C_i	★

Prenons un plan dans la colonne de gauche et un sommet dans la ligne du haut : par exemple π_i et O_j, à l'intersection de la ligne π_i et de la colonne O_j se trouve C_k ; c'est le complexe par rapport auquel π_i et O_j sont conjugués.

Si j'avais pris π_i et O_i, je serais tombé sur une case vide ; c'est qu'en effet O_i est le sommet opposé à π_i, et, par suite, ce point et ce plan ne peuvent être conjugués dans aucun complexe.

Soient Δ_{ij}, Δ_{ji} les directrices de la congruence C_{ij} commune aux complexes C_i et C_j. Ces droites coupent OO_k et O_iO_j, car ces dernières droites appartiennent à la fois aux complexes C_i et C_j. Mais il y a plus : puisque O_i et O_j sont les pôles d'un même plan π dans les complexes C_i et C_j respectivement, on voit que le segment O_iO_j est divisé harmoniquement par les droites Δ_{ij}, Δ_{ji}, en vertu des propriétés déjà démontrées des complexes en involution.

Or envisageons la demi-quadrique

$$Q_{ijk}.$$

commune aux complexes C_i, C_j, C_k ; la demi-quadrique complémentaire contient évidemment Δ_{ij}, Δ_{ji} ; donc les points où la droite O_iO_j coupe Δ_{ij}, Δ_{ji} sont aussi ceux où elle coupe la quadrique qui porte la demi-quadrique Q_{ijk}. En conséquence, O_i et O_j sont conjugués par rapport à cette quadrique. Le même raisonnement s'applique aux autres arêtes du tétraèdre. On voit donc que :

Le tétraèdre $OO_iO_jO_k$ est conjugué par rapport à la quadrique qui porte la demi-quadrique Q_{ijk}.

Prenons, par exemple, le tétraèdre

$$T(ij,\ kl,\ mn)$$

et une des quatre quadriques fondamentales déjà considérées

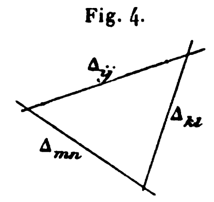
$$(Q_{ikm},\ Q_{jln}).$$

Le tétraèdre $T(ij, kl, mn)$ est tel que les plans de ses faces ont pour pôles, par rapport aux complexes C_i, C_k, C_m, les trois sommets situés dans chacun de ces plans.

Admettons, en effet, que Δ_{ij}, Δ_{kl}, Δ_{mn} forment un triangle ; appelons π le plan de ce triangle, toute droite issue du point $(\Delta_{ij}, \Delta_{kl})$ (intersection de Δ_{ij} et Δ_{kl}) et tracée dans le plan π, coupe Δ_{mn} et Δ_{nm} ; elle appartient donc à C_{mn} et, par suite, à C_m. Ainsi, le point $(\Delta_{ij}, \Delta_{kl})$ est le pôle de π dans C_m ; de même le point $(\Delta_{ij}, \Delta_{mn})$ est le pôle de π dans C_k, et enfin $(\Delta_{mn}, \Delta_{kl})$ est le pôle de π dans C_i. Le tétraèdre $T(ij, kl, mn)$ est donc bien dans le cas du tétraèdre

$OO_iO_jO_k$ de tout à l'heure, il est donc conjugué par rapport à la quadrique qui porte Q_{ikm} et Q_{jln}.

Fig. 4.



Nous compléterons ce qui concerne l'ensemble de ces quatre quadriques, qui admettent comme conjugué le tétraèdre $T(ij, kl, mn)$ en prouvant à leur égard une propriété intéressante.

Chacune de ces quadriques est à elle-même sa propre polaire réciproque par rapport à une quelconque des trois autres.

On observe d'abord que ces quatre quadriques se coupent deux à deux suivant quatre droites. Prenons-en deux quelconques

$$(Q_{ikm}, \quad Q_{jln}),$$
$$(Q_{ilm}, \quad Q_{jkn});$$

elles se coupent suivant les directrices de C_{im} et de C_{jn}, qui forment un tétraèdre avec Δ_{kl} et Δ_{lk}.

Donc Δ_{kl} et Δ_{lk} coupent ces deux quadriques aux mêmes points. Prenons alors une des quatre autres arêtes du tétraèdre $T(ij, kl, mn)$, par exemple Δ_{ij}, les deux segments que ces deux quadriques déterminent sur Δ_{ij} sont ceux qu'y déterminent les directrices des congruences C_{km} et C_{kn}; d'après la remarque qui termine le n° 79, ces deux couples de points sont en relation harmonique.

Voilà donc deux quadriques Q, Q′ qui ont un tétraèdre conjugué commun $T(ij, kl, mn)$, qui se coupent suivant quatre droites formant un quadrilatère gauche dont Δ_{kl}, Δ_{lk} sont les diagonales et qui, enfin, déterminent sur les quatre autres arêtes du tétraèdre envisagé, des couples de segments en relation harmonique.

Rapportée au tétraèdre conjugué commun, l'équation de Q sera

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2 = 0,$$

et si $X = 0$, $Y = 0$ sont les équations de Δ_{kl}, celles de Δ_{lk} seront

$$Z = 0, \qquad T = 0.$$

Les propriétés harmoniques démontrées prouvent alors que Q′ aura une équation de la forme

$$X^2 + Y^2 - Z^2 - T^2 = 0,$$

et l'on reconnaît aussi sans peine que les deux quadriques sont leurs propres polaires réciproques l'une par rapport à l'autre.

41. Pour nous représenter plus complètement la configuration des droites Δ_{ij}, on peut introduire un symbole qui met en évidence une intéressante correspondance entre les propriétés de cette configuration et celles des permutations de six lettres.

Trois droites Δ_{ij}, Δ_{kl}, Δ_{mn} sans indice commun forment toujours un hyperfaisceau ([illegible] ou triangle).

Je représente cet hyperfaisceau par la notation

$$ij.\ kl.\ mn$$

Il y a autant de symboles de cette forme qu'il y a de permutations de six lettres; soit 720. Mais j'observe qu'on peut permuter les couples d'indices ij, kl, mn sans que le symbole cesse de s'appliquer à l'ensemble des trois droites Δ_{ij}, Δ_{kl}, Δ_{mn} : les six permutations

$$ij.\ kl.\ mn,\quad kl.\ ij.\ mn,\quad mn.\ kl.\ ij,$$
$$ij.\ mn.\ kl,\quad mn.\ ij.\ kl,\quad kl.\ mn.\ ij$$

s'appliquent aux trois mêmes droites. Nous n'avons donc, en réalité, que $\frac{720}{6} = 120$ hyperfaisceaux. Soixante sont des gerbes (sommets de tétraèdres fondamentaux), Soixante sont des plans (faces du tétraèdre).

Il s'agit d'établir une règle pour distinguer.

Il résulte d'abord de ce qui a été dit au n° 79 que, si dans le symbole

$$ij.\ kl.\ mn$$

on permute i et j, ou bien k et l, ou bien m et n, la nature de l'hyperfaisceau change.

On peut même ajouter que, en effectuant plusieurs fois ces permutations, on obtient huit hyperfaisceaux, dont quatre sont les sommets du tétraèdre fondamental

$$T(ij.\ kl.\ mn)$$

et les quatre autres les faces de ce même tétraèdre.

J'ajoute maintenant que, *quels que soient* les deux indices que l'on permute dans le symbole $(ij,\ kl.\ mn)$, l'hyperfaisceau qu'il représente change *toujours* de nature.

Comme la permutation de deux indices quelconques résulte d'un nombre impair de permutations d'indices successifs (*voir* la théorie des déterminants),

et que le fait est déjà établi pour les deux indices d'un même couple ij, kl, mn, il suffit d'établir qu'il est vrai pour deux indices consécutifs de deux couples différents, par exemple, pour m et l.

Considérons donc l'hyperfaisceau

$$(ij,\ km,\ ln)$$

et établissons qu'il est d'espèce différente de celle de l'hyperfaisceau primitif

$$(ij,\ kl,\ mn).$$

Cherchons pour cela si ces hyperfaisceaux ont des droites communes.

L'hyperfaisceau (ij, kl, mn) est formé des droites qui coupent Δ_{ij}, Δ_{kl}, Δ_{mn}, les droites de cet hyperfaisceau vérifient donc les équations

$$\begin{aligned} Z_{ij} &= x_i\sqrt{-1}+x_j = 0, \\ Z_{kl} &= x_k\sqrt{-1}+x_l = 0, \\ Z_{mn} &= x_m\sqrt{-1}+x_n = 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(8) \qquad \frac{x_i}{\sqrt{-1}} = x_j, \qquad \frac{x_k}{\sqrt{-1}} = x_l, \qquad \frac{x_m}{\sqrt{-1}} = x_n.$$

Pareillement, l'hyperfaisceau (ij, km, ln) est défini par les équations

$$(9) \qquad \frac{x_i}{\sqrt{-1}} = x_j, \qquad \frac{x_k}{\sqrt{-1}} = x_m, \qquad \frac{x_l}{\sqrt{-1}} = x_n.$$

L'ensemble des équations (8) et (9) se réduit à

$$(10) \qquad \frac{x_i}{\sqrt{-1}} = \frac{x_j}{1}, \qquad \frac{x_k}{-1} = \frac{x_l}{\sqrt{-1}} = \frac{x_m}{\sqrt{-1}} = \frac{x_n}{1}.$$

Le rapport $\frac{x_j}{x_i}$ est déterminé, de même que les rapports $\frac{x_l}{x_n}$, $\frac{x_m}{x_n}$, $\frac{x_n}{x_k}$, mais le rapport $\frac{x_k}{x_i}$ demeure arbitraire. Nos deux hyperfaisceaux ont, dès lors, en commun un faisceau plan de droites; cela exige évidemment qu'ils soient d'espèces contraires, et même, de plus, il faut que ces hyperfaisceaux soient *unis*, c'est-à-dire que celui qui est une gerbe ait son sommet dans le plan de celui qui consiste en un système plan de droites. Donc on peut affirmer que si, dans le symbole

$$(ij,\ kl,\ mn),$$

on permute deux indices consécutifs *quelconques*, l'hyperfaisceau qu'il représente change d'espèce.

et l'on reconnaît bien ainsi que les de
réciproques l'une par rapport à l'autre

81. Pour nous représenter plus co
on peut introduire un symbole qui n
dance entre les propriétés de cette c
lettres.

Trois droites Δ_{ij}, Δ_{kl}, Δ_{mn} sans
faisceau (trièdre ou triangle).

Je représente cet hyperfaisceau p

Il y a autant de symboles de
lettres; soit 720. Mais j'observe c
mn sans que le symbole cesse de
Δ_{kl}, Δ_{mn} : les six permutations

$$(ij, kl, mn)$$
$$(ij, mn, kl)$$

s'appliquent aux trois même
$\frac{720}{6} = 120$ hyperfaisceaux. Soi
damentaux). Soixante sont de

Il s'agit d'établir une règle

Il résulte d'abord de ce q

on permute *i* et *j*, ou bien
change.

On peut même ajouter
obtient huit hyperfaisceau
mental

et les quatre autres les fa

J'ajoute maintenant qu
dans le symbole (*ij*, *kl*,
de nature.

Comme la permut
impair de permutatior

La droite Δ_{ij} coupe cette quadrique Q en deux points qui sont précisément les deux sommets de $T(ij, km, ln)$ portés par Δ_{ij}; ces points divisent donc harmoniquement l'arête Δ_{ij} du premier tétraèdre $T(ij, kl, mn)$.

On démontrera de même que les trois couples de face des trois tétraèdres

$$T(ij, kl, mn), \quad T(ij, km, ln), \quad T(ij, kn, lm)$$

qui passent par Δ_{ij} se divisent harmoniquement.

Supposons que les droites Δ_{ij}, Δ_{kl}, Δ_{mn} forment un trièdre; nous appellerons O leur point de concours. Le trièdre de ces droites appartient au tétraèdre $T(ij, kl, mn)$. Par l'arête Δ_{ij} passent, outre les faces de ce tétraèdre, un couple de faces du tétraèdre $T(ij, km, ln)$ et un couple de faces du tétraèdre $T(ij, kn, lm)$.

Les symboles de ces faces sont aisés à former.

Soit d'abord

$$(ij, kl, mn)$$

le symbole du trièdre des droites Δ_{ij}, Δ_{kl}, Δ_{mn}, les symboles

$$(ij, km, ln),$$
$$(ij, mk, nl)$$

sont ceux des deux faces du tétraèdre $T(ij, km, ln)$, qui contiennent Δ_{ij}; pareillement,

$$(ij, kn, ml),$$
$$(ij, nk, lm)$$

sont les symboles des deux faces du tétraèdre $T(ij, kn, ml)$, qui contiennent Δ_{ij}.

La règle de la parité des permutations, donnée au numéro précédent, permet de former sans hésitation ces quatre symboles.

Nous aurons de même, relativement à Δ_{kl},

$$\left.\begin{matrix}(kl, im, jn)\\(kl, mi, nj)\end{matrix}\right\} \text{ faces de } T(kl, im, jn) \text{ menées par } \Delta_{kl},$$

$$\left.\begin{matrix}(kl, in, mj)\\(kl, ni, jm)\end{matrix}\right\} \text{ faces de } T(kl, in, mj) \text{ menées par } \Delta_{kl};$$

et enfin, relativement à Δ_{mn},

$$\left.\begin{matrix}(mn, ki, lj)\\(mn, ik, jl)\end{matrix}\right\} \text{ faces de } T(mn, ki, lj) \text{ menées par } \Delta_{mn}.$$

$$\left.\begin{matrix}(mn, kj, il)\\(mn, jk, li)\end{matrix}\right\} \text{ faces de } T(mn, kj, il) \text{ menées par } \Delta_{mn}.$$

Nous voyons ainsi que, par tout sommet O d'un tétraèdre fondamental T (ij, kl, mn), il passe, outre les trois faces de ce tétraèdre, douze des faces de six autres tétraèdres fondamentaux, ayant chacun avec le tétraèdre proposé un couple d'arêtes opposées commun.

J'ajoute que *ces douze faces se coupent suivant seize droites* issues de O; c'est-à-dire que tout plan parmi les quatre menés par Δ_{ij}, et tout plan parmi les quatre menés par Δ_{kl}, se coupent dans l'un des quatre plans menés par Δ_{mn}.

Prenons, par exemple, la face

$$(ij, km, ln)$$

menée par Δ_{ij}, et associons-la aux quatre qui sont menées par Δ_{kl}.

Nous pourrons former les quatre groupes :

$$\text{I.}\qquad \left\{\begin{array}{l}(ij, km, ln),\\ (kl, im, jn),\\ (mn, kj, il);\end{array}\right.$$

$$\text{II.}\qquad \left\{\begin{array}{l}(ij, km, ln),\\ (kl, nj, mi),\\ (mn, li, jk);\end{array}\right.$$

$$\text{III.}\qquad \left\{\begin{array}{l}(ij, km, ln),\\ (kl, mj, in),\\ (mn, lj, ki);\end{array}\right.$$

$$\text{IV.}\qquad \left\{\begin{array}{l}(ij, km, ln),\\ (kl, ni, jm),\\ (mn, ik, jl).\end{array}\right.$$

Dans ces groupes, le premier plan est toujours celui de la face (ij, km, ln) menée par Δ_{ij}; le second plan est l'un des quatre menés par Δ_{kl}; quant au troisième plan de chaque groupe, c'est l'un des quatre menés par Δ_{mn}; dans chaque groupe, ce troisième plan dépend des trois premiers.

Il est aisé de constater que les trois plans d'un même couple ont en commun une droite; voici la représentation de ces droites pour chacun des quatre triples de faces ci-dessus :

$$\text{I}\qquad \frac{x_i}{-1} = \frac{x_j}{\lambda-1} = \frac{x_k}{-1} = \frac{x_l}{\lambda-1} = \frac{x_m}{\lambda-1} = \frac{x_n}{1},$$

$$\text{II}\qquad \frac{x_i}{-1} = \frac{x_j}{-\lambda-1} = \frac{x_k}{-1} = \frac{x_l}{\lambda-1} = \frac{x_m}{\lambda-1} = \frac{x_n}{1},$$

III. $$\frac{x_i}{\sqrt{-1}} = \frac{x_j}{1} = \frac{x_k}{-1} = \frac{x_l}{\sqrt{-1}} = \frac{x_m}{\sqrt{-1}} = \frac{x_n}{1},$$

IV. $$\frac{x_i}{-\sqrt{-1}} = \frac{x_j}{-1} = \frac{x_k}{-1} = \frac{x_l}{\sqrt{-1}} = \frac{x_m}{\sqrt{-1}} = \frac{x_n}{1}.$$

Nous avons de la sorte quatre droites sur la face (ij, km, ln) menée par Δ_{ij}, et, par suite, il y a bien autour de O seize de ces droites.

On peut donner un procédé régulier de formation des coordonnées de ces droites.

Observons que, faisant partie de la gerbe

$$(ij,\ kl,\ mn),$$

ces seize droites vérifient forcément les équations

$$\frac{x_i}{\sqrt{-1}} = \frac{x_j}{1}, \qquad \frac{x_k}{\sqrt{-1}} = \frac{x_l}{1}, \qquad \frac{x_m}{\sqrt{-1}} = \frac{x_n}{1},$$

qu'on peut écrire couramment à la simple lecture du symbole $(ij,\ kl,\ mn)$.

Chacune des droites de la gerbe sera donc définie par un système de valeurs des deux rapports

$$\frac{x_j}{x_n}, \quad \frac{x_l}{x_n}.$$

Or ces rapports ne peuvent être que $+1$, -1, $\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$; car, dans tous les hyperfaisceaux que nous considérons, les équations que nous aurons à écrire seront toujours de la forme

$$x_\alpha = \varepsilon . x_\beta,$$

où ε égale l'une des quatre quantités ci-dessus, et, comme la multiplication ou la division ne fait que permuter ces quantités, on voit bien que

$$\frac{x_j}{x_n}, \quad \frac{x_l}{x_n}$$

ne pourront être que $+1$, -1, $\sqrt{-1}$ ou $-\sqrt{-1}$.

Cela nous donne donc seize combinaisons possibles, et, comme il nous faut seize droites, ces seize combinaisons seront toutes réalisables.

De la sorte, on obtient les seize droites de la gerbe en prenant $x_1, x_2, \ldots, x_6$ proportionnelles de toutes les façons possibles à $+1$, -1, $\sqrt{-1}$ ou $-\sqrt{-1}$, *de telle sorte cependant que les équations de la gerbe soient* SAUVEGARDÉES,

$$\frac{x_i}{\sqrt{-1}} = \frac{x_j}{1}, \qquad \frac{x_k}{\sqrt{-1}} = \frac{x_l}{1}, \qquad \frac{x_m}{\sqrt{-1}} = \frac{x_n}{1}.$$

On observe que, pour les quatre droites situées dans *un même* plan mené par Δ_{ij}, les rapports des coordonnées x_k, x_l, x_m, x_n sont les mêmes.

J'appellerai Ξ les droites que nous venons de définir.

Nous aurons un résultat analogue si le symbole

$$(ij,\ kl,\ mn)$$

convient à un système plan. Il y aura douze sommets de tétraèdres fondamentaux situés dans ce plan, en outre des trois sommets de la face, et ces sommets seront distribués par quatre sur les côtés de cette face; ils seront, de plus, par groupes de trois sur seize droites Ξ', dont la représentation analytique est la même que celle des seize droites Ξ.

Mais il y a plus, *ces nouvelles droites Ξ' que nous venons d'obtenir ne forment pas un ensemble différent de celui formé par les droites Ξ.*

Considérons, par exemple, la droite commune aux trois systèmes plans

$$(ij,\ km,\ ln),$$
$$(kl,\ im,\ jn),$$
$$(mn,\ kj,\ il),$$

laquelle a pour coordonnées

$$\frac{x_i}{-1} = \frac{x_j}{\sqrt{-1}} = \frac{x_k}{-1} = \frac{x_l}{\sqrt{-1}} = \frac{x_m}{\sqrt{-1}} = \frac{x_n}{1};$$

elle passe déjà par le sommet de la gerbe

$$(ij,\ kl,\ mn);$$

on constate qu'elle fait aussi partie des gerbes

$$(il,\ km,\ jn),$$
$$(im,\ kj,\ ln).$$

Ainsi, toute droite Ξ qui est commune à trois plans de faces sert de jonction à trois sommets ([1]).

Le nombre de ces droites est, dès lors, très facile à évaluer. Il y a 60 sommets qui portent chacun 16 droites Ξ; mais comme, d'après ce dénombrement, chaque droite est comptée trois fois puisque chacune contient trois sommets, il

([1]) On entrevoit la possibilité d'établir une correspondance complète entre les groupes de permutations de six lettres et les propriétés de la configuration du système fondamental. Je me contenterai ici de ces indications générales, me réservant de développer plus à fond ces remarques nouvelles dans un écrit particulier.

y aura

$$\frac{60 \cdot 16}{3} = 320$$

droites Ξ.

83. On peut joindre deux à deux 60 points d'un nombre de manières égal à

$$\frac{60 \cdot 59}{2} = 1770.$$

Mais chacune des droites Ξ représente à elle seule 3 droites de jonction des sommets deux à deux, soit 960 droites.

Il reste donc $1770 - 960 = 810$ droites de jonction deux à deux.

Or, prenons les arêtes Δ_{ij}; il y a sur chacune six sommets de tétraèdres; chacune représente donc un nombre de droites de jonction deux à deux égal à

$$\frac{5 \cdot 6}{2} = 15,$$

et, comme il y a 30 de ces arêtes, cela nous fait $30 \times 15 = 450$ droites de jonction. Il en reste donc

$$810 - 450 = 360,$$

qui ne sont pas des arêtes, ni des droites Ξ et qui joignent les sommets deux à deux.

Il est aisé de voir comment on obtiendra ces 360 droites nouvelles, que je désigne par Ξ_0.

Prenons le sommet (ij, kl, mn), qui est à la rencontre des droites $\Delta_{ij}, \Delta_{kl}, \Delta_{mn}$.

Il y a six tétraèdres

$$\begin{array}{ll} T(ij, km, ln), & T(ij, kn, lm), \\ T(kl, im, jn), & T(kl, in, jm), \\ T(mn, ik, jl), & T(mn, il, jk), \end{array}$$

qui ont, avec le tétraèdre $T(ij, kl, mn)$, chacun un couple d'arêtes communes.

Les deux premiers ont chacun deux sommets sur Δ_{ji}, ce qui fait quatre, et de même les deux seconds en donneront quatre sur Δ_{lk} et les deux derniers quatre autres sur Δ_{nm}. En tout, $3 \times 4 = 12$ points.

Cela posé, joignons le sommet

$$(ij, kl, mn)$$

du tétraèdre $T(ij, kl, mn)$ à ces douze sommets.

Nous aurons ainsi douze droites Ξ_0, et nous les aurons toutes de cette manière, car le nombre des droites ainsi obtenu est exactement égal à

$$\frac{60 \times 12}{2} = 360.$$

On obtient donc les droites Ξ_0 en joignant un sommet d'un tétraèdre $T(ij, kl, mn)$, pris sur une arête Δ_{ij} à un sommet, pris sur l'arête opposée Δ_{ji}, d'un autre tétraèdre fondamental assujetti à avoir Δ_{ij} et Δ_{ji} pour arêtes opposées.

On ne manquera pas d'observer que toute droite Ξ_0 est aussi l'intersection de deux plans de faces des tétraèdres ci-dessus considérés.

Cherchons à représenter les droites Ξ_0. Nous allons, pour cela, prendre un hyperfaisceau

$$(ij,\ kl,\ mn),$$

disons une gerbe pour préciser; prendre sur Δ_{ji} un sommet de l'un des tétraèdres $T(ij, kn, lm)$, $T(ij, km, ln)$ et joindre au sommet de la gerbe proposée.

Les gerbes du tétraèdre $T(ij, kn, lm)$, qui contiennent Δ_{ij} sont les deux suivantes :

$$(ji,\ ml,\ kn),$$
$$(ji,\ lm,\ nk);$$

les gerbes du tétraèdre $T(ij, km, ln)$, qui contiennent Δ_{ij}, sont de même

$$(ji,\ km,\ ln),$$
$$(ji,\ mk,\ nl).$$

Des calculs très simples nous donnent : droite commune aux gerbes (ij, kl, mn), (ji, ml, kn)

$$\frac{x_i}{0} = \frac{x_j}{0} = \frac{x_k}{\sqrt{-1}} = \frac{x_l}{1} = \frac{x_m}{\sqrt{-1}} = \frac{x_n}{1};$$

droite commune aux gerbes (ij, kl, mn), (ji, lm, nk)

$$\frac{x_i}{0} = \frac{x_j}{0} = \frac{x_k}{\sqrt{-1}} = \frac{x_l}{1} = \frac{x_m}{-\sqrt{-1}} = \frac{x_n}{-1};$$

droite commune aux gerbes (ij, kl, mn), (ji, km, ln)

$$\frac{x_i}{0} = \frac{x_j}{0} = \frac{x_k}{\sqrt{-1}} = \frac{x_l}{1} = \frac{x_m}{1} = \frac{x_n}{-\sqrt{-1}};$$

droite commune aux gerbes (ij, kl, mn), (ji, mk, ln)

$$\frac{x_i}{0} = \frac{x_j}{0} = \frac{x_k}{\sqrt{-1}} = \frac{x_l}{1} = \frac{x_m}{-1} = \frac{x_n}{\sqrt{-1}}.$$

On voit aisément que toutes les droites Ξ_0 s'obtiendront en annulant deux des coordonnées, et prenant les quatre autres de toutes les façons possibles proportionnelles à l'une des quatre quantités $+1$, -1, $+\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$, de telle

sorte cependant que, si $x_i = 0$, $x_j = 0$, on ait deux relations de la forme

$$\frac{x_k}{\sqrt{-1}} = x_l, \qquad \frac{x_m}{\sqrt{-1}} = x_n.$$

81. Nous ne quitterons pas ce sujet sans mettre en évidence une propriété fort curieuse des tétraèdres fondamentaux.

Prenons un sommet (ij, kl, mn) du tétraèdre $T(ij, kl, mn)$. Il y a huit tétraèdres qui n'ont avec lui aucune arête commune. Prenons l'un de ces tétraèdres, par exemple

$$T(ik, jm, ln),$$

et joignons le point (ij, kl, mn) aux sommets de ce tétraèdre; nous aurons ainsi quatre des seize droites Ξ; sur chacune de ces quatre droites il y a donc encore un sommet, ce qui fait quatre sommets; je dis que ces quatre sommets appartiennent à un même tétraèdre fondamental.

Les quatre sommets du tétraèdre $T(ik, jm, ln)$ ont en effet pour symboles

$$(ik, jm, ln), \qquad (ik, mj, nl),$$
$$(ki, mj, ln), \qquad (ki, jm, nl).$$

Or on constate aisément que les trois points

$$(ij, kl, mn), \qquad (ik, jm, ln), \qquad (km, ni, jl)$$

sont en ligne droite; de même les points

$$(ij, kl, mn), \qquad (ik, mj, nl) \quad \text{et} \quad (mk, in, jl),$$
$$(ij, kl, mn), \qquad (ki, mj, ln) \quad \text{et} \quad (km, lj, in),$$
$$(ij, kl, mn), \qquad (ki, jm, nl) \quad \text{et} \quad (mk, ni, lj).$$

On voit bien que les quatre nouveaux points sont les sommets du tétraèdre

$$T(mk, in, lj).$$

Donc : *relativement à chacun des sommets d'un tétraèdre fondamental* $T(ij, kl, mn)$, *les huit tétraèdres fondamentaux qui n'ont avec le précédent aucune arête commune sont deux à deux homologiques.*

De là on peut conclure que trois tétraèdres fondamentaux, qui n'ont en commun aucune arête, forment un système *desmique* de trois tétraèdres, c'est-à-dire que les faces de l'un passent par les seize droites de rencontre des faces des deux autres, et que les sommets de l'un sont sur les seize droites de jonction des sommets des deux autres.

On pourra consulter, au sujet de ces systèmes desmiques, un travail de M. Stéphanos inséré au *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XIV de la collection.

85. Le système fondamental donne lieu à une remarquable correspondance entre les points et les plans de l'espace.

Considérons d'abord un plan π : *les pôles de ce plan dans les six complexes fondamentaux sont sur une même conique.*

En effet, soit O_i le pôle du plan π dans le complexe C_i, et prenons trois de ces points O_1, O_2, O_3. Les complexes C_1, C_2, C_3 permettent, comme on sait, d'associer à ces trois points un quatrième point O tel que le plan OO_2O_3 soit le plan polaire de O dans C_1; OO_3O_1 le plan polaire de O dans C_2; OO_1O_2 le plan polaire de O dans C_3 (*voir* n° 80). Le tétraèdre $OO_1O_2O_3$ est conjugué par rapport à la quadrique Q qui porte la demi-quadrique Q_{123}. Donc le triangle $O_1O_2O_3$ est conjugué par rapport à la conique K trace de Q sur le plan π. Or la quadrique Q porte aussi la demi-quadrique Q_{456}; donc, le triangle $O_4O_5O_6$ est aussi conjugué par rapport à la conique K. Les deux triangles $O_1O_2O_3$ et $O_4O_5O_6$ étant conjugués par rapport à une même conique, leurs sommets sont sur une même conique.

On peut même ajouter que leurs côtés touchent une même conique.

Pareillement : Si l'on distribue en deux trièdres les plans polaires π_1, π_2, π_3, π_4, π_5, π_6 d'un même point O dans les six complexes fondamentaux, les deux trièdres sont conjugués par rapport à un même cône du second degré; leurs arêtes sont sur un même cône du second degré et *leurs faces touchent un troisième cône de second degré.*

86. Conservons les notations précédentes.

Le point O_i et le point O_j étant les pôles d'un même plan π dans C_i et C_j respectivement, le point O_j et le point O_i sont aussi les pôles d'un même plan π_{ij} par rapport à C_i et à C_j. Ce plan π_{ij} passe par la droite O_iO_j; il y a quinze plans π_{ij}.

Prenons les trois plans

$$\pi_{ij}, \quad \pi_{jk}, \quad \pi_{ki}:$$

le point O_{ijk} où ils se coupent est celui que nous avons considéré plus haut et qui est le pôle

de π_{ij} dans C_k)
» π_{jk} » C_i,
» π_{ki} » C_j.

Prenons maintenant les trois autres indices l, m, n. Nous aurons de même trois plans π_{lm}, π_{mn}, π_{nl} se coupant en un point O_{lmn}.

Mais il est clair que O_{ijk} et O_{lmn} coïncident. Nous savons, en effet, que les

tétraèdres $O_{ijk}O_iO_jO_k$, $O_{lmn}O_lO_mO_n$ sont conjugués par rapport à la quadrique Q, qui contient les demi-quadriques complémentaires Q_{ijk}, Q_{lmn}. Donc O_{ijk} et O_{lmn} sont les pôles d'un même plan π par rapport à Q.

Il y a $\frac{6.5.4}{1.2.3} = 20$ combinaisons d'indices trois à trois, et, par suite, il y a vingt tétraèdres

$$O_{ijk}O_iO_jO_k,$$

mais il n'y a que dix points O_{ijk}, puisque O_{ijk} *est identique à* O_{lmn}.

D'après cela, on voit que le point $(O_{ijk} = O_{lmn})$ est le pôle

du plan	π_{jk}	dans	C_i,
»	π_{ki}	»	C_j,
»	π_{ij}	»	C_k,
»	π_{mn}	»	C_l,
»	π_{nl}	»	C_m,
»	π_{lm}	»	C_n.

Nous avons, en résumé, une configuration de seize points

$$O_1,\quad O_2,\quad O_3,\quad O_4,\quad O_5,\quad O_6\quad (O_{123} = O_{456}),\quad (O_{134} = O_{246})\quad (O_{124} = O_{356}),\quad \ldots,$$

et de seize plans

$$\pi,\quad \pi_{12},\quad \pi_{13},\quad \pi_{14},\quad \ldots$$

tels que les pôles des seize plans dans les six complexes fondamentaux font partie des seize points, et que les plans polaires des seize points font partie des seize plans.

Chacun des seize plans contient ainsi six des seize points, et par chacun des seize points passent six des seize plans.

Si l'on prend les pôles de l'un des seize plans par rapport aux dix quadriques fondamentales, on obtient les dix points du système non situés dans ce plan, et si l'on prend les plans polaires d'un des seize points par rapport aux quadriques fondamentales, on obtient les dix plans du système qui ne passent pas par ce point.

87. On peut rattacher cette configuration remarquable à une importante correspondance à laquelle donne lieu le système fondamental.

Nous venons de voir que tout plan π se trouve faire partie d'une configuration de seize plans et de seize points qu'il définit complètement. Nous pouvons dire, en conséquence, que la connaissance d'une gerbe définit une configuration de seize gerbes et de seize systèmes plans dont fait partie la gerbe proposée.

Plus généralement : tout hyperfaisceau fait partie d'une configuration de

trente-deux hyperfaisceaux, dont seize sont des gerbes et seize sont des systèmes plans.

Soit une droite $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$; en désignant par $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_6$ le symbole $+1$ ou le symbole -1, les expressions

$$\varepsilon_1 x_1, \quad \varepsilon_2 x_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_6 x_6$$

sont les coordonnées de $2^5 = 32$ droites, parmi lesquelles les droites $x_1, x_2, \ldots, x_6$, et qui forment avec elle une configuration spéciale. D'abord, deux droites de la configuration ne se coupent *généralement* pas, car

$$\varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \ldots + \varepsilon_6 x_6^2$$

ne peut être une conséquence de $x_1^2 + \ldots + x_6^2 = 0$, que si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_6$, auquel cas les deux droites ne sont pas distinctes.

Il saute aux yeux que, si la droite $x_1, x_2, \ldots, x_6$ engendre un hyperfaisceau

$$x_i = a_i \lambda + b_i \mu + c_i \nu,$$

il en est de même des trente et une autres droites de la configuration. On a, pour ces droites

$$x'_i = \varepsilon_i (a_i \lambda' + b_i \mu' + c_i \nu').$$

Les hyperfaisceaux sont-ils de même nature?

Supposons que le nombre des ε positifs soit pair, par exemple 2μ, il y en aura $6 - 2\mu$ négatifs; on peut toujours, grâce à un changement de tous les signes, supposer $2\mu = 4$, car si $2\mu = 2$, on a $6 - 2\mu = 4$.

Soit donc

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_1 \lambda' + b_1 \mu' + c_1 \nu', \\ x'_2 &= a_2 \lambda' + b_2 \mu' + c_2 \nu', \\ x'_3 &= a_3 \lambda' + b_3 \mu' + c_3 \nu', \\ x'_4 &= a_4 \lambda' + b_4 \mu' + c_4 \nu', \\ -x'_5 &= a_5 \lambda' + b_5 \mu' + c_5 \nu', \\ -x'_6 &= a_6 \lambda' + b_6 \mu' + c_6 \nu'. \end{aligned}$$

Si l'on écrit que

$$x_1 = x'_1, \qquad x_2 = x'_2, \qquad x_3 = x'_3, \qquad x_4 = x'_4, \qquad x_5 = x'_5, \qquad x_6 = x'_6,$$

on trouve

$$\begin{aligned} a_1(\lambda - \lambda') + b_1(\mu - \mu') + c_1(\nu - \nu') &= 0, \\ a_2(\lambda - \lambda') + b_2(\mu - \mu') + c_2(\nu - \nu') &= 0, \\ a_3(\lambda - \lambda') + b_3(\mu - \mu') + c_3(\nu - \nu') &= 0, \\ a_4(\lambda - \lambda') + b_4(\mu - \mu') + c_4(\nu - \nu') &= 0, \\ a_5(\lambda + \lambda') + b_5(\mu + \mu') + c_5(\nu + \nu') &= 0, \\ a_6(\lambda + \lambda') + b_6(\mu + \mu') + c_6(\nu + \nu') &= 0. \end{aligned}$$

Les quatre premières équations exigent que

$$\lambda - \lambda' = \mu - \mu' = \nu - \nu' = 0,$$

et les deux autres donnent

$$a_5\lambda + b_5\mu + c_5\nu = 0,$$
$$a_6\lambda + b_6\mu + c_6\nu = 0,$$

pour déterminer $\lambda:\mu:\nu$. Les deux hyperfaisceaux ont, dans ce cas, une droite commune. Ils sont de même espèce.

S'il y a, au contraire, un nombre impair de quantités ε égales à $+1$, on peut toujours supposer qu'il y en ait cinq ou trois. S'il y en a trois, au lieu des six équations ci-dessus, on aura le système

$$a_1(\lambda - \lambda') + b_1(\mu - \mu') + c_1(\nu - \nu') = 0,$$
$$a_2(\lambda - \lambda') + b_2(\mu - \mu') + c_2(\nu - \nu') = 0,$$
$$a_3(\lambda - \lambda') + b_3(\mu - \mu') + c_3(\nu - \nu') = 0,$$
$$a_4(\lambda + \lambda') + b_4(\mu + \mu') + c_4(\nu + \nu') = 0,$$
$$a_5(\lambda + \lambda') + b_5(\mu + \mu') + c_5(\nu + \nu') = 0,$$
$$a_6(\lambda + \lambda') + b_6(\mu + \mu') + c_6(\nu + \nu') = 0,$$

et il y aura impossibilité de l'existence d'une droite commune, car les trois premières équations donnent

$$\lambda - \lambda' = \mu - \mu' = \nu - \nu' = 0,$$

et les autres

$$\lambda + \lambda' = \mu + \mu' = \nu + \nu' = 0,$$

d'où

$$\lambda = \lambda' = \mu = \mu' = \mu' = \nu' = 0.$$

Les hyperfaisceaux seront donc d'espèces différentes.

Enfin, s'il n'y a qu'un seul ε négatif, on aura cinq équations de la forme

$$a_i(\lambda - \lambda') + b_i(\mu - \mu') + c_i(\nu - \nu') = 0,$$

qui donneront

$$\lambda = \lambda', \qquad \mu = \mu', \qquad \nu = \nu',$$

et ensuite une équation unique de la forme

$$a_j\lambda + b_j\mu + c_j\nu = 0.$$

Les hyperfaisceaux auront donc, en commun, dans ce cas, un faisceau plan de droites. Ils seront encore d'espèces différentes, mais, de plus, ils seront *unis*

L'équation unique

$$a_j\lambda + b_j\mu + c_j\nu = 0$$

exprime que $x_j = 0$, c'est-à-dire que le faisceau commun à nos deux hyperfaisceaux est un faisceau du complexe C_j.

Il est dès lors facile de retrouver les résultats précédemment obtenus.

Supposons que la droite $x_1, x_2, \ldots, x_6$ engendre, pour fixer les idées, un système plan π, les trente et une autres droites

$$\varepsilon_1 x_1, \quad \varepsilon_2 x_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_6 x_6$$

vont engendrer des hyperfaisceaux.

Les quinze pour lesquelles il y a un nombre pair d'ε positifs engendreront encore des systèmes plans. Les seize autres engendreront des gerbes et sur ces gerbes il y en aura six ayant un seul ε négatif et dont les six sommets $O_1, O_2, \ldots, O_6$ seront dans le plan π. Les droites du faisceau plan (π, O_i) appartiennent au complexe C_i; et O_i est ainsi le pôle du plan π dans le complexe C_i. On voit comment nous retrouverons la configuration déjà décrite des seize points et des seize plans.

Nous aurons occasion de revenir sur ces questions à propos de la théorie des complexes du second degré et des surfaces de Kummer.

88. Nous avons eu à nous occuper, au point de vue de la transformation des coordonnées, de celles de ces transformations qui conservent son type à la forme fondamentale, ou, comme on dit, la font revenir sur elle-même. Au lieu de se placer au point de vue de la transformation des coordonnées, on peut se proposer un autre problème que je vais traiter.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_6$ des coordonnées linéaires de droites, c'est-à-dire se déduisant linéairement de coordonnées tétraédriques quelconques, comme nous avons vu, et soit

$$\omega(x)$$

la forme linéaire correspondante.

Il existe des transformations linéaires

$$(11) \qquad x'_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{i6}x_6,$$

qui conservent à la forme fondamentale son expression, en sorte que, en vertu des équations (11), on a

$$(12) \qquad \omega(x) = \omega(x').$$

Ces transformations peuvent être considérées comme faisant correspondre à une droite dans le système des coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_6$ une autre droite x' *dans le même système* de coordonnées, puisque les coordonnées x'_i annulent la même forme que les x_i.

Quelle est la nature de cette transformation?

Si x décrit un faisceau plan, on a

$$x_i = a_i \lambda + b_i \mu,$$

et, par suite, eu égard à la forme linéaire des x'_i exprimés en fonction des x_i, on a aussi

$$x'_i = a'_i \lambda + b'_i \mu.$$

La droite x' décrit donc aussi un faisceau plan.

Même démonstration pour l'hyperfaisceau. Si x décrit un hyperfaisceau, x' en décrit un autre.

Mais ici surgit une distinction capitale.

Les hyperfaisceaux engendrés par x et par x' peuvent être de même nom (gerbe et gerbe ou plan et plan); ou bien peuvent être de noms contraires (gerbe et plan ou plan et gerbe).

Dans le premier cas, à toutes les droites x, issues d'un point P, correspondent toutes celles x' issues d'un point P'. A toutes les droites x d'un plan π correspondent toutes celles x' d'un plan π'. De plus, si P est dans le plan π, P' est dans le plan π', car au faisceau plan (P, π) correspond le faisceau plan (P', π'). A tous ces caractères, on reconnaît une transformation homographique de l'espace.

Dans le second cas, à toutes les droites issues d'un point P correspondront celles d'un plan π', et à toutes celles d'un plan π correspondront celles issues d'un point P'. De plus, si le plan π et le point P sont unis, le plan π' et le point P' le sont aussi, à cause encore de la conservation des faisceaux.

La transformation consiste ainsi en une correspondance *dualistique* entre les figures lieux de droites x et les figures lieux de droites x'.

La réponse à notre problème est donc la suivante :

Si les équations de transformation linéaire

$$x'_i = a_{i1} x_1 + \ldots + a_{i6} x_6 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6)$$

donnent

$$\omega(x) = \omega(x'),$$

elles établissent entre les droites x et x' soit une correspondance homographique, soit une correspondance dualistique.

89. Cette remarque a été pour M. Klein le point de départ d'un curieux rapprochement entre la Géométrie de la droite dans l'espace et celle des propriétés métriques d'un espace à quatre dimensions.

Cette notion d'espaces à plus de trois dimensions a aujourd'hui conquis droit

de cité en Géométrie. Nous ne voulons pas dire par là qu'une étude systématique et complète des espaces à n dimensions puisse offrir un véritable intérêt géométrique : l'intérêt qui s'attacherait à une pareille étude serait tout d'ordre philosophique et spéculatif. Cependant, il est *certaines propriétés* des espaces à n dimensions qui trouvent une interprétation utile dans des figures de la Géométrie ordinaire; grâce à ces propriétés, les faits de la Géométrie d'Euclide peuvent souvent recevoir une forme plus rationnelle, plus lumineuse. A ce point de vue, le langage de la Géométrie à n dimensions peut rendre de signalés services, et ce serait se priver d'un auxiliaire précieux que de le rejeter sans examen. C'est dans ces limites que l'étude de la Géométrie à n dimensions mérite que l'on s'y arrête. On va en trouver un exemple dans la Géométrie de la ligne droite.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$, $(n+1)$ variables homogènes, c'est-à-dire n'intervenant que par leurs rapports. Nous regarderons ces paramètres comme les coordonnées homogènes dans un espace à n dimensions E_n.

Une équation homogène du degré m entre $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ représente un espace du degré m contenu dans l'espace E_n^1, et doué seulement de $n-1$ dimensions; nous représenterons par

$$E_{n-1}^m$$

un tel espace.

En particulier, une relation linéaire représente un espace linéaire

$$E_{n-1}^1$$

à $n-1$ dimensions contenu dans E_n^1.

Si l'on se donne k équations linéaires, c'est-à-dire k espaces E_{n-1}^1, ils ont en commun un espace à $n-k$ dimensions, que nous qualifierons encore de linéaire.

Plus généralement, si l'on se donne k équations entre les x_i, on définit un espace E_{n-k}^{μ} à $(n-k)$ dimensions.

Le degré μ de cet espace se définit comme le nombre des points qu'il a en commun avec un espace linéaire E_k^1 à k dimensions arbitrairement choisi.

Si $\mu = 2$, nous dirons que l'espace est *quadratique*.

Par exemple, une équation du second degré entre $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ définit un espace quadratique à $(n-1)$ dimensions E_{n-1}^2; nous dirons aussi, pour abréger, une quadrique à $(n-1)$ dimensions. L'intersection d'une quadrique à $(n-1)$ dimensions et de $(k-1)$ espaces linéaires à $(n-1)$ dimensions est évidemment un espace quadratique à $(n-k)$ dimensions.

Les espaces quadratiques donnent lieu aux mêmes théories que les quadriques, les cônes et les coniques.

Soit, par exemple, un espace quadratique à $(n-1)$ dimensions, dans l'espace à n dimensions,

$$\varphi(x) = 0,$$

et

$$x_1, \ \ldots, \ x_{n+1}; \qquad y_1, \ y_2, \ \ldots, \ y_{n+1}$$

deux points de l'espace; on dit que ces points sont conjugués si

$$\omega(x \,|\, y) = 0.$$

Le lieu des points x conjugués d'un point fixe y est un espace linéaire à $(n - 1)$ dimensions. Cet espace linéaire généralise la notion du plan polaire ou de la droite polaire pour les quadriques et les coniques.

Soit $\Omega(a)$ la forme adjointe de $\omega(x)$; l'équation

$$\Omega(a) = 0$$

exprime que l'espace linéaire

$$\Sigma\, a_i x_i = 0$$

est tangent (¹) à l'espace quadratique $\omega(x) = 0$; pareillement, l'équation

$$\Omega(a \,|\, b) = 0$$

exprime que les deux espaces linéaires

$$\Sigma\, a_i x_i = 0, \qquad \Sigma\, b_i x_i = 0$$

sont conjugués, c'est-à-dire que chacun contient le pôle de l'autre.

Un espace quadratique à $(n - 1)$ dimensions est le lieu d'une infinité d'espaces linéaires à un nombre moindre de dimensions.

90. La Géométrie des espaces quadratiques a pour nous un intérêt particulier.

Nous avons vu, en effet, que l'on peut définir toute droite de l'espace au moyen de six coordonnées homogènes $x_1, x_2, \ldots, x_6$, liées par une équation du second degré

$$\omega(x) = 0.$$

Si l'on considère, dès lors, les x_i comme les coordonnées d'un point dans un espace E_5^1 à cinq dimensions, l'équation $\omega = 0$ représente dans cet espace un espace quadratique E_4^2 à quatre dimensions. On peut dire ainsi que *la Géométrie de la droite dans l'espace ordinaire est identique à celle d'un point sur une quadrique* E_4^2 *à quatre dimensions contenue dans un espace à cinq dimensions.*

Les droites d'un complexe linéaire

$$\Sigma\, a_i x_i = 0$$

(¹) C'est-à-dire que son pôle est sur la quadrique.

sont représentées par les points d'intersection de l'espace linéaire E_4^1, représenté par cette équation avec la quadrique fondamentale E_4^2. L'équation

$$\Omega(a) = 0,$$

qui exprime que le complexe est spécial, exprime que l'espace E_4^1 est tangent à l'espace quadratique E_4^2.

Si l'on considère deux complexes linéaires

$$\Sigma a_i x_i = 0, \qquad \Sigma a'_i x_i = 0,$$

la condition d'involution

$$\Omega(a \mid a') = 0$$

exprime que les espaces linéaires E_4^1, $E_4'^1$ correspondants sont *conjugués* par rapport à la quadrique fondamentale E_4^2.

La quadrique E_4^2 contient des espaces linéaires à une et à deux dimensions.

Nous savons, en effet, que si x^0 et x^{00} sont deux droites qui se coupent, les expressions

$$(13) \qquad x_i = x_i^0 \lambda + x_i^{00} \mu$$

sont les coordonnées d'une droite du faisceau plan défini par ces deux droites. Il en résulte aussitôt que, lorsque $\lambda : \mu$ varie, on a constamment

$$\omega(x) = \omega(x^0 \lambda + x^{00} \mu) = 0.$$

Or, interprétées dans l'espace à cinq dimensions, les équations (13) représentent un espace linéaire E_4^1 à une dimension contenu dans E_4^2.

Réciproquement, soit E_4^1 un espace linéaire à une dimension contenu dans E_4^2, les coordonnées x_i d'un point de cet espace linéaire seront représentées par des formules telles que (13) où l'on devra avoir

$$\omega(x) = \omega(x^0 \lambda + x^{00} \mu) = 0,$$

quels que soient λ, μ. Dans la Géométrie des droites, nous aurons donc un faisceau plan. On peut dès lors énoncer cette proposition :

Il y a sur E_4^2 *une infinité d'espaces linéaires à une dimension; ces espaces correspondent en Géométrie de droites aux faisceaux plans de l'espace euclidien, en sorte qu'il y a une quintuple infinité de ces espaces linéaires sur* E_4^2.

On verra de la même façon qu'il y a sur E_4^2 une infinité d'espaces linéaires à deux dimensions, qui correspondent aux hyperfaisceaux de la Géométrie linéaire.

Mais il y a deux sortes d'hyperfaisceaux, la gerbe et le système plan. On peut

donc prévoir qu'il y aura sur E_4^2 deux familles distinctes d'espaces linéaires à deux dimensions.

Ce fait, qui est tout à fait analogue à celui du double système de génératrices rectilignes dans les quadriques de l'espace ordinaire, peut être mis directement en évidence. Il offre, comme on va le voir, *une différence essentielle* avec l'exemple auquel je l'ai comparé.

Pour les quadriques ordinaires, deux génératrices rectilignes se coupent toujours si elles sont de systèmes différents, et jamais si elles sont du même système.

C'est l'inverse ici, car deux espaces linéaires E_2^1 de même famille ont toujours un point commun : cela tient à ce que deux gerbes ou bien deux plans ont toujours une droite commune.

Par contre, deux E_2^1 de E_4^2, pris dans les deux familles, ou bien n'ont aucun point commun, ou bien ont en commun un espace E_1^1.

Cela tient à ce qu'une gerbe et un plan n'ont généralement pas de droite commune et que, si cela a lieu, ils ont en commun un faisceau plan de droites.

Un complexe de droites, défini par une équation

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_6) = 0,$$

sera représenté comme la trace sur la quadrique E_4^2 de l'espace E_4 représenté par l'équation $f = 0$.

Nous obtiendrons ainsi sur E_4^2 un espace à trois dimensions E_3.

Pareillement, un espace à deux dimensions E_2, tracé sur E_4^2, représente une congruence, et un espace à une dimension représente une surface réglée.

91. Ce rapprochement entre la Géométrie réglée et celle du point sur une quadrique à quatre dimensions dans un espace à cinq dimensions resterait sans grande utilité si l'on ne le faisait suivre d'une remarque concernant la Géométrie des espaces quadratiques.

Je prendrai d'abord l'exemple d'une quadrique ordinaire dans l'espace ordinaire.

Soit Q une telle quadrique, O un point pris sur elle, π un plan quelconque.

Concevons que l'on fasse correspondre à tout point M du plan un point P de la quadrique, en prenant l'intersection de celle-ci avec la droite OM. Réciproquement, à un point P de la quadrique correspondra un point M et un seul; de part et d'autre la correspondance est *univoque;* c'est ce que l'on exprime en disant que la quadrique est *représentable sur le plan* (¹).

(¹) Pour cette question des surfaces représentables sur le plan, on pourra consulter plusieurs Notes que lui a consacrées M. G. Darboux dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*. Les Travaux originaux de Clebsch ont paru dans les *Mathematische Annalen*. Aujourd'hui très développée, cette théorie mériterait une étude spéciale.

On peut donner une forme analytique concrète à cette représentation et la rattacher à une méthode anciennement imaginée par Chasles pour l'étude des courbes tracées sur les quadriques ([1]).

Soient OG_0, OH_0 les deux génératrices rectilignes de la quadrique issues du point O; par le point P de la quadrique passent deux génératrices, une G de même système que OG_0; la seconde H de même système que OH_0. G coupe OH_0 en un point P', H coupe OG_0 en un point P''. Pour définir la position de P' sur OH_0, on peut prendre le rapport anharmonique qu'il forme avec le point O et deux autres points fixes pris sur OH_0; en sorte que, A', B' désignant ces points fixes, on aura, par exemple,

$$u = \frac{A'O}{P'O} : \frac{A'B'}{P'B'}.$$

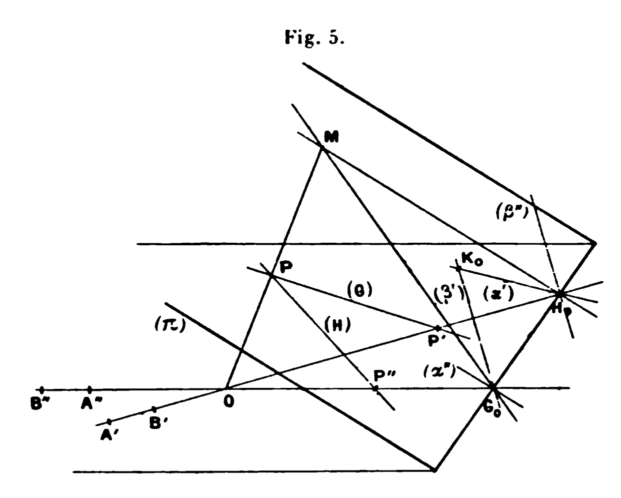
De même, A'', B'' désignant deux points fixes sur OG_0, on définira le point P'' par le paramètre

$$v = \frac{A''O}{P''O} : \frac{A''B''}{P''B''}.$$

Une fois u et v connus, les points P', P'' en résultent, ainsi que le point P et, par conséquent, le point M, dans le plan π.

Appelons G_0, H_0 les traces de OG_0 et OH_0 sur ce plan. La droite G_0M est la

Fig. 5.



trace du plan OG_0M sur le plan π; ce plan OG_0M est évidemment tangent en P'' à la quadrique, et à cause du théorème de Chasles, sur le plan tangent à une surface réglée; le paramètre v est égal au rapport anharmonique

$$v = (G_0\alpha'', G_0M, G_0H_0, G_0\beta'').$$

([1]) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LIII.

où $G_0\alpha''$ est la trace sur le plan π du plan tangent en A'', $G_0\beta''$ la trace du plan tangent en B''.

De même, $H_0\alpha'$, $H_0\beta'$ étant les traces des plans tangents en A' et B', on a

$$u = (H_0\alpha', H_0M, H_0G_0, H_0\beta').$$

Prenons comme triangle de référence dans le plan π le triangle formé par les droites $H_0\beta'$, $G_0\beta''$ et G_0H_0, on voit aussitôt que si

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0$$

représentent les équations de ces trois droites, on aura, en faisant rentrer dans X, Y, Z des facteurs constants,

$$u = \frac{X}{Z}, \qquad v = \frac{Y}{Z}.$$

En appelant K_0 le point de rencontre des droites $G_0\beta''$ et $H_0\beta'$, on voit donc que les quantités u, v sont tout à la fois les *coordonnées de Chasles du point* P *sur la quadrique,* et qu'elles sont aussi les coordonnées triangulaires du point M par rapport au triangle de référence $G_0H_0K_0$.

Les points H_0G_0 jouent dans cette représentation un rôle essentiel. Tout point de OG_0 se projette en G_0, tout point de OH_0 se projette en H_0. Ces points H_0, G_0 sont donc des points d'indétermination, en ce sens qu'en chacun d'eux se projettent une infinité de points de la quadrique.

Il y a aussi sur la quadrique un point d'indétermination. En effet, il est visible que, si le point P de la quadrique tend vers le point O, le point M vient se placer sur la droite G_0H_0, et que la position du point M est la trace sur G_0H_0 de la position limite de OP, quand OP devient tangente en O à la surface.

Nous voyons ainsi qu'il y a sur le plan deux points remarquables G_0, H_0 et une droite remarquable, la droite qui les joint. Sur la surface, il y a un point remarquable O et deux droites remarquables, les génératrices issues de ce point.

Dans les représentations de ce genre, les points G_0, H_0 portent le nom de *points de base* de la représentation, et la droite G_0H_0 le nom de *ligne fondamentale*.

Dans le cas général de la représentation des surfaces sur le plan, la nature des points de base et des lignes fondamentales, ou *génériquement* des ÉLÉMENTS FONDAMENTAUX, caractérise la représentation.

On démontre que, généralement, les courbes du plan qui représentent les sections planes de la surface passent par les points de base ou points fondamentaux.

[illegible] OG, en un point OH, en un autre [illegible] qui passe par les deux points G, H.

On sait que les propriétés métriques des figures planes se définissent comme des relations entre cette figure et deux points remarquables du plan, les points cycliques du plan. Au point de vue projectif on peut donc regarder comme métriques toutes les propriétés de relation entre une figure et deux points fixes.

Les coniques passant par ces deux points fixes seront dénommées *cercles*. A ce point de vue, on peut dire que les sections planes de la quadrique sont représentées sur le plan par des cercles.

On reconnaît d'ailleurs que, pour réaliser effectivement cette représentation, il suffirait de prendre pour le point O un ombilic de la quadrique, et, pour le plan π, un plan parallèle au plan tangent au point O.

On se trouve alors avoir généralisé une transformation bien ancienne, la *transformation stéréographique*.

Mais une telle restriction nous est inutile, puisque nous sommes toujours libres de prendre comme base des propriétés métriques deux points quelconques du plan.

92. On peut présenter cette représentation des quadriques sur le plan sous une forme plus analytique, qui se prête mieux à la généralisation que nous avons en vue.

Prenons, en effet, deux points O et O' sur la quadrique non situés sur une même génératrice rectiligne. Menons par la droite OO' deux plans conjugués et soit Δ la droite d'intersection des plans tangents en O et O'. Cette droite coupe les plans conjugués en deux points O'', O'''; nous prenons le tétraèdre $OO'O''O'''$ comme tétraèdre de référence. La quadrique aura une équation de la forme

$$(14)\qquad x^2 + y^2 - zt = 0,$$

en faisant rentrer dans x, y, z, t des constantes numériques qu'il est inutile de mettre en évidence. Je pose alors

$$(15)\qquad \begin{cases} \rho x = XZ, \\ \rho y = YZ, \\ \rho z = Z^2, \end{cases}$$

et j'observe que l'équation (14) donne alors

$$(16)\qquad \rho t = X^2 + Y^2.$$

Nous avons ainsi exprimé x, y, z, t en fonction de trois paramètres homogènes X, Y, Z.

Nous pourrons regarder X, Y, Z comme des coordonnées triangulaires d'un point dans un plan, et nous aurons ainsi réalisé *analytiquement* une représentation de la quadrique sur le plan.

Je ne m'arrête pas à démontrer que cette représentation se réalise géométriquement dans la projection stéréographique telle que je l'ai définie ci-dessus.

Observons que toute section plane

$$ax + by + cz + dt = 0,$$

est représentée sur le plan par la conique

$$(17)\qquad (aX + bY + cZ)Z + dt(X^2 + Y^2) = 0,$$

laquelle passe par deux points fixes

$$Z = 0, \qquad X \pm iY = 0.$$

Si l'on regarde ces deux points comme les points circulaires à l'infini du plan, l'équation (17) est l'équation générale des cercles du plan.

93. Ceci posé, cherchons à résoudre la question suivante :

Quelles sont exactement les propriétés des figures planes qui correspondent aux propriétés projectives de la quadrique?

Pour résoudre cette question avec précision, nous allons rechercher quelle est la transformation plane qui correspond à une transformation homographique conservant la quadrique proposée.

Soient x, y, z, t les coordonnées d'un point P de la quadrique ; x', y', z', t' celles du point P′ correspondant. On a

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} x' &= ax + by + cz + dt,\\ y' &= a'x + b'y + c'z + d't,\\ z' &= a''x + b''y + c''z + d''t,\\ t' &= a'''x + b'''y + c'''z + d'''t,\end{aligned}\right.$$

et, de plus, il faut avoir identiquement

$$(19)\qquad x'^2 + y'^2 - z't' = k(x^2 + y^2 - zt).$$

Soient (X, Y, Z) les coordonnées du point M correspondant au point P; (X′, Y′, Z′) celles du point M′ correspondant au point P′.

On aura, en remplaçant dans (18) x, y, z, t, x', y', z', t' par leurs valeurs en

X, Y, Z, X', Y', Z'.

$$(20)\quad \begin{cases} \rho X'Z' = a\,XZ + b\,YZ + c\,Z^2 + d\,(X^2+Y^2), \\ \rho Y'Z' = a'\,XZ + b'\,YZ + c'\,Z^2 + d'\,(X^2+Y^2), \\ \rho Z'^2 = a''\,XZ + b''\,YZ + c''\,Z^2 + d''\,(X^2+Y^2), \\ \rho(X'^2+Y'^2) = a'''XZ + b'''YZ + c'''Z^2 + d'''(X^2+Y^2). \end{cases}$$

Ces équations sont évidemment surabondantes pour définir X', Y', Z' en fonction de X, Y, Z; mais elles sont compatibles d'après l'identité (19), c'est-à-dire quand $a, b, c, d, a', b', c', d', \ldots, c''', d'''$ se prêtent à cette identité.

Pour simplifier l'interprétation des formules, je ferai $Z' = Z = 1$, et j'écrirai les formules sous cette forme

$$(T)\quad \begin{cases} X' = \dfrac{aX + bY + c + d(X^2+Y^2)}{a''X + b''Y + c'' + d''(X^2+Y^2)}, \\ Y' = \dfrac{a'X + b'Y + c' + d'(X^2+Y^2)}{a''X + b''Y + c'' + d''(X^2+Y^2)}, \\ X'^2+Y'^2 = \dfrac{a'''X + b'''Y + c''' + d'''(X^2+Y^2)}{a''X + b''Y + c'' + d''(X^2+Y^2)}. \end{cases}$$

Alors X, Y seront les coordonnées rectangulaires d'un point, X', Y' celles de son transformé.

Supposons qu'on effectue une première transformation de cette forme T, puis une autre T' avec d'autres coefficients, la nature linéaire de ces formules nous montre que la transformation résultante $T'T$ sera encore une transformation de même forme.

En un mot, ces transformations forment ce que M. Lie a appelé *un groupe*.

Une transformation homothétique autour d'un point quelconque, un déplacement quelconque, une transformation par symétrie par rapport à une droite quelconque, et plus généralement une inversion par rapport à un cercle quelconque, font partie du groupe, ainsi qu'on le reconnaît immédiatement sur les formules qui expriment ces diverses transformations. Je vais prouver que, réciproquement : *toute transformation définie par les formules* (T) *résulte de l'application successive d'un certain nombre de ces transformations* [1].

En effet, désignons par T_1 la translation qui change le point X, Y dans le point X'', Y'' et qui est représentée par les formules

$$(T_1)\qquad X'' = X + h, \qquad Y'' = Y + k,$$

---

[1] KLEIN, *Mathematische Annalen*, t. V.

où h et k sont deux constantes; envisageons ensuite la transformation

$$(T_2)\quad \begin{cases} X' = \dfrac{a_1 X'' + b_1 Y'' + d_1 (X''^2 + Y''^2)}{a''_1 X'' + b''_1 Y'' + c''_1 + d''_1 (X''^2 + Y''^2)}, \\ Y' = \dfrac{a'_1 X'' + b'_1 Y'' + d'_1 (X''^2 + Y''^2)}{a''_1 X'' + b''_1 Y'' + c''_1 + d''_1 (X''^2 + Y''^2)}, \\ X'^2 + Y'^2 = \dfrac{a'''_1 X'' + b'''_1 Y'' + c'''_1 + d'''_1 (X''^2 + Y''^2)}{a''_1 X'' + b''_1 Y'' + c''_1 + d''_1 (X''^2 + Y''^2)}. \end{cases}$$

La succession des deux opérations (T_1) et (T_2) équivaut à la transformation générale (T) où c, c' ne sont pas nuls; on peut donc poser $T = T_2 T_1$.

Maintenant, si l'on a égard à l'identité

$$(a_1 X'' + \ldots)^2 + (a'_1 X'' + \ldots)^2 = (a''_1 X'' + \ldots)(a'''_1 X'' + \ldots),$$

on voit que, le premier membre s'annulant avec X'', Y'', il doit en être de même du second; on a donc

$$c''_1 c'''_1 = 0.$$

Supposons d'abord $c''_1 = 0$; alors, en effectuant l'inversion

$$(T_0)\qquad X'' = \frac{X'''}{X'''^2 + Y'''^2}, \qquad Y'' = \frac{Y'''}{X'''^2 + Y'''^2},$$

l'opération T_2 apparaît comme le produit $T_3 T_0$ des opérations T_3 et T_0, où T_3 est défini par les formules

$$(T_3)\quad \begin{cases} X' = \dfrac{a_1 X''' + b_1 Y''' + d_1}{a''_1 X''' + b''_1 Y''' + d''_1}, \\ Y' = \dfrac{a'_1 X''' + b'_1 Y''' + d'_1}{a''_1 X''' + b''_1 Y''' + d''_1}, \\ X'^2 + Y'^2 = \dfrac{a'''_1 X''' + b'''_1 Y''' + c'''_1 (X'''^2 + Y'''^2) + d'''_1}{a''_1 X''' + b''_1 Y''' + d''_1}, \end{cases}$$

et l'on a

$$T = T_2 T_1 = T_3 T_0 T_1.$$

Supposons au contraire que ce soit c'''_1 qui soit nul; alors, en effectuant encore l'opération T_0, T_2 apparaît comme le produit $T'_2 T_0$ des deux opérations T_0 et T'_2, où T'_2 est ainsi défini

$$(T'_2)\quad \begin{cases} X' = \dfrac{a_1 X''' + b_1 Y''' + d_1}{a''_1 X''' + b''_1 Y''' + c''_1 (X'''^2 + Y'''^2) + d''_1}, \\ Y' = \dfrac{a'_1 X''' + b'_1 Y''' + d'_1}{a''_1 X''' + b''_1 Y''' + c''_1 (X'''^2 + Y'''^2) + d''_1}, \\ X'^2 + Y'^2 = \dfrac{a'''_1 X''' + b'''_1 Y''' + d'''_1}{a''_1 X''' + b''_1 Y''' + c''_1 (X'''^2 + Y'''^2) + d''_1}. \end{cases}$$

Or, pour effectuer la transformation (T'_2), on peut effectuer la transformation

$$(T'_3) \quad \left\{ \begin{aligned} X_1 &= \frac{a_1 X''' + b_1 Y''' + d_1}{a'''_1 X''' + b'''_1 Y''' - d'''_1}, \\ Y_1 &= \frac{a'_1 X''' + b'_1 Y''' + d'_1}{a'''_1 X''' - b'''_1 Y''' + d'''_1}, \\ X_1^2 + Y_1^2 &= \frac{a''_1 X''' + b''_1 Y''' + c''_1 (X'''^2 + Y'''^2) - d''_1}{a'''_1 X''' + b'''_1 Y''' + d'''_1}. \end{aligned} \right.$$

et la faire suivre de l'inversion T_0

$$X' = \frac{X_1}{X_1^2 + Y_1^2}, \qquad Y' = \frac{Y_1}{X_1^2 + Y_1^2}.$$

On a alors

$$T = T_0 T'_3 T_0 T_1.$$

Les transformations T_3 et T'_3 ont le même caractère; elles ont la forme générale

$$\begin{aligned} X' &= \frac{\alpha X + \beta Y + \gamma}{\alpha'' X + \beta'' Y + \gamma''}, \\ Y' &= \frac{\alpha' X + \beta' Y + \gamma'}{\alpha'' X + \beta'' Y + \gamma''}, \\ X'^2 + Y'^2 &= \frac{\alpha''' X + \beta''' X + \gamma''' + \delta''' (X^2 + Y^2)}{\alpha'' X + \beta'' Y + \gamma}. \end{aligned}$$

Écrivons que l'on a identiquement

$$(\alpha X + \beta Y + \gamma)^2 + (\alpha' X + \beta' Y + \gamma')^2 = (\alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'') [\alpha''' X + \beta''' Y + \gamma''' + \delta''' (X^2 + Y^2)].$$

On voit d'abord que α'', β'' devront être nuls, ce qui permet alors de faire $\gamma'' = 1$. Il reste donc

$$\begin{aligned} X' &= \alpha X + \beta Y + \gamma, \\ Y' &= \alpha' X + \beta' Y + \gamma', \\ X'^2 + Y'^2 &= \alpha''' X + \beta''' Y + \gamma''' + \delta''' (X^2 + Y^2), \end{aligned}$$

avec l'identité

$$(\alpha X + \beta Y + \gamma)^2 + (\alpha' X + \beta' Y + Y + \gamma')^2 = \alpha''' X + \beta''' Y + \gamma''' + \delta''' (X^2 + Y^2).$$

On doit donc avoir, en particulier,

$$(\alpha X + \beta Y)^2 + (\alpha' X + \beta' Y)^2 = \delta''' (X^2 + Y^2).$$

Or cette identité prouve que l'on peut poser, soit

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\delta'''} \cos\theta, & \beta &= \sqrt{\delta'''} \sin\theta, \\ \alpha' &= -\sqrt{\delta'''} \sin\theta, & \beta' &= \sqrt{\delta'''} \cos\theta, \end{aligned} \right.$$

soit

$$(22)\qquad \begin{cases} \alpha = \sqrt{\delta'''}\cos\theta, & \beta = \sqrt{\delta'''}\sin\theta, \\ \alpha' = \sqrt{\delta'''}\sin\theta, & \beta' = -\sqrt{\delta'''}\cos\theta. \end{cases}$$

Dans le premier cas, la transformation T_3 représente un déplacement quelconque D dans le plan, précédé d'une homothétie H; on a alors

$$T_3 = D.H.$$

Dans le second cas, cette homothétie est accompagnée d'une transformation S par symétrie par rapport à une droite, et l'on a alors

$$T_3 = D.H.S.$$

Donc, en résumé, on a

$$T = \begin{cases} T_3 T_0 T_1, \\ \text{ou bien} \\ T_0 T_3 T_0 T_1, \end{cases}$$

où

$$T_3 = \begin{cases} D.H, \\ \text{ou bien} \\ D.H.S. \end{cases}$$

Donc T se ramène bien à une superposition d'opérations de la nature suivante :

Mouvements, homothéties, inversions, symétries par rapport à des droites.

Toutes ces transformations ont une propriété commune : elles transforment tout cercle du plan en un autre ou, autrement dit, ce groupe de transformations conserve la famille des cercles du plan. On pourrait donner à ces transformations le nom de *transformations anallagmatiques*.

On voit, en conséquence, que, interprétées sur le plan représentatif, les transformations homographiques d'une quadrique en elle-même ont pour images le groupe des transformations anallagmatiques du plan.

Les propriétés projectives de la quadrique correspondent aux propriétés anallagmatiques dans le plan.

94. Tout ce que nous venons de dire pour la représentation des quadriques ordinaires sur le plan s'étend au cas des quadriques à $n-1$ dimensions dans l'espace à n dimensions.

Prenons, par exemple, la quadrique

$$(23)\qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5 x_6 = 0$$

dans l'espace à cinq dimensions, nous poserons

$$\begin{aligned}\rho x_1 &= X_1 X_5,\\ \rho x_2 &= X_2 X_5,\\ \rho x_3 &= X_3 X_5,\\ \rho x_4 &= X_4 X_5,\\ \rho x_5 &= X_5^2,\end{aligned}$$

et l'équation (23) donnera

$$\rho x_6 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2.$$

Nous avons aussi représenté notre quadrique sur un espace linéaire à quatre dimensions, dans lequel X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 sont les coordonnées homogènes d'un point.

Nous avons ici encore une *figure fondamentale*, ou d'indétermination. Elle est représentée par les équations

$$X_5 = 0, \qquad X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = 0,$$

elle constitue un espace quadratique à deux dimensions, que je représente par I_2.

Appelons *sphère* toute quadrique de l'espace à quatre dimensions qui contient I_2, l'équation d'une sphère sera

$$(aX_1 + bX_2 + cX_3 + dX_4 + eX_5)X_5 + f(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2) = 0.$$

Il est commode de réduire à l'unité la variable X_5 qui, égalée à zéro, représente l'infini de notre espace à quatre dimensions, et l'équation de notre sphère aura la forme

$$(24) \qquad a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 + a_5 + a_6(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2).$$

La distance de deux points sera

$$\sqrt{(X_1 - X'_1)^2 + \ldots + (X_4 - X'_4)^2};$$

un déplacement, une symétrie, une homothétie, une inversion se définiront comme dans le cas de l'espace ordinaire, et, par le même raisonnement que plus haut, nous reconnaîtrons que toute transformation linéaire qui conserve la forme

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5 x_6,$$

c'est-à-dire toute transformation homographique ou dualistique de l'espace réglé,

se traduit dans l'espace représentatif à quatre dimensions par une succession d'opérations telles que :

1° Homothétie; 2° symétrie; 3° inversion; 4° déplacements, toutes transformations qui laissent invariable la notion de sphère.

A ce point de vue, nous pouvons dire que :

La Géométrie réglée, au point de vue dualistique et projectif, est identique à la Géométrie anallagmatique d'un espace à quatre dimensions.

95. On voit que, dans la représentation qui nous occupe, un complexe linéaire (c'est-à-dire une section de la quadrique à quatre dimensions par un espace linéaire à quatre dimensions) se trouve représenté par une sphère de l'espace à quatre dimensions.

Si

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_6 x_6 = 0$$

est l'équation du complexe linéaire, celle de la sphère est précisément l'équation (24).

L'équation de la sphère peut recevoir la forme

$$\left(X_1 + \frac{a_1}{2a_6}\right)^2 + \left(X_2 + \frac{a_2}{2a_6}\right)^2 + \left(X_3 + \frac{a_3}{2a_6}\right)^2 + \left(X_4 + \frac{a_4}{2a_6}\right)^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 - 4a_5a_6}{a_6^2}.$$

L'expression du second nombre représente le carré du rayon de la sphère, $-\frac{a_1}{2a_6}$, $-\frac{a_2}{2a_6}$, $-\frac{a_3}{2a_6}$, $-\frac{a_4}{2a_6}$ sont les coordonnées de son centre. Le rayon est nul si

$$(25) \qquad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 - 4a_5a_6 = 0.$$

Or la forme fondamentale étant ici

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5 x_6,$$

l'invariant du complexe est précisément le premier membre de (25). *Les sphères de rayon nul correspondent ainsi aux complexes spéciaux.*

Pareillement, l'équation

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 - 2a_5 b_6 - 2a_6 b_5 = 0$$

exprime l'*involution des deux complexes*

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots = 0, \qquad b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots = 0;$$

elle exprime aussi *l'orthogonalité* des deux sphères correspondantes.

Une congruence linéaire est représentée par l'intersection de deux sphères. Par cette intersection, on peut faire passer deux sphères de rayon nul qui représentent chacune un des complexes spéciaux, qui ont pour directrices les directrices de la congruence.

L'intersection de deux sphères dans l'espace à quatre dimensions est, outre I_2, qui est mis à part, un espace quadratique à deux dimensions, que l'on peut appeler une sphère à deux dimensions.

Désignant par S_3 les sphères à trois dimensions, je désignerai celles-ci par S_2.

L'intersection de trois sphères à trois dimensions est un cercle S_1 ou espace quadratique à une dimension d'espèce particulière, car il a toujours deux points communs avec l'espace à deux dimensions I_2.

Par un cercle S_1 passent une infinité (une double infinité) de sphères images du système à trois termes de complexes linéaires menés par la demi-quadrique dont S_1 est l'image. Une infinité de ces complexes sont spéciaux; leurs directrices, qui engendrent la demi-quadrique complémentaire, ont pour images les points d'un second cercle S'_1, lequel est le lieu des centres des sphères de rayon nul menées par S_1. La correspondance entre S_1 et S'_1 est évidemment réciproque.

96. Les faisceaux plans de droites et les hyperfaisceaux de l'espace réglé ont aussi une représentation très simple.

Si la droite x engendre un faisceau plan de droites, on peut écrire, nous le savons,

$$x_1 = a_1 + \rho b_1, \qquad x_2 = a_2 + \rho b_2, \qquad x_3 = a_3 + \rho b_3,$$
$$x_4 = a_4 + \rho b_4, \qquad x_5 = 1 + \rho, \qquad x_6 = a_6 + \rho b_6.$$

Les coordonnées X_1, X_2, X_3, X_4 du point correspondant dans l'espace à quatre dimensions seront

$$(26) \quad X_1 = \frac{x_1}{x_5} = \frac{a_1 + \rho b_1}{1 + \rho}, \qquad X_2 = \frac{a_2 + \rho b_2}{1 + \rho}, \qquad X_3 = \frac{a_3 + \rho b_3}{1 + \rho}, \qquad X_4 = \frac{a_4 + \rho b_4}{1 + \rho}.$$

On aura, de plus,

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5 x_6 = 0,$$

c'est-à-dire

$$(a_1 + \rho b_1)^2 + (a_2 + \rho b_2)^2 + (a_3 + \rho b_3)^2 + (a_4 + \rho b_4)^2 = (1 + \rho)(a_6 + \rho b_6).$$

Ceci devant avoir lieu quel que soit ρ, il vient

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = a_6,$$
$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 = b_6,$$
$$2a_1 b_1 + 2a_2 b_2 + 2a_3 b_3 + 2a_4 b_4 = a_6 + b_6,$$

d'où, en éliminant a_6 et b_6,

$$(27)\qquad (a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2+(a_4-b_4)^2=0.$$

Les binômes a_i-b_i sont les coefficients directeurs α_i de la droite représentée par les équations (26), lesquelles pourront s'écrire, en posant

$$\alpha_i=a_i-b_i,$$

$$(28)\qquad \frac{X_1-a_1}{\alpha_1}=\frac{X_2-a_2}{\alpha_2}=\frac{X_3-a_3}{\alpha_3}=\frac{X_4-a_4}{\alpha_4}.$$

L'équation (27), qui s'écrit

$$(29)\qquad \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2=0,$$

exprime évidemment que le point de la droite (28), qui est à l'infini, appartient à l'espace quadratique I_2; elle exprime aussi que la distance de deux points quelconques de la droite est nulle. Les droites considérées sont des droites de longueur nulle et peuvent être définies par la propriété d'avoir avec I_2 un point commun.

Il est, dès lors, naturel d'introduire les coordonnées de Chasles de ce point de rencontre, en posant

$$(30)\qquad \frac{\alpha_1}{\lambda_0+\mu_0}=\frac{\alpha_2}{(\lambda_0-\mu_0)\sqrt{-1}}=\frac{\alpha_3}{\lambda_0\mu_0-1}=\frac{\alpha_4}{(\lambda_0\mu_0+1)\sqrt{-1}},$$

et, dès lors, la représentation générale de nos droites (et par suite des faisceaux plans de l'espace réglé) sera

$$(31)\qquad \frac{X_1-a_1}{\lambda_0+\mu_0}=\frac{X_2-a_2}{(\lambda_0-\mu_0)\sqrt{-1}}=\frac{X_3-a_3}{\lambda_0\mu_0-1}=\frac{X_4-a_4}{(\lambda_0\mu_0+1)\sqrt{-1}}.$$

Il est clair que, λ_0 et μ_0 restant fixes, le point de rencontre avec I_2 reste fixe.

Si on laisse fixe λ_0, le point en question décrit, lorsque μ_0 varie, une génératrice rectiligne d'un système de I_2; il décrit, au contraire, une génératrice rectiligne du second système si λ_0 varie, μ_0 étant fixe.

La représentation va beaucoup plus au fond des choses qu'on ne le pourrait croire au premier abord.

Cherchons, en effet, à représenter un hyperfaisceau.

Si la droite x engendre un hyperfaisceau, on peut poser

$$
\begin{aligned}
x_1 &= a_1 - \rho b_1 + \rho' b'_1,\\
x_2 &= a_2 + \rho b_2 + \rho' b'_2,\\
x_3 &= a_3 + \rho b_3 + \rho' b'_3,\\
x_4 &= a_4 - \rho b_4 + \rho' b'_4,\\
x_5 &= 1 + \rho + \rho',\\
x_6 &= a_6 + \rho b_6 + \rho' b'_6,
\end{aligned}
$$

avec la relation

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5 x_6 = 0,$$

qui, devant avoir lieu quels que soient ρ, ρ', nous donne

$$
\begin{aligned}
a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 &= a_6,\\
b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 &= b_6,\\
b_1'^2 + b_2'^2 + b_3'^2 + b_4'^2 &= b'_6,\\
2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4) &= a_6 + b_6,\\
2(a_1 b'_1 + a_2 b'_2 + a_3 b'_3 + a_4 b'_4) &= a_6 + b'_6,\\
2(b_1 b'_1 + b_2 b'_2 + b_3 b'_3 + b_4 b'_4) &= b_6 + b'_6,
\end{aligned}
$$

d'où, par élimination de a_6, b_6, b'_6,

$$
\begin{aligned}
(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 + (a_4 - b_4)^2 &= 0,\\
(a_1 - b'_1)^2 + (a_2 - b'_2)^2 + (a_3 - b'_3)^2 + (a_4 - b'_4)^2 &= 0,\\
(b_1 - b'_1)^2 + (b_2 - b'_2)^2 + (b_3 - b'_3)^2 + (b_4 - b'_4)^2 &= 0.
\end{aligned}
$$

On vérifiera les deux premières équations en posant

$$\frac{b_1 - a_1}{\lambda_0 + \mu_0} = \frac{b_2 - a_2}{(\lambda_0 - \mu_0)\sqrt{-1}} = \frac{b_3 - a_3}{\lambda_0 \mu_0 - 1} = \frac{b_4 - a_4}{(\lambda_0 \mu_0 + 1)\sqrt{-1}} = \theta',$$

$$\frac{b'_1 - a_1}{\lambda'_0 + \mu'_0} = \frac{b'_2 - a_2}{(\lambda'_0 - \mu'_0)\sqrt{-1}} = \frac{b'_3 - a_3}{\lambda'_0 \mu'_0 - 1} = \frac{b'_4 - a_4}{(\lambda'_0 \mu'_0 + 1)\sqrt{-1}} = \theta',$$

où λ_0, μ_0, θ, λ'_0, μ'_0, θ' sont des arbitraires.

On en tire

$$
\begin{aligned}
b'_1 - b_1 &= [\theta'(\lambda'_0 + \mu'_0) - \theta(\lambda_0 + \mu_0)],\\
b'_2 - b_2 &= [\theta'(\lambda'_0 - \mu'_0) - \theta(\lambda_0 - \mu_0)]\sqrt{-1},\\
b'_3 - b_3 &= [\theta'(\lambda'_0 \mu'_0 - 1) - \theta(\lambda_0 \mu_0 - 1)],\\
b'_4 - b_4 &= [\theta'(\lambda'_3 \mu'_0 + 1) - \theta(\lambda_0 \mu_0 + 1)]\sqrt{-1},
\end{aligned}
$$

d'où

$$\begin{aligned} o &= (b'_1 - b_1)^2 + (b'_2 - b_2)^2 + (b'_3 - b_3)^2 + (b'_4 - b_4)^2 \\ &= -2\theta\theta'[\ (\lambda'_0 + \mu'_0)(\lambda_0 + \mu_0) - (\lambda'_0 - \mu'_0)(\lambda_0 - \mu_0) \\ &\quad + (\lambda'_0 \mu'_0 - 1)(\lambda_0 \mu_0 - 1) - (\lambda'_0 \mu'_0 + 1)(\lambda_0 \mu_0 + 1)] \\ &= 4\theta\theta'(\lambda'_0 - \lambda_0)(\mu'_0 - \mu_0). \end{aligned}$$

On voit qu'il faut avoir soit

$$\lambda'_0 = \lambda_0,$$

soit

$$\mu'_0 = \mu_0.$$

Prenons, par exemple, $\lambda'_0 = \lambda_0$.

L'hyperfaisceau correspondant se représente dans l'espace à quatre dimensions par les équations

$$X_i = \frac{a_i + \rho b_i + \rho' b'_i}{1 + \rho + \rho'},$$

ou encore par les équations

$$\begin{aligned} \frac{X_1 - a_1}{\rho(b_1 - a_1) + \rho'(b'_1 - a_1)} &= \frac{X_2 - a_2}{\rho(b_2 - a_2) + \rho'(b'_2 - a_2)} \\ = \frac{X_3 - a_3}{\rho(b_3 - a_3) + \rho'(b'_3 - a_3)} &= \frac{X_4 - a_4}{\rho(b_4 - a_4) + \rho'(b'_4 - a_4)}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en faisant rentrer θ dans ρ et θ' dans ρ',

$$\begin{aligned} \frac{X_1 - a_1}{\rho(\lambda_0 + \mu_0) + \rho'(\lambda_0 + \mu'_0)} &= \frac{X_2 - a_2}{\rho(\lambda_0 - \mu_0)\sqrt{-1} + \rho'(\lambda_0 - \mu'_0)\sqrt{-1}} \\ = \frac{X_3 - a_3}{\rho(\lambda_0 \mu_0 - 1) + \rho'(\lambda_0 \mu'_0 - 1)} &= \frac{X_4 - a_4}{[\rho(\lambda_0 \mu_0 + 1) + \rho'(\lambda_0 \mu'_0 + 1)]\sqrt{-1}}. \end{aligned}$$

Ces équations, où $\rho' : \rho$ est arbitraire et même variable, définissent un espace linéaire à deux dimensions qui représente l'hyperfaisceau considéré. Or, et c'est là un fait bien remarquable, en posant

$$\frac{\mu_0 \rho + \mu'_0 \rho'}{1 + \rho'} = \mu,$$

ces équations peuvent recevoir la forme

$$(32) \qquad \frac{X_1 - a_1}{\lambda_0 + \mu} = \frac{X_2 - a_2}{(\lambda_0 - \mu)\sqrt{-1}} = \frac{X_3 - a_3}{\lambda_0 \mu - 1} = \frac{X_4 - a_4}{(\lambda_0 \mu + 1)\sqrt{-1}}.$$

Ces équations se déduisent des équations (30) en y remplaçant le paramètre constant μ_0 par un paramètre variable μ.

Si l'on avait adopté la solution $\mu'_0 = \mu_0$, on serait arrivé à la formule

$$(33)\qquad \frac{X_1 - a_1}{\lambda + \mu_0} = \frac{X_2 - a_2}{(\lambda - \mu_0)\sqrt{-1}} = \frac{X_3 - a_3}{\lambda\mu_0 - 1} = \frac{X_4 - a_4}{(\lambda\mu_0 + 1)\sqrt{-1}},$$

qui se déduit des équations (30) faisant varier λ.

Les espaces linéaires (32) et (33) sont à deux dimensions, puisque μ est variable dans (32) et λ dans (33). Ce sont, en quelque sorte, des espaces linéaires à deux dimensions *isotropes*. Ils possèdent cette propriété de couper chacune le plan de l'infini suivant une génératice rectiligne de I_2. Seulement, les uns couperont I_2 suivant une génératrice d'un système [équation (32)]; les autres, suivant une génératrice du système opposé [équation (33)].

Nous avons donc deux sortes d'espaces (¹) linéaires E'_2 isotropes.

Les uns correspondront aux hyperfaisceaux qui sont des gerbes, les autres aux hyperfaisceaux qui sont des systèmes plans.

Il est assurément bien curieux que la séparation des deux systèmes de génératrices de I_2 revienne à la distinction entre la Géométrie du point et celle du plan dans l'espace à trois dimensions, qui est le lieu des figures réglées.

Prenons, par exemple, les équations

$$(34)\qquad \frac{X_1 - a_1}{\lambda_0 + \mu_0} = \frac{X_2 - a_2}{(\lambda_0 - \mu_0)\sqrt{-1}} = \frac{X_3 - a_3}{\lambda_0\mu_0 - 1} = \frac{X_4 - a_4}{(\lambda_0\mu_0 + 1)\sqrt{-1}};$$

nous avons là la représentation d'un faisceau plan (O, π) dont fait partie la droite A, qui a pour image le point a_1, a_2, a_3, a_4 de l'espace à quatre dimensions. Quand λ_0, μ_0 recevront toutes les valeurs possibles, *nous aurons tous les faisceaux plans qui contiennent* A.

Si λ_0 reste fixe, la droite X engendre, nous le savons, un hyperfaisceau, dont un des éléments O ou π reste fixe, par exemple O, et alors les équations (34) représentent toutes les droites issues de O.

Si, au contraire, c'est μ_0 qui est fixe, c'est le plan π qui se trouve fixé et représenté comme support d'un système plan de droites.

Ainsi, en résumé, quand un faisceau est représenté par des formules telles que (34), a_1, a_2, a_3, a_4 représentent une droite de ce faisceau, λ_0 le point O et μ_0 le plan π du faisceau sur cette droite (²).

(¹) Le fait n'est pas nouveau; déjà, dans le plan, les droites isotropes forment deux familles distinctes.

(²) On pourra comparer avec la représentation que j'ai donnée en 1882 dans mon travail *Sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé*, p. 23.

Si l'on reliait λ_0, μ_0 homographiquement, le lieu de la droite X serait une congruence linéaire *singulière* admettant A pour directrice ([1]).

Il existe encore d'autres systèmes de coordonnées, mais leur étude viendra naturellement à la suite des propriétés infinitésimales.

J'ajouterai que les coordonnées que j'ai définies projectivement au début peuvent recevoir une forme métrique importante. Nous y reviendrons au moment de l'étude des propriétés métriques des systèmes réglés.

(*A suivre.*)

([1]) Le lecteur pourra comparer ce qui précède avec le Chapitre sur les coordonnées penta ou hexasphériques du Tome I des Leçons de M. G. Darboux. La sphère dans l'espace euclidien donne lieu à une théorie toute pareille à celle de la droite.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME SEPTIÈME.

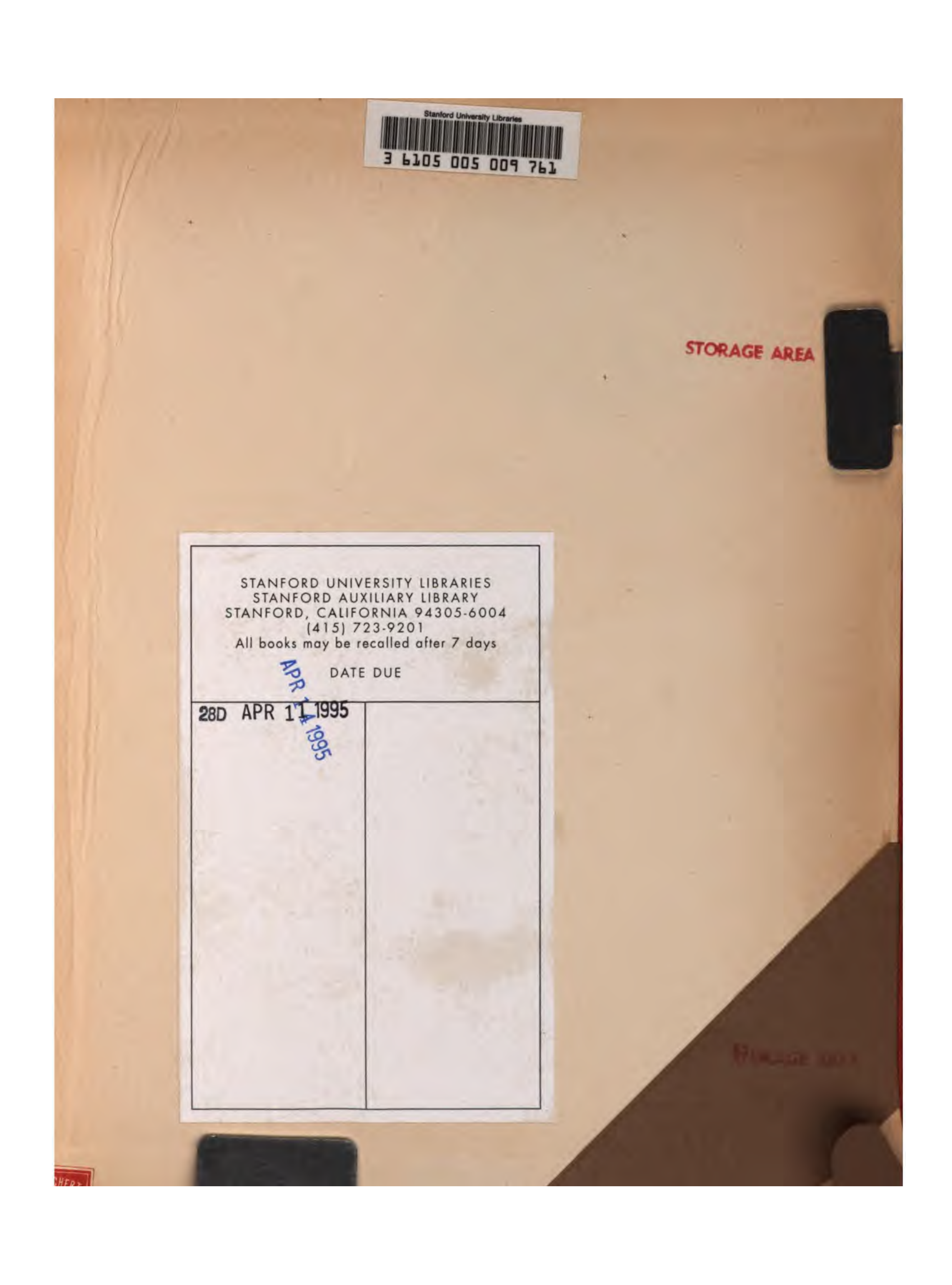
	Pages.
Formes des intégrales abéliennes des diverses espèces; par M. *P. Appell*	A.5 à A.8
Sur les lois générales de l'induction électrodynamique; par M. *P. Duhem*	B.1 à B.38
Sur les congruences de droites et sur la théorie des surfaces; par M. *E. Cosserat*	N.1 à N.62
Détermination des équations résolubles algébriquement dans lesquelles chaque racine peut s'exprimer en fonction rationnelle de l'une d'entre elles; par M. *I. Bendixson*	C.1 à C.7
Sur quelques inégalités de la longitude de la Lune (deuxième Mémoire); par M. *H. Andoyer*	E.1 à E.19
Sur le système d'équations aux dérivées partielles simultanées auxquelles satisfont la série hypergéométrique à deux variables $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)$; par M. *R. Le Vavasseur*	F.1 à F.205
Les actions électrodynamiques et électromagnétiques; par M. *P. Duhem*	G.1 à G.52

ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE.

La Géométrie réglée et ses applications (*suite*); par M. *G. Kœnigs*	1 à 55

FIN DU TOME SEPTIÈME.

19361 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
Quai des Grands-Augustins, 55.



STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD AUXILIARY LIBRARY
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004
(415) 723-9201
All books may be recalled after 7 days

DATE DUE

28D APR 11 1995
APR 14 1995

